

GEOMETRÍA ANALÍTICA: PUNTOS, VECTORES Y MATRICES

CIENCIAS BÁSICAS

textosuniversitarios

Fausto Arturo Contreras Rosales

**Geometría Analítica:
puntos, vectores y matrices**

Primera edición 2019

D.R. © Universidad Autónoma de Aguascalientes
Av. Universidad No. 940
Ciudad Universitaria
C.P. 20131, Aguascalientes, Ags.
www.uaa.mx/direcciones/dgdv/editorial/

© Fausto Arturo Contreras Rosales

ISBN 978-607-8652-67-9

Hecho en México / *Made in Mexico*

Índice general

Prefacio	VII
Capítulo 1. Vectores en el plano y en el espacio	1
1. Coordenadas rectangulares en el plano y en el espacio	1
2. Operaciones entre vectores y escalares	6
3. Norma y dirección de vectores	9
4. Ángulo entre vectores: producto escalar	15
5. Descomposición de vectores	23
6. Producto vectorial	28
7. Ejercicios	37
Capítulo 2. Rectas en el plano	43
1. Ecuaciones de la recta en el plano cartesiano	43
2. Distancia de un punto a una recta	53
3. Intersección de rectas	56
4. Ejercicios	59
Capítulo 3. Rectas y planos en el espacio	65
1. Rectas en el espacio	65
2. Planos en el espacio	68
3. Distancia de un punto a un plano	72
4. Intersecciones de recta con plano y plano con plano	74
5. Ejercicios	84
Capítulo 4. Curvas en el plano	89
1. Lugares geométricos	89
2. Secciones cónicas	90
2.1. Circunferencia	92
2.2. Parábola	98
2.3. Elipse	103
2.4. Hipérbola	109
3. Excentricidad	115
4. Ejercicios	120
Capítulo 5. Sistemas de coordenadas	129
1. Rotación de ejes	129
2. Coordenadas polares	136
3. Gráficas en coordenadas polares	138
4. Las secciones cónicas en coordenadas polares	149
5. Ejercicios	152

Capítulo 6. Superficies y curvas en el espacio	157
1. Cónicas en el espacio	157
2. Superficies cilíndricas	163
3. Sistemas de coordenadas: cilíndricas y esféricas	165
4. Curvas en el espacio	168
5. Ejercicios	171
Bibliografía	175
Índice alfabético	177

para Ángela.

Prefacio

La geometría es una de las ramas más antiguas de la matemática y se encuentra bastante información al respecto, tanto bibliográfica como en la red. Por su parte, la creación de la geometría analítica se atribuye tradicionalmente a René Descartes, no obstante ya se conocían trabajos anteriores a él en los que se combinaron la geometría y el álgebra. Además, Descartes no empleó el concepto geométrico de vector.

En este libro se desarrolla la Geometría Analítica Euclidiana del plano y del espacio desde una perspectiva vectorial. No es que no hayan diversos textos en el mercado con este material; desafortunadamente los que abordan el tema con un rigor aceptable (sin entrar en detalle en lo que significa *acceptable*) se encuentran fuera de imprenta y son de difícil adquisición, y los que son comerciales, es precisamente esta cualidad lo que les resta rigor y profundidad al tratar los conceptos. Esta obra no pretende redefinir el rigor de la materia, sino más bien contribuir como un texto moderno y con un tratamiento adecuado para estudiantes de matemáticas o física, o en su caso, para estudiantes de ingeniería que deseen complementar sus cursos de física, álgebra lineal o cálculo en varias variables en lo que a interpretación geométrica se refiere.

El contenido está pensado en el curso Geometría Analítica Vectorial del plan de estudios de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas de la Universidad Autónoma de Aguascalientes y está basado en la experiencia adquirida por el autor a través de la impartición del curso a diez generaciones. No es un texto que pueda usarse para cursos de Álgebra Lineal ni para Cálculo, pero se hacen referencia a conceptos elementales de dichos cursos, como gráficas de curvas, resolución de sistemas de ecuaciones lineales, entre otros. Vale la pena comentar que no fue sencillo decidir qué temas de álgebra lineal había que incluir o excluir. Conceptos como dependencia e independencia lineal, espacios y subespacios vectoriales no se mencionan explícitamente. Sin embargo, cuando ellos se presentan en el estudio de objetos geométricos, se hacen breves observaciones o comentarios al respecto. En lo que a curvas y rectas tangentes a éstas se refiere, el tratamiento es muy limitado debido a que no se desarrollan herramientas de cálculo.

El desarrollo de los temas comienza con los vectores en el *Plano euclidiano* para dar el salto a la tercera dimensión de manera natural al hacer hincapié en las operaciones que se comportan del mismo modo y que gozan de las mismas propiedades, asimismo de lo que ya no es válido al aumentar la dimensión. A continuación se estudian las ecuaciones en sus diferentes formas con las que se pueden determinar las rectas en el plano. El siguiente paso es trasladar las rectas al espacio y hacer notar que muchas propiedades de éstas ya no se verifican. La analogía entre rectas en el plano euclidiano y planos en el espacio se pone ahora de manifiesto. Lo que a curvas se refiere, éstas se estudian en el caso bidimensional incluyendo la rotación de ejes; las curvas en tres dimensiones se presentan sólo pictográficamente, presentando para el caso tridimensional únicamente las curvas sobre superficies cónicas. Se estudian también las

curvas en coordenadas polares en el plano mientras que las coordenadas cilíndricas y esféricas se dejan sólo para la representación de puntos en los diferentes sistemas coordenados.

Se espera que el estudiante domine temas del álgebra elemental, como productos y factorizaciones notables, leyes de los exponentes, entre otras, así como el conocimiento básico de la trigonometría, como las funciones trigonométricas, las leyes de los senos y cosenos y resolución de triángulos.

La mayoría de las figuras se muestran en el espacio tridimensional, pues el instructor percibirá que las gráficas de objetos bidimensionales son relativamente más sencillas de trazar en el pizarrón a mano alzada, dando además con ello al estudiante un apoyo visual en lo que a objetos geométricos tridimensionales se refiere.

A lo largo de este libro, usaremos los siguientes conjuntos de números.

Nombre	Símbolo	Conjunto
Enteros positivos o naturales	\mathbb{N}	$\{1, 2, 3, 4, \dots\}$
Enteros	\mathbb{Z}	$\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
Racionales	\mathbb{Q}	$\left\{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$
Reales	\mathbb{R}	$\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt[5]{10}}, \pi, \log 2\dots$

Quiero manifestar mi sincero agradecimiento tanto a mi exalumna de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas, Tania Estefanía Cortés Rodríguez, como al grupo de primer semestre de la misma carrera del periodo agosto - diciembre de 2016 por su valiosa ayuda al leer el texto y encontrar un gran número de erratas. Desde luego que la versión final es responsabilidad plena del autor.

Aguascalientes, Ags.
2017

CAPÍTULO 1

Vectores en el plano y en el espacio

1. Coordenadas rectangulares en el plano y en el espacio

Se puede hablar de dos tipos de cantidades: las escalares y las vectoriales. Las primeras quedan determinadas con un solo número. Los vectores o cantidades vectoriales se emplean para modelar conceptos que requieren tanto magnitud como dirección; las fuerzas y las velocidades son las más intuitivas: una fuerza se mide tanto en su magnitud como en la dirección en la que se aplica. Los vectores geométricos pueden representarse por medio de pares ordenados de números en el caso del plano o con ternas ordenadas para el espacio tridimensional. En ambos casos, su representación gráfica consiste en un punto inicial y un punto final, una flecha que comienza en el primero y su punta señala el otro.

Es muy útil considerar un punto arbitrario como el origen, cuyo par ordenado es $(0, 0)$ y con dos rectas que se cortan en ese punto formando un ángulo recto para construir lo que llamaremos **Plano cartesiano** y que denotaremos como \mathbb{R}^2 .

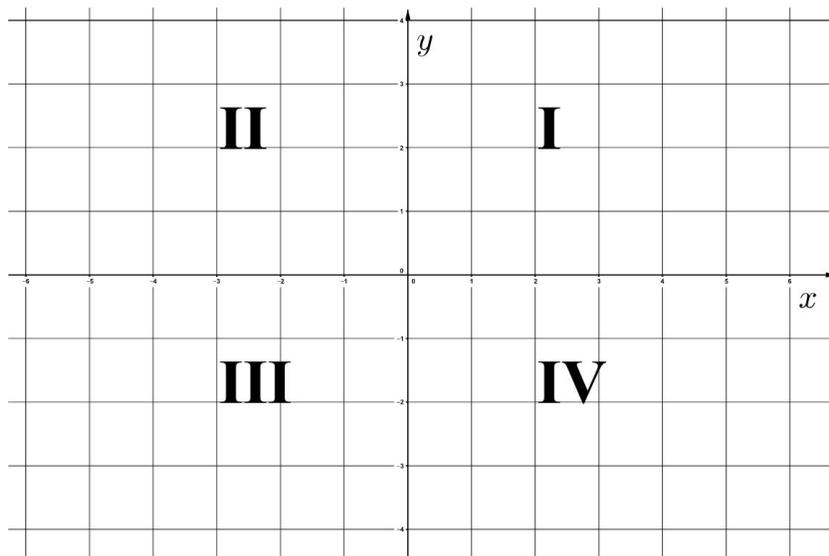


Figura 1

A la recta horizontal le llamaremos eje de las **abscisas** o eje X . A la recta vertical le llamaremos eje de las **ordenadas** o eje Y . Ambas rectas se denominan ejes coordenados. Estos ejes subdividen todo el plano en cuatro regiones llamadas cuadrantes y se enumeran en sentido contrario a las manecillas del reloj comenzando donde ambas coordenadas son positivas (ver Figura 1).

Ahora asociaremos a cada punto en el plano cartesiano un único par ordenado de números reales, donde la primera posición es para la abscisa y la segunda para la ordenada. Nótese que, con esta convención, por cada par de números ordenados podemos localizar un punto en \mathbb{R}^2 .

EJEMPLO 1. Se localiza en \mathbb{R}^2 los puntos $A = (-2, 3)$, $B = (4, -1)$, $C = (2, 2)$ y $D = (-1, -3)$.

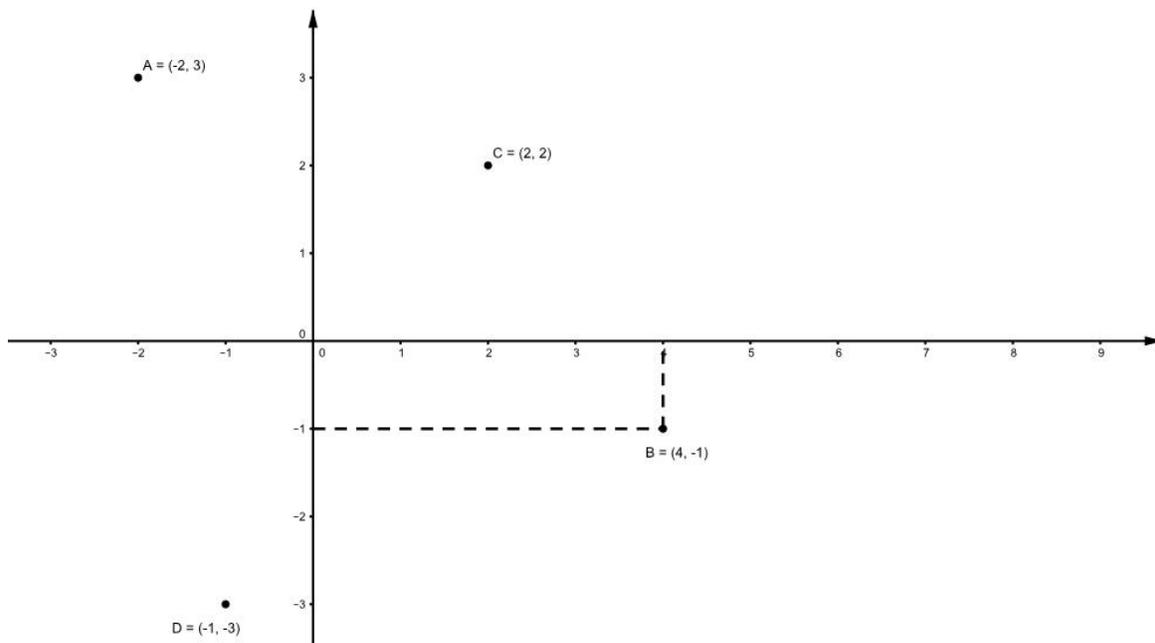


Figura 2

DEFINICIÓN 1. Dos puntos $A = (a_1, b_1)$ y $B = (a_2, b_2)$ son iguales si y sólo si $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$.

Por el momento haremos distinción entre punto y **vector**; más adelante en el texto esta distinción será irrelevante. Como se mencionó, un vector queda determinado por dos puntos. Uno de ellos será el inicial y el otro el final. A diferencia de los puntos, los vectores se denotarán con minúsculas negritas: $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{s}$, entre otras. Con esto, un vector se representa gráficamente con una flecha iniciando en $A = (x_1, y_1)$ y terminando en $B = (x_2, y_2)$. Un vector puede interpretarse como un desplazamiento en el eje x desde x_1 hasta x_2 y enseguida en el eje y desde y_1 hasta y_2 .

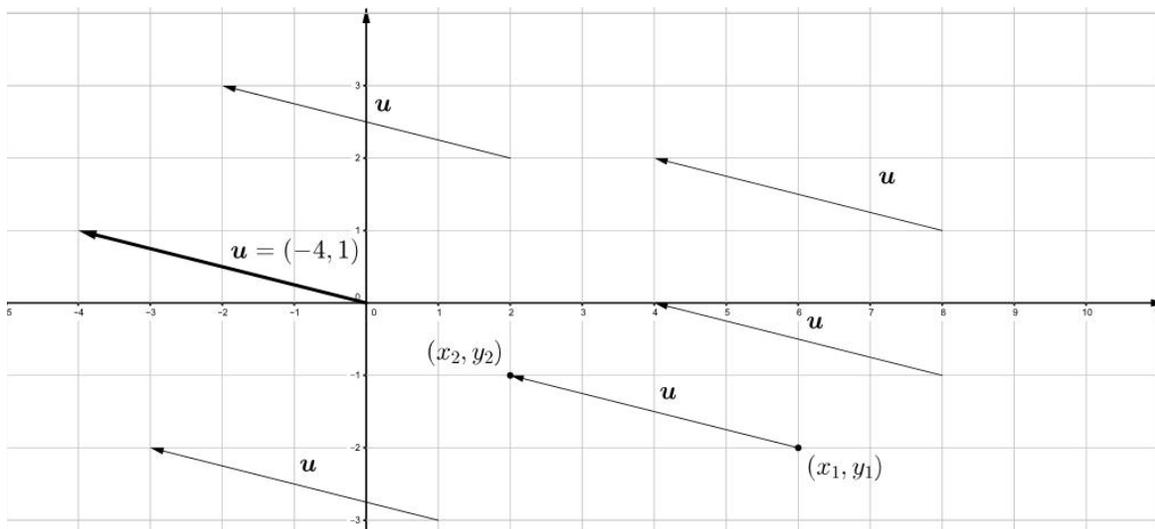


Figura 3

En la Figura 3 podemos notar que diferentes pares de puntos producen el mismo vector $\mathbf{u} = (-4, 1)$. Sólo un vector posee la propiedad de comenzar en el origen. Tal vector lo llamaremos **radiovector** o vector en posición ordinaria. A cualquier otro lo denominaremos una *traslación paralela* del radiovector o vector de posición. Si un vector $\mathbf{u} = (x, y)$ comienza en el punto $S = (a, b)$, deberá terminar en el punto $F = (a + x, b + y)$. Recíprocamente, si se dan los puntos inicial y final $S = (a, b)$ y $F = (c, d)$ respectivamente, el vector $\mathbf{u} = (x, y)$ satisface

$$\begin{aligned} x &= c - a \\ y &= d - b. \end{aligned}$$

EJEMPLO 2. El vector $\mathbf{u} = (-4, 1)$ tiene la representación geométrica con

$$\begin{aligned} S = (a, b), \quad F = (c, d) : \\ (2, 2), \quad (-2, 3); \\ (8, 1), \quad (4, 2); \\ (8, -1), \quad (4, 0); \\ (1, -3), \quad (-3, -2). \end{aligned}$$

Podemos trasladar estas ideas al espacio tridimensional de manera natural.

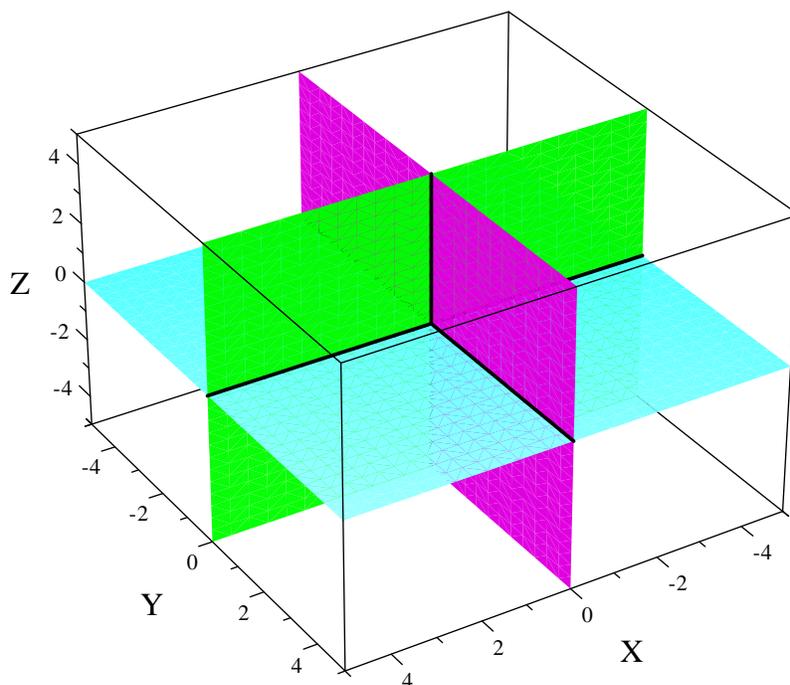


Figura 4

Al conjunto de puntos tridimensionales lo denotaremos con \mathbb{R}^3 . Ahora se divide al espacio en 8 regiones llamadas octantes. Retomando los cuadrantes I al IV, éstos serán los octantes con la misma numeración para la coordenada z positiva. Para la coordenada z negativa enumeramos los octantes en sentido contrario a las manecillas, comenzando con el octante V el que se encuentra por debajo del octante I; así, el octante VIII se encuentra por debajo del octante IV (ver Figura 4).

Algo muy importante debe indicarse en cuanto a los ejes coordenados en el espacio. Una vez que elegimos las direcciones hacia donde aumentan las coordenadas x y y , podemos elegir dos direcciones para la coordenada z . Esto da lugar a un concepto que en cursos más avanzados se llama *orientación*. La que adoptaremos en este libro es la que podemos adaptar a la mano derecha con los dedos índice y medio señalando las direcciones de los ejes x y y respectivamente y al extender el pulgar, éste señalará la dirección del eje z .

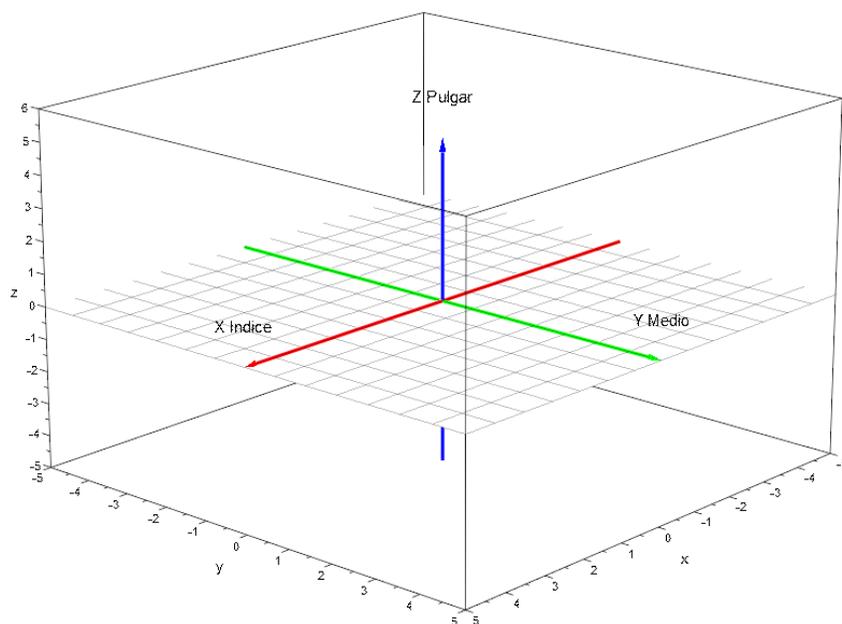


Figura 5a

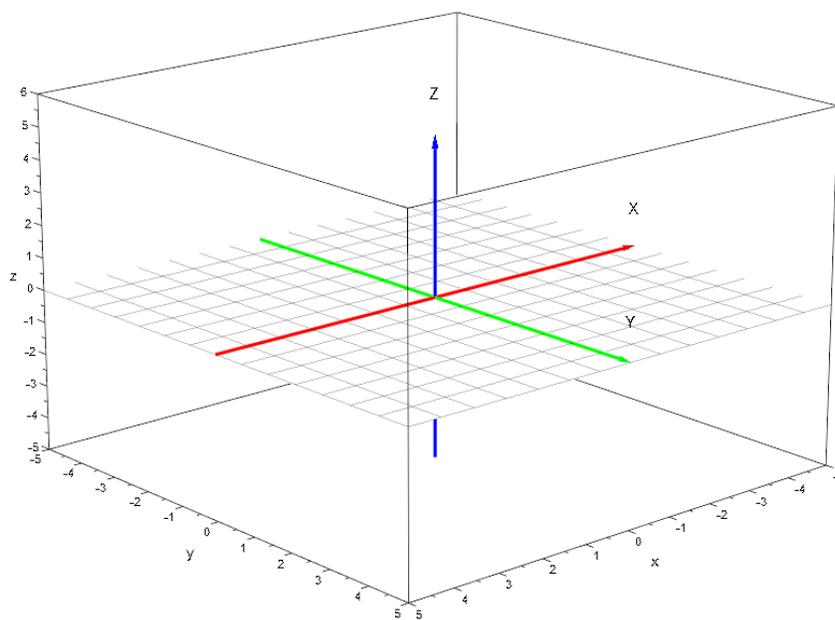


Figura 5b

En la Figura 5a se muestra la orientación positiva y en la Figura 5b, la orientación negativa. La orientación positiva será la que usaremos durante todo el libro.

Ahora localizamos un punto (x, y, z) en \mathbb{R}^3 . Primero, como en el caso bidimensional localizamos el punto atendiendo sólo las primeras dos coordenadas y luego de manera *perpendicular* en el llamado eje z , nos desplazamos hasta encontrar la tercera coordenada. En las Figuras 6a, 6b y 6c se muestra este proceso con tres vistas del mismo punto. No se incluyeron las direcciones de los ejes para que quede como ejercicio agregarlas de tal manera que resulte una orientación positiva en cada una de las vistas. Puede comenzar agregando cualquiera de las tres etiquetas a cualquier eje con cualquier dirección. Las otras etiquetas y direcciones ya no son del todo arbitrarias. Al finalizar de etiquetar los ejes, determine en qué octante está el punto.

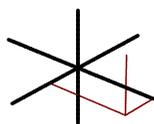


Figura 6a

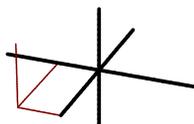


Figura 6b

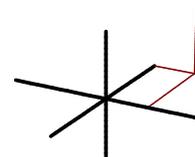


Figura 6c

Extenderemos la definición de que dos puntos en \mathbb{R}^3 son iguales si y sólo si son iguales en cada una de sus tres coordenadas. Del mismo modo que se trataron los vectores en \mathbb{R}^2 , un vector en el espacio tendrá un punto inicial S y un punto final T ; diferentes pares de puntos pueden producir el mismo vector.

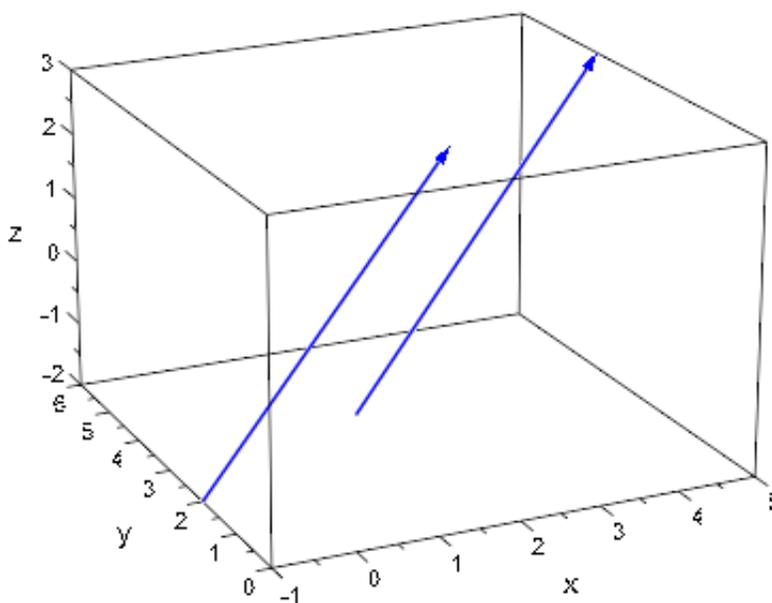


Figura 7

En la Figura 7 apreciamos el mismo vector $\mathbf{u} = (5, 4, 3)$ con diferentes puntos iniciales y sus respectivos puntos finales. Nuevamente, si un vector $\mathbf{u} = (x, y, z)$ comienza en el punto $S = (a, b, c)$, deberá terminar en el punto $F = (a + x, b + y, c + z)$. Recíprocamente, si se dan los puntos inicial y final $S = (a, b, c)$ y $F = (\alpha, \beta, \gamma)$ respectivamente, el vector $\mathbf{u} = (x, y, z)$ satisface

$$\begin{aligned}x &= \alpha - a \\y &= \beta - b \\z &= \gamma - c.\end{aligned}$$

2. Operaciones entre vectores y escalares

Convendremos que si un vector es dado sin especificar su punto inicial, será un radiovector. Ya desde que hicimos la interpretación de un vector como un desplazamiento desde un punto inicial hasta un punto final, incluso como radiovector, en el que el origen es el punto inicial, hemos realizado sumas (y restas) de pares ordenados, operando coordenada a coordenada. El caso más sencillo es el de los desplazamientos horizontal y vertical

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y).$$

en el que se forma un paralelogramo cuyos cuatro vértices son precisamente $(0, 0)$, $(x, 0)$, $(0, y)$ y (x, y) . Esto lo generalizaremos, pero antes damos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2. *Dados dos vectores $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ y $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$ y un escalar α , definimos la suma de los vectores como*

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Asimismo la multiplicación del vector \mathbf{u} por el escalar α como

$$\alpha\mathbf{u} = (\alpha x_1, \alpha y_1).$$

*Al vector $\alpha\mathbf{u}$ le llamaremos **múltiplo escalar** de \mathbf{u} . Esta definición se da de manera natural en \mathbb{R}^3 como*

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + \mathbf{v} &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ \alpha\mathbf{u} &= (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1).\end{aligned}$$

Comentar esta definición en algo que haya que resaltar es en la interpretación geométrica de las operaciones.

En la Figura 8 se muestra la suma de $\mathbf{u} = (5, 4, 3)$ (en color rojo) y $\mathbf{v} = (-2, 3, 3)$ (en color azul), cuyo resultado es el vector $\mathbf{w} = (3, 7, 6)$ (en color verde). Los vectores sólidos son radiovectores mientras que los vectores trazados en discontinuo son traslaciones paralelas: \mathbf{u} comienza en \mathbf{v} y viceversa. Ambos vectores trasladados terminan en \mathbf{w} .

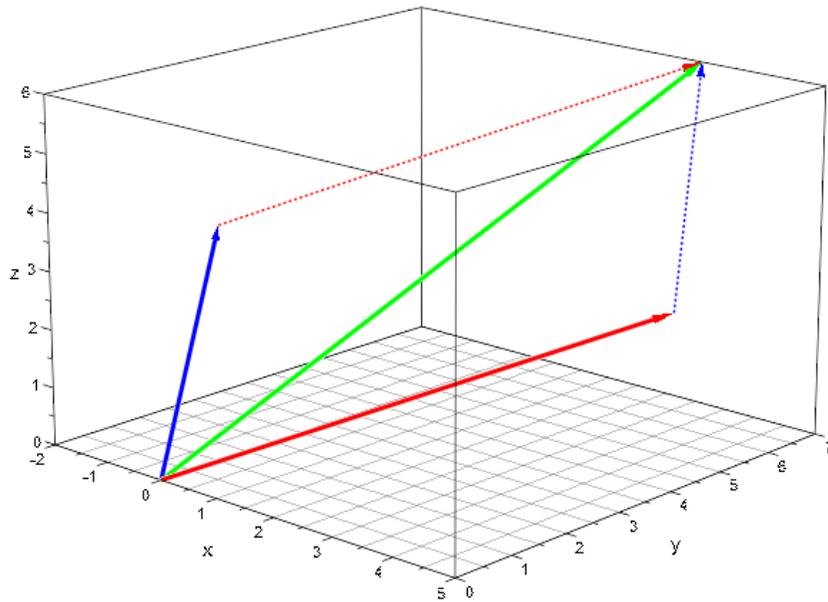


Figura 8

La interpretación geométrica de la multiplicación por escalar puede observarse en la Figura 9 en la que se muestran los vectores en \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= (1, 3, 2), \\ 2\mathbf{u} &= (2, 6, 4), \\ -\frac{3}{2}\mathbf{u} &= \left(\frac{-3}{2}, -\frac{9}{2}, -3\right).\end{aligned}$$

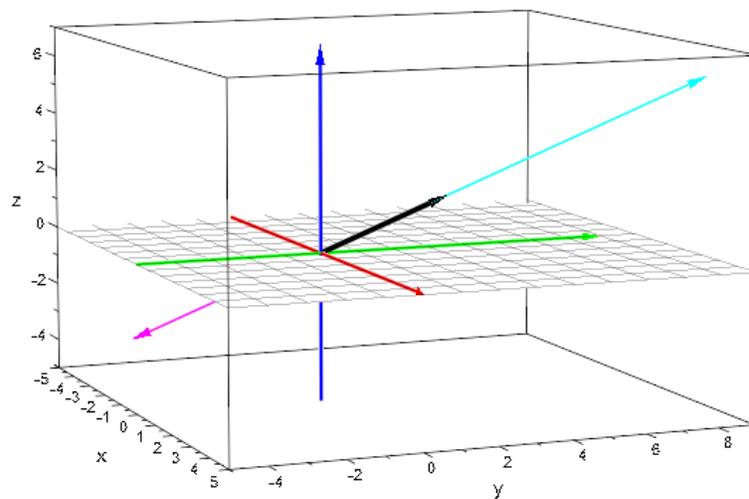


Figura 9

EJEMPLO 3. Calcule $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ si \mathbf{u} y \mathbf{v} son los siguientes vectores

1. $\mathbf{u} = \left(-\frac{5}{3}, 1\right)$, $\mathbf{v} = \left(\frac{2}{3}, -5\right)$,
2. $\mathbf{u} = (6, 1, 1)$, $\mathbf{v} = (-2, 4, 2)$,
3. $\mathbf{u} = (-5, 4)$, $\mathbf{v} = (5, -4)$,
4. $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{5}, -1\right)$, $\mathbf{v} = (-1, 5)$.

Solución. Realizando sumas sencillas encontramos que

1. $\mathbf{w} = \left(-\frac{5}{3} + \frac{2}{3}, 1 + (-5)\right) = (-1, 4)$,
2. $\mathbf{w} = (6 + (-2), 1 + 4, 1 + 2) = (4, 5, 3)$,
3. $\mathbf{w} = (-5 + 5, 4 + (-4)) = (0, 0)$,
4. $\mathbf{w} = \left(\frac{1}{5} + (-1), -1 + 5\right) = \left(-\frac{4}{5}, 4\right)$.

Los dos incisos finales del Ejemplo 3 merecen comentarios. En el tercero notamos que la suma de los vectores nos da el vector nulo, de hecho, uno se obtiene del otro multiplicando por el escalar -1 . En el último caso también uno es múltiplo escalar uno del otro; $\mathbf{v} = -5\mathbf{u}$ o lo que es lo mismo, $\mathbf{u} = -\frac{1}{5}\mathbf{v}$.

Las propiedades algebraicas de estas operaciones se dan a continuación. Debe notarse que la suma de vectores goza de las mismas propiedades que la suma de números reales.

TEOREMA 1. Sean los vectores \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} de la misma dimensión y α y $\beta \in \mathbb{R}$. Entonces la suma de vectores y multiplicación por escalares satisfacen

S1 (Cerradura): $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ o \mathbb{R}^3 .

S2 (Conmutativa): $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$.

S3 (Asociativa): $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$.

S4 (Neutro aditivo): El vector nulo $\mathbf{0}$, cuyas coordenadas son todas cero, cumple que $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ para cualquier vector \mathbf{u} .

S5 (Inverso aditivo): Para cualquier vector \mathbf{u} existe su inverso aditivo $-\mathbf{u} = (-1)\mathbf{u}$ que satisface $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.

M1 (Asociativa): $\alpha(\beta\mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{u}$.

M2 (Distributiva I): $(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$.

M3 (Distributiva II): $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$.

M4: $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$.

DEMOSTRACIÓN. La deducción de estas propiedades es mera rutina algebraica. Sólo verificaremos la Distributiva I en tres coordenadas. Dados $\mathbf{u} = (x, y, z)$ tenemos que

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)\mathbf{u} &= (\alpha + \beta)(x, y, z) \\ &= ((\alpha + \beta)x, (\alpha + \beta)y, (\alpha + \beta)z) \\ &= (\alpha x + \beta x, \alpha y + \beta y, \alpha z + \beta z) \\ &= (\alpha x, \alpha y, \alpha z) + (\beta x, \beta y, \beta z) \\ &= \alpha(x, y, z) + \beta(x, y, z) \\ &= \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u} \end{aligned}$$

El resto son incluso más sencillas. □

Sin mencionarlo explícitamente hemos realizado diferencias de vectores. La definición precisa de $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ puede redactarse como $\mathbf{u} + (-\mathbf{v})$, es decir, restar un vector es sumar el inverso aditivo del mismo. Ahora bien, al construir un paralelogramo con los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} como radiovectores, la diagonal que surge del origen corresponde con $\mathbf{u} + \mathbf{v}$. La resta de

vectores se ve gráficamente como la otra diagonal del paralelogramo. En la Figura 10 se ha trazado en color magenta el vector

$$\begin{aligned}\mathbf{u} - \mathbf{v} &= (5, 4, 3) - (2, 3, -3) \\ &= (7, 1, 0)\end{aligned}$$

tanto como radiovector como la otra diagonal del paralelogramo. El radiovector magenta es la representación gráfica del vector $\mathbf{u} + (-\mathbf{v})$. Una regla mnemotécnica para representar gráficamente $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ es la sugerida por el desplazamiento: punto final - punto inicial; así, la diferencia de vectores se dibuja con la flecha apuntando hacia \mathbf{u} desde \mathbf{v} .

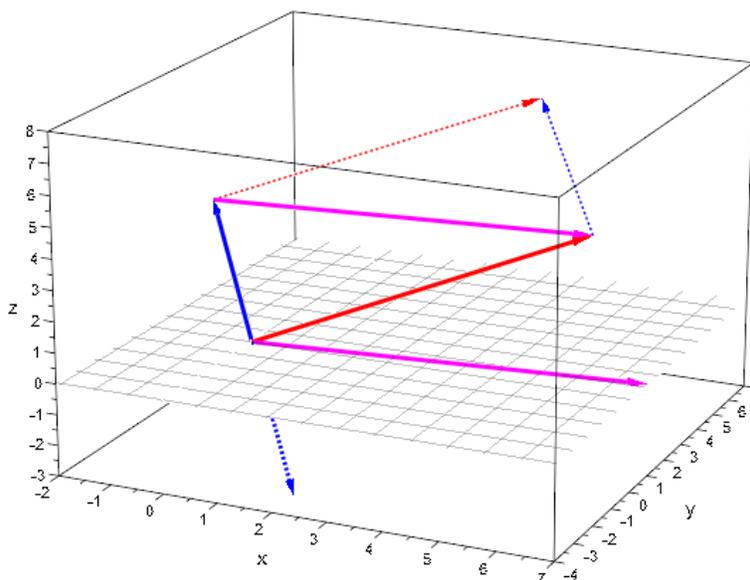


Figura 10

Desde luego que invertir el sentido de la flecha equivale a representar $\mathbf{v} - \mathbf{u} = -(\mathbf{u} - \mathbf{v})$.

3. Norma y dirección de vectores

Ya hemos dicho que un vector tiene magnitud y dirección. La magnitud o **norma** es solamente el Teorema de Pitágoras.

DEFINICIÓN 3. Dado un vector $\mathbf{u} = (x, y)$ o (x, y, z) se define la norma de \mathbf{u} como

$$\sqrt{x^2 + y^2} \text{ o } \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

respectivamente y se denota como $\|\mathbf{u}\|$.

En la Figura 11 se muestra $\mathbf{u} = (-3, 4, 4)$ y un triángulo rectángulo donde la hipotenusa, en trazo continuo, corresponde a $\|\mathbf{u}\|$.

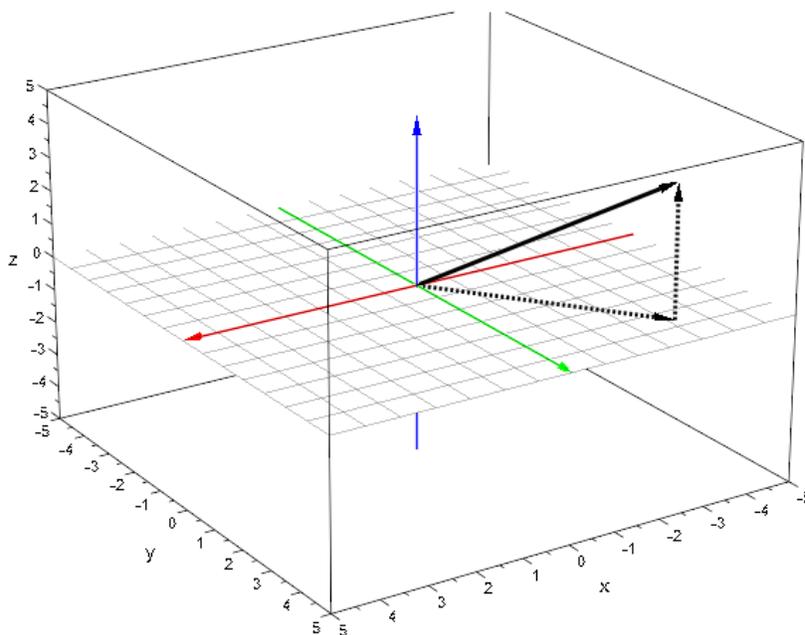


Figura 11

Es sencillo ver que si un vector \mathbf{u} modela el desplazamiento desde un punto inicial S hasta un punto final F , la norma mide la distancia de S a F la cual la denotaremos como $d(S, F)$. Si $S = (x_1, y_1, z_1)$ y $F = (x_2, y_2, z_2)$, entonces

$$d(S, F) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \|\mathbf{u}\|$$

donde, por supuesto, si el vector es bidimensional, las coordenadas z se omiten.

OBSERVACIÓN 1. Si el vector es bidimensional, éste tendrá dos coordenadas y no se debe confundir con un vector tridimensional con su coordenada $z = 0$. Dos de tales vectores no podrán operarse entre ellos puesto que son de dimensiones diferentes.

EJEMPLO 4. Si $\mathbf{u} = (-3, 5, 4)$, entonces $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2 + 4^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$. Asimismo, si \mathbf{u} es el desplazamiento desde $S = (4, -3, 1)$ hasta $F = (1, 2, 5)$ entonces

$$d(S, F) = \sqrt{(1 - 4)^2 + (2 - (-3))^2 + (5 - 1)^2} = \|\mathbf{u}\|.$$

Las propiedades de la norma de un vector se enuncian a continuación.

TEOREMA 2. Dados dos vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} de la misma dimensión y $\alpha \in \mathbb{R}$, la norma tiene las siguientes propiedades

1. $\|\mathbf{u}\| \geq 0$. El vector nulo $\mathbf{0}$ es el único con norma cero.
2. $\|\alpha\mathbf{u}\| = |\alpha| \|\mathbf{u}\|$.
3. $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$. Esta desigualdad se denomina **Desigualdad del Triángulo**.

DEMOSTRACIÓN. Las primeras dos propiedades se deducen fácilmente de los hechos de que para todo real $x \neq 0$, $x^2 > 0$ y $x^2 = 0$ si y sólo si $x = 0$; también de que $|\alpha| = \sqrt{\alpha^2}$. La tercera es menos inmediata y se pospone para más adelante, ya que se requiere una desigualdad muy especial. \square

La Figura 8 pone de manifiesto la desigualdad del triángulo. En este caso $\mathbf{u} = (5, 4, 3)$, $\mathbf{v} = (-2, 3, 3)$ y $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (3, 7, 6)$. Así

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| &= \sqrt{9 + 49 + 36} \\ &= \sqrt{94} = 9.6954 \\ &\leq \sqrt{25 + 16 + 9} + \sqrt{4 + 9 + 9} \\ &= \sqrt{50} + \sqrt{22} = 11.761 \\ &= \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|. \end{aligned}$$

La dirección de un vector es un tema en el que sí es muy importante hacer distinción entre el plano y el espacio. Para hablar de dirección de un vector se precisa de un referente. Siempre mediremos el ángulo de un vector en \mathbb{R}^2 respecto al eje X positivo, que denotaremos con $+x$. La definición hace uso de las funciones trigonométricas \sin y \cos .

DEFINICIÓN 4. Dado un vector $\mathbf{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ no nulo, la dirección de \mathbf{u} es el ángulo θ que satisface

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin \theta &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

En forma más simplificada, $\cos \theta = \frac{x}{\|\mathbf{u}\|}$ y $\sin \theta = \frac{y}{\|\mathbf{u}\|}$.

Antes de continuar, hablaremos de las unidades empleadas para medir un ángulo. En este libro emplearemos las más conocidas: grados, cuyo símbolo es $^\circ$, y radianes. Debido a que una revolución mide 360° , entonces cada cuadrante mide 90° .

DEFINICIÓN 5. Un radián es el ángulo subtendido por un arco de circunferencia de longitud igual al radio de ésta.

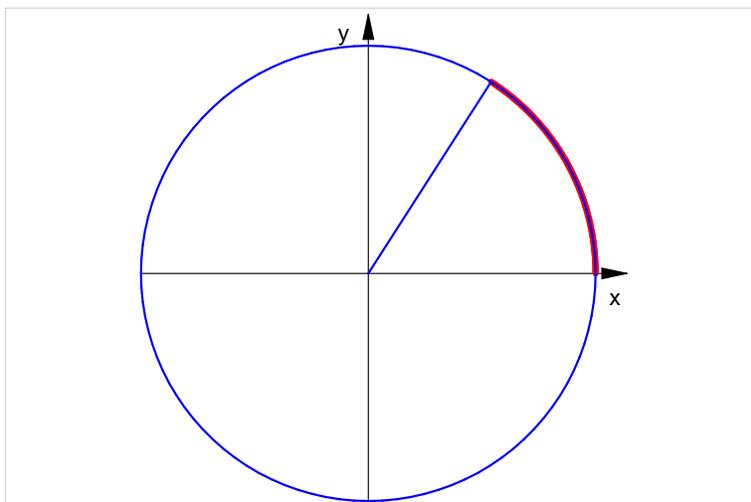


Figura 12

La Figura 12 muestra una circunferencia y un arco sobre ella. La longitud del arco es igual al radio de la circunferencia. El ángulo formado por el eje $+x$ y el radio en el otro extremo del arco es un radián. De geometría sabemos que para cubrir toda la circunferencia,

precisamos π diámetros, y como cada diámetro equivale a dos radios, resulta que toda la circunferencia equivale en longitud a 2π radios. Entonces una revolución es un ángulo de 2π radianes. Tenemos así la primera relación entre grados y radianes: $360^0 = 2\pi$ rad. Con ella realizamos proporciones para llenar la siguiente tabla:

Grados	10 ⁰	15 ⁰	30 ⁰	45 ⁰	60 ⁰	90 ⁰
--------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------

Radianes	$\pi/18$	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
----------	----------	----------	---------	---------	---------	---------

Grados	120 ⁰	135 ⁰	150 ⁰	180 ⁰	270 ⁰	360 ⁰
--------	------------------	------------------	------------------	------------------	------------------	------------------

Radianes	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π	$3\pi/2$	2π
----------	----------	----------	----------	-------	----------	--------

De la Definición 4 podemos escribir para un vector $\mathbf{u} = (x, y)$ con norma $\|\mathbf{u}\|$ y ángulo θ como $\mathbf{u} = (\|\mathbf{u}\| \cos \theta, \|\mathbf{u}\| \sin \theta)$. Ahora bien, conocidos x y y , podemos determinar θ empleando \cos^{-1} o \sin^{-1} , o bien sabiendo que $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$, resulta que

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ &= \frac{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}} = \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Entonces, $\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$ siempre que $x \neq 0$. Durante el libro emplearemos grados y radianes indistintamente, ya que ambas unidades son igualmente importantes.

OBSERVACIÓN 2. *Existe la convención de que los ángulos que giran en sentido contrario a las manecillas del reloj son positivos y los que lo hacen con el sentido de las manecillas son negativos. Así por ejemplo, el vector $(-1, -1)$ tiene un ángulo que puede adquirir los valores de $\frac{5\pi}{4}$ ($= 225^0$) si se mide en sentido contrario a las manecillas. Pero si es en el mismo sentido, el ángulo será de $-\frac{3\pi}{4}$ ($= -135^0$). Este vector se encuentra en el cuadrante III.*

OBSERVACIÓN 3. *Debido a la periodicidad de los giros, es correcto afirmar que el vector $(-1, -1)$ tiene un ángulo de $\frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ para cualquier entero k .*

OBSERVACIÓN 4. *Atendiendo la Observación 2, al determinar $\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$ con $x \neq 0$ con una calculadora, ésta nos devolverá siempre un valor de θ que satisface $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ (o bien $-90^0 < \theta < 90^0$). Estos valores de θ corresponden a vectores en los cuadrantes I y IV. Así por ejemplo, una calculadora nos dirá que el ángulo de $(-1, -1)$ es de $\frac{\pi}{4}$. Cuando el vector está en el cuadrante III, ambas coordenadas son negativas y así $\frac{y}{x} > 0$, lo que produce en la calculadora un ángulo como si fuesen ambas positivas. Ocurre algo similar cuando el vector se localiza en el cuadrante II, ahí $x < 0$ y $y > 0$ y por ende $\frac{y}{x} < 0$ y la calculadora arroja un resultado que corresponde a un vector con $x > 0$ y $y < 0$. Es necesario hacer una corrección la cual se puede realizar de dos maneras:*

Vector en el cuadrante III: *En este cuadrante la calculadora arroja un θ_0 con $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$, pero el θ correcto satisface $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ o $-\pi < \theta < -\frac{\pi}{2}$. Para el primer caso hacemos $\theta = \theta_0 + \pi$ y para el segundo $\theta = \theta_0 - \pi$.*

Vector en el cuadrante II: En este cuadrante la calculadora arroja un θ_0 con $-\frac{\pi}{2} < \theta_0 < 0$ pero $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ o $-\frac{3\pi}{2} < \theta < -\pi$. Nuevamente para el primer caso hacemos la corrección $\theta = \theta_0 + \pi$ o $\theta = \theta_0 - \pi$ para el segundo.

EJEMPLO 5. Se muestran cuatro vectores y se calculan sus normas y ángulos.

1. $\mathbf{u} = \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right)$, $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\frac{(25)3}{4} + \frac{25}{4}} = 5$, $\theta_{\mathbf{u}} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$.
2. $\mathbf{v} = (-3, 3)$, $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$, $\theta_{\mathbf{v}} = \tan^{-1}(-1) + \pi = \frac{3\pi}{4}$.
3. $\mathbf{w} = (-2, -\sqrt{12})$, $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{12+4} = 4$, $\theta_{\mathbf{w}} = \tan^{-1}(\sqrt{3}) - \pi = -\frac{2\pi}{3}$; o $\theta_{\mathbf{w}} = \tan^{-1}(\sqrt{3}) + \pi = \frac{4\pi}{3}$.
4. $\mathbf{m} = (2, -2)$, $\|\mathbf{m}\| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$, $\theta_{\mathbf{m}} = \tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

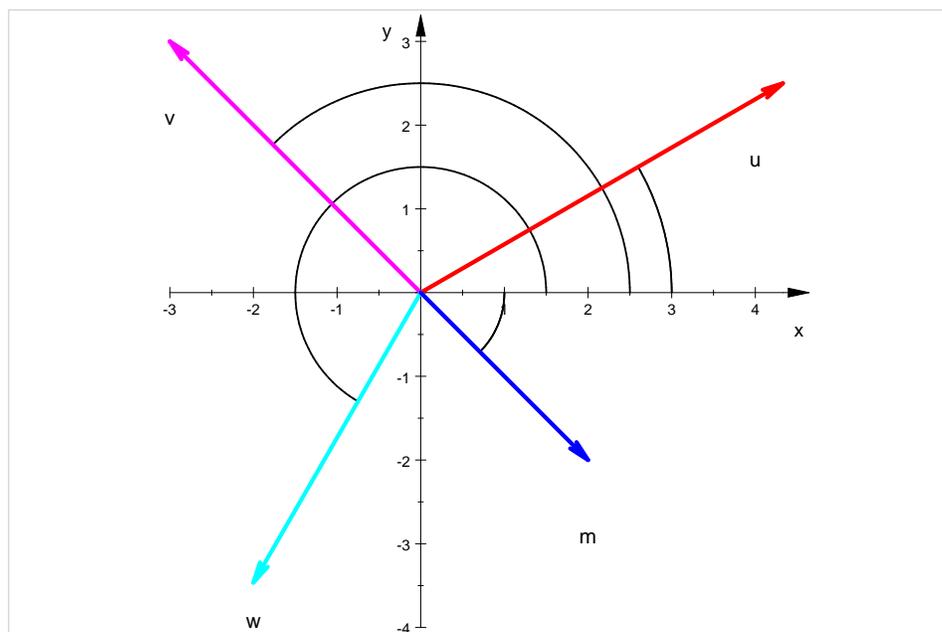


Figura 13

EJEMPLO 6. Los vectores de la forma $(0, y)$ con $y \neq 0$ tienen $\theta = \frac{\pi}{2}$ si $y > 0$. Si $y < 0$, entonces $\theta = -\frac{\pi}{2}$ o $\frac{3\pi}{2}$.

Para el caso tridimensional, la dirección de un vector no puede determinarse sólo por el ángulo con el eje $+x$; al salirnos a la tercera dimensión, este ángulo produce un cono con eje sobre el eje x . Para establecer la dirección de un vector en \mathbb{R}^3 emplearemos los llamados **ángulos directores**. Estos ángulos son los que conforma el vector con cada uno de los ejes coordenados: se denotan α , β y γ a los ángulos con los ejes $+x$, $+y$ y $+z$ respectivamente. Ver la Figura 14 donde se muestra un vector $\mathbf{u} = (x, y, z)$ y sus tres ángulos directores.

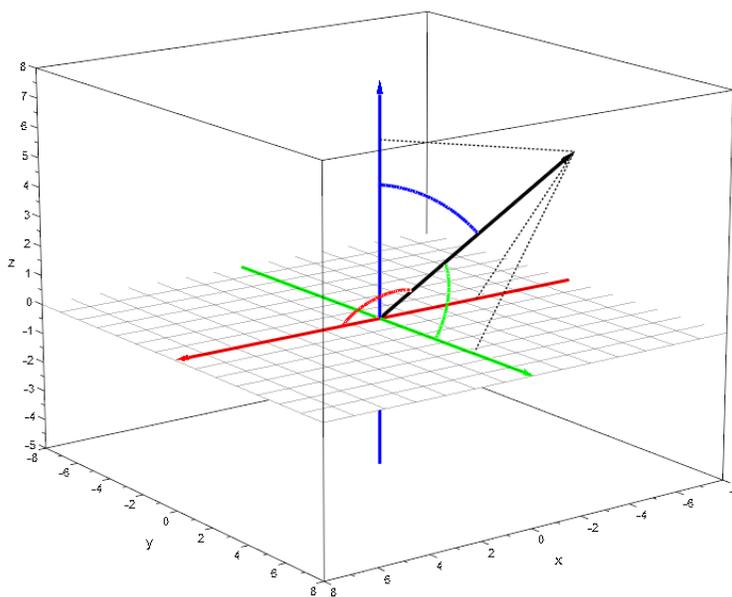


Figura 14

En realidad, en el caso bidimensional, los ángulos directores, al ser solamente dos de ellos, ambos quedan determinados cuando se conoce uno.

Considerando $\|\mathbf{u}\|$ como la hipotenusa y para cada ángulo director los segmentos $(x, 0, 0)$, $(0, y, 0)$ y $(0, 0, z)$ como catetos adyacentes, tenemos la definición

DEFINICIÓN 6. *Los ángulos directores de un vector $\mathbf{u} = (x, y, z)$ son los ángulos α , β y γ que satisfacen*

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \cos \beta &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \cos \gamma &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.\end{aligned}$$

De manera más simplificada, $\cos \alpha = \frac{x}{\|\mathbf{u}\|}$, $\cos \beta = \frac{y}{\|\mathbf{u}\|}$ y $\cos \gamma = \frac{z}{\|\mathbf{u}\|}$. Estos números son los llamados **cosenos directores**.

OBSERVACIÓN 5. *Los ángulos directores no son complementarios ni suplementarios, pero sí tienen la relación*

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Se pide al estudiante que establezca esta ecuación. Con ello notamos que conocidos dos cosenos directores podemos decidir si es posible calcular el tercero de ellos.

EJEMPLO 7. *Para $\mathbf{u} = (12, 4, -3)$, tenemos que $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{144 + 16 + 9} = 13$. Luego*

$$\cos \alpha = \frac{12}{13}, \cos \beta = \frac{4}{13}, \cos \gamma = -\frac{3}{13}.$$

Entonces, proporcionando ángulos positivos y menores que π

$$\alpha = 22,62^\circ, \beta = 72,08^\circ, \gamma = 103,34^\circ.$$

EJEMPLO 8. Si $\|\mathbf{u}\| = 14$, $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{7}}$ y $\cos \gamma = \sqrt{\frac{2}{7}}$, entonces podemos determinar si hay un \mathbf{u} que satisfaga estas condiciones. En caso afirmativo, en realidad serán dos vectores. Tenemos que

$$\begin{aligned} 1 &= \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma \\ &= \cos^2 \alpha + \frac{1}{7} + \frac{2}{7}, \end{aligned}$$

lo que nos da que $\cos \alpha = \pm \frac{2}{\sqrt{7}}$. Así obtenemos que

$$\begin{aligned} x &= \|\mathbf{u}\| \cos \alpha = \pm (14) \left(\frac{2}{\sqrt{7}} \right) = \pm 4\sqrt{7}, \\ y &= \|\mathbf{u}\| \cos \beta = (14) \left(\frac{1}{\sqrt{7}} \right) = 2\sqrt{7}, \\ z &= \|\mathbf{u}\| \cos \gamma = (14) \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \right) = 2\sqrt{14}. \end{aligned}$$

EJEMPLO 9. Dos cosenos directores de \mathbf{u} son $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{10}}$ y $\cos \gamma = \frac{3}{\sqrt{10}}$. Entonces

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \gamma = \frac{13}{10} > 1$$

y por ello no está definido $\cos \beta$ pues tendríamos que $\cos^2 \beta = -\frac{3}{10}$. Esto dice que no hay vector alguno que tenga cosenos directores $\frac{2}{\sqrt{10}}$ y $\frac{3}{\sqrt{10}}$. ¿Qué ocurre geoméricamente?

4. Ángulo entre vectores: producto escalar

Cuando establecimos la dirección de un vector, siempre medimos ángulos respecto a uno o varios ejes coordenados. Ahora aplicaremos la ley de los cosenos en un triángulo formado por dos vectores y la diferencia de éstos.

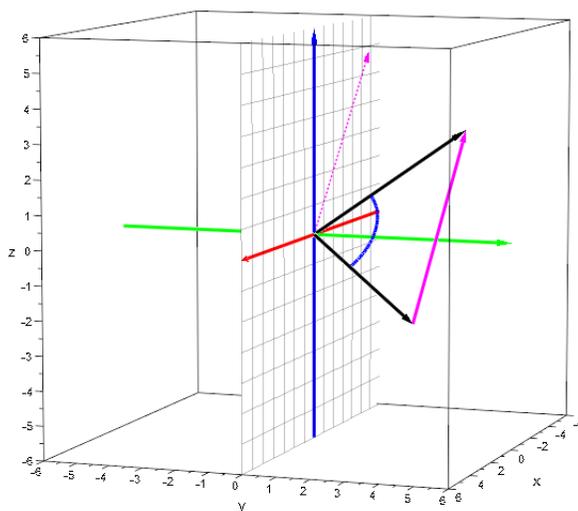


Figura 15

Aplicando la ley de los cosenos al triángulo formado por los vectores $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$ en trazo negro, cuyo ángulo formado por ellos es φ , y el vector en magenta $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, que será el lado opuesto al ángulo, obtenemos

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\varphi.$$

Traduciendo esta ecuación a coordenadas resulta que

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\varphi.$$

Desarrollando el lado izquierdo, podemos eliminar todos los términos cuadráticos con los correspondientes de la derecha, quedando del lado izquierdo sólo los dobles productos; factorizamos el -2 y resulta

$$-2(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) = -2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\varphi$$

y asumiendo que los dos vectores son no nulos, obtenemos una importante ecuación al despejar $\cos\varphi$:

$$(4.1) \quad \cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}.$$

Es un ejercicio sencillo verificar que si los vectores se encuentran en \mathbb{R}^2 , la ecuación será

$$(4.2) \quad \cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}.$$

En cualquier caso, los numeradores de las ecuaciones (4.1) y (4.2) son tan importantes que merecen su propia definición.

DEFINICIÓN 7. *Dados dos vectores $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$ en \mathbb{R}^3 se define el **producto escalar**, o también llamado **producto punto** o **producto interior** como*

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Si los vectores están en \mathbb{R}^2 , desde luego que el producto se define como

$$x_1x_2 + y_1y_2.$$

Este producto lo denotaremos indistintamente con $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$ o $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

Esta operación entre vectores es el primero de dos productos que estudiaremos en este libro y sus diversos nombres obedecen a que el producto es un escalar o porque se simboliza con un punto; un tercer nombre es usado en cursos más avanzados. El segundo producto sólo se definirá para vectores en \mathbb{R}^3 . En virtud de las ecuaciones (4.1) y (4.2) definimos lo siguiente:

DEFINICIÓN 8. *Sean \mathbf{u} y \mathbf{v} dos vectores no nulos de la misma dimensión. Definimos el ángulo entre ellos como el ángulo φ que satisface*

$$(4.3) \quad \cos\varphi = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}.$$

Quizá en este momento la definición de coseno dada así parezca artificial y antinatural. Esta definición será muy útil en cursos más avanzados, pues los conceptos de norma y de producto escalar no dependerán del número de coordenadas. ¡Hay ramas de la matemática que tratan con vectores que incluso no tienen coordenadas en el sentido que hemos manejado hasta ahora! ¿Cómo podría la función $\sqrt{x^2 + 1}$ ser un vector? ¿Qué ángulo podría formar

1. Vectores en el plano y en el espacio

con la función $\cos(\pi x)$? Además, aunque sólo trataremos con vectores en \mathbb{R}^2 o en \mathbb{R}^3 , los cálculos se realizan más rápida y sistemáticamente con esta herramienta.

EJEMPLO 10. Con $\mathbf{u} = (-2, 3, 1)$, $\mathbf{v} = (2, -7, 15)$, $\mathbf{w} = (1, -1, -1)$, $\alpha = 2$ y $\beta = -3$ calculamos

1.

$$\begin{aligned}\langle \alpha \mathbf{u}, \mathbf{v} + \beta \mathbf{w} \rangle &= \langle 2(-2, 3, 1), (2, -7, 15) - 3(1, -1, -1) \rangle \\ &= \langle (-4, 6, 2), (-1, -4, 18) \rangle \\ &= 4 - 24 + 36 \\ &= 16.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \alpha \beta \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle &= 2 \langle (-2, 3, 1), (2, -7, 15) \rangle - 6 \langle (-2, 3, 1), (1, -1, -1) \rangle \\ &= 2(-4 - 21 + 15) - 6(-2 - 3 - 1) \\ &= 16.\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle &= \langle (-2, 3, 1) - (2, -7, 15), (1, -1, -1) \rangle \\ &= \langle (-4, 10, -14), (1, -1, -1) \rangle \\ &= -4 - 10 + 14 = 0.\end{aligned}$$

En la Figura 16 se muestra la posición de los vectores

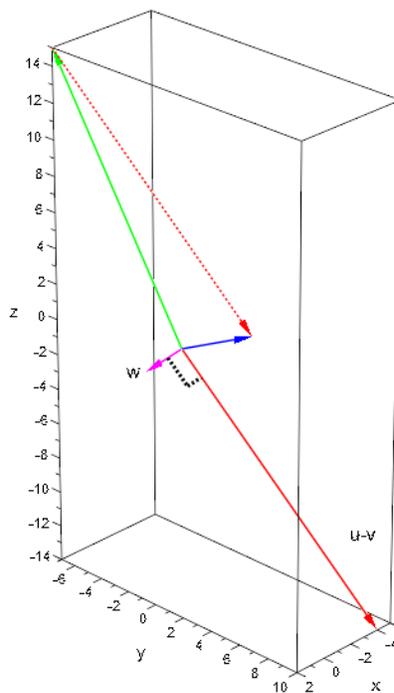


Figura 16

EJEMPLO 11. Dados $\mathbf{u} = (5, -1)$, $\mathbf{v} = (2, 3)$, $\mathbf{w} = (-2, -2)$, $\hat{\mathbf{i}} = (1, 0)$, $\hat{\mathbf{j}} = (0, 1)$, $\alpha = 5$ y $\beta = 4$, calculamos

1. $\langle \alpha \mathbf{u}, \beta \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle (25, -5), (6, 10) \rangle = 100$.
2. $\langle \mathbf{u}, \hat{\mathbf{i}} \rangle = 5$, $\langle \mathbf{u}, \hat{\mathbf{j}} \rangle = -1$, $\langle \mathbf{w}, \hat{\mathbf{i}} \rangle = -2$ y $\langle \mathbf{w}, \hat{\mathbf{j}} \rangle = -2$.

EJEMPLO 12. Con los vectores \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} del ejemplo 10 y la Definición 8 encontramos que el ángulo entre \mathbf{u} y \mathbf{v} , que para evitar confusión lo denotamos por $\varphi_{\mathbf{u}, \mathbf{v}}$, es tal que

$$\begin{aligned} \cos \varphi_{\mathbf{u}, \mathbf{v}} &= \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \\ &= \frac{-10}{\sqrt{14} \sqrt{278}} = -0,1603. \end{aligned}$$

Entonces $\varphi_{\mathbf{u}, \mathbf{v}} = \cos^{-1}(-0,1603) = 1.7318$ o 99.225° . Además notamos que $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ y \mathbf{w} son ortogonales.

Tenemos que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ posee las siguientes propiedades:

TEOREMA 3. Sean \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} de la misma dimensión y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$; el producto escalar es conmutativo.
2. $\langle \mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$; el producto escalar se distribuye en la suma.
3. $\langle \alpha \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.
4. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2$

DEMOSTRACIÓN. Nuevamente la prueba de estas propiedades es sencilla rutina algebraica. Exhibiremos sólo la tercera de ellas.

$$\begin{aligned} \langle \alpha \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= \langle (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle \\ &= \alpha x_1 x_2 + \alpha y_1 y_2 + \alpha z_1 z_2 \\ &= \alpha (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) \\ &= \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle. \end{aligned}$$

□

Es obvio que también se cumple

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle, \\ \langle \mathbf{u}, \alpha \mathbf{v} \rangle &= \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle, \\ \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} &= \|\mathbf{u}\|. \end{aligned}$$

Veamos ahora algunas consecuencias de la Definición 8. Primero recordemos que

$$(4.5) \quad \cos 0 = 1, \cos \frac{\pi}{2} = 0, \cos \pi = -1.$$

y tengamos presente la siguiente

OBSERVACIÓN 6. Al determinar el ángulo entre dos vectores, existe la ambigüedad de cuál ángulo considerar. Convendremos siempre en tomar el menor de los dos; con ello, siempre tendremos que $0 < \alpha < \pi$. De trigonometría sabemos que si $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, entonces $0 < \cos \alpha < 1$ y $-1 < \cos \alpha < 0$ siempre que $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Además $0 \leq \sin \alpha \leq 1$ siempre que $0 \leq \alpha \leq \pi$.

PROPOSICIÓN 1. *Dos vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} de la misma dimensión:*

1. *forman un ángulo de 0 radianes si y sólo si $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$;*
2. *forman un ángulo recto, o bien se dice que son perpendiculares u ortogonales si y sólo si $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$;*
3. *forman un ángulo de π radianes (suele llamarse ángulo llano) si y sólo si $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$;*
4. *forman un ángulo agudo, es decir, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ si y sólo si $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle > 0$;*
5. *forman un ángulo obtuso, es decir, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ si y sólo si $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle < 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Las tres primeras son inmediatas en virtud de las ecuaciones (4.5). Las otras dos son consecuencia de los valores de coseno para distintos ángulos y de la Observación 6. \square

Que dos vectores conformen un ángulo de 0 o π radianes se puede expresar también en términos de múltiplos escalares. Ya hemos visto ejemplos donde dos vectores, con uno de ellos múltiplo escalar del otro o bien forman un ángulo nulo o bien uno llano. Esto lo planteamos en el siguiente resultado y la prueba es una muestra de cómo el álgebra permite estudiar la situación sin representación gráfica. Otro beneficio del estudio algebraico de la geometría es que algunos conceptos se pueden generalizar a dimensiones superiores, pero eso corresponde a cursos más avanzados.

TEOREMA 4. *Dos vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} de la misma dimensión satisfacen que uno es múltiplo escalar del otro si y sólo si*

$$(4.6) \quad |\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| .$$

DEMOSTRACIÓN. La ecuación (4.6) es equivalente a $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \pm \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$ donde el signo corresponde a $\alpha > 0$ o $\alpha < 0$. La prueba la haremos para vectores en \mathbb{R}^3 y el estudiante deberá notar que el caso bidimensional es más simple.

Por ser la parte más sencilla primero probaremos el sólo si: supongamos que existe un α tal que $\alpha \mathbf{u} = \mathbf{v}$. Si $\alpha = 0$, entonces $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ y (4.6) es inmediata. Ahora bien, para el caso $\alpha \neq 0$, aplicando las ecuaciones (4.4) y la propiedad 2 de la norma de vectores en el Teorema 2

$$\begin{aligned} |\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| &= |\langle \mathbf{u}, \alpha \mathbf{u} \rangle| \\ &= |\alpha| |\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle| \\ &= |\alpha| \|\mathbf{u}\|^2 \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| &= \|\mathbf{u}\| \|\alpha \mathbf{u}\| \\ &= |\alpha| \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{u}\| \\ &= |\alpha| \|\mathbf{u}\|^2 \end{aligned}$$

Y en efecto, $\alpha \mathbf{u} = \mathbf{v}$ sólo si $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$.

Procedamos ahora a probar que $\alpha \mathbf{u} = \mathbf{v}$ si $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$. El álgebra es muy sencilla pero vale la pena mencionar que consideraremos casos y subcasos. Supongamos pues que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$. El primer caso es cuando uno de ellos es el vector $\mathbf{0}$, digamos \mathbf{v} , tenemos

que asignando $\alpha = 0$, $\alpha \mathbf{u} = \mathbf{v}$. Ahora el segundo caso es cuando ambos son no nulos. Entonces

$$\begin{aligned} |\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| &\iff \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \\ &\iff (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)^2 = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2). \end{aligned}$$

Desarrollemos los miembros de la última ecuación: el primero es

$$\begin{aligned} (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)^2 &= (x_1x_2)^2 + (y_1y_2)^2 + (z_1z_2)^2 \\ &\quad + 2(x_1x_2y_1y_2 + x_1x_2z_1z_2 + y_1y_2z_1z_2), \end{aligned}$$

y en el segundo desarrollamos y reagrupamos términos

$$\begin{aligned} (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) &= x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + z_1^2z_2^2 + \\ &\quad x_1^2y_2^2 + x_1^2z_2^2 + \\ &\quad y_1^2x_2^2 + y_1^2z_2^2 + \\ &\quad z_1^2x_2^2 + z_1^2y_2^2 \\ &= x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + z_1^2z_2^2 + \\ &\quad (x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2) + \\ &\quad (x_1^2z_2^2 + z_1^2x_2^2) + \\ &\quad (y_1^2z_2^2 + z_1^2y_2^2). \end{aligned}$$

Igualando las últimas expresiones de ambos desarrollos y eliminando $(x_1x_2)^2 + (y_1y_2)^2 + (z_1z_2)^2$, obtenemos

$$2(x_1x_2y_1y_2 + x_1x_2z_1z_2 + y_1y_2z_1z_2) = (x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2) + (x_1^2z_2^2 + z_1^2x_2^2) + (y_1^2z_2^2 + z_1^2y_2^2)$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{aligned} (4.7) \quad 0 &= (x_1^2y_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + y_1^2x_2^2) + \\ &\quad (x_1^2z_2^2 - 2x_1x_2z_1z_2 + z_1^2x_2^2) + \\ &\quad (y_1^2z_2^2 - 2y_1y_2z_1z_2 + z_1^2y_2^2) \\ &= (x_1y_2 - y_1x_2)^2 + (x_1z_2 - z_1x_2)^2 + (y_1z_2 - z_1y_2)^2. \end{aligned}$$

Luego, la suma de tres reales elevados al cuadrado suman cero si y sólo si cada real es cero, por lo que resulta que

$$\begin{aligned} (4.8) \quad 0 &= x_1y_2 - y_1x_2, \\ 0 &= x_1z_2 - z_1x_2, \\ 0 &= y_1z_2 - z_1y_2. \end{aligned}$$

Así pues

$$\begin{aligned} (4.9) \quad x_1y_2 &= y_1x_2, \\ x_1z_2 &= z_1x_2, \\ y_1z_2 &= z_1y_2. \end{aligned}$$

Comencemos con los subcasos. Recordemos que ambos vectores son no nulos y que queremos hacer ver que hay un $\alpha \in \mathbb{R}$ que satisface que $\alpha x_1 = x_2$, $\alpha y_1 = y_2$ y $\alpha z_1 = z_2$.

Subcaso $x_1 = 0$: Si $x_1 = 0$, entonces por las ecuaciones (4.9) $0 = y_1x_2 = z_1x_2$ y forzosamente una de las coordenadas y_1 o z_1 es distinta de cero; cualquiera de ellas nos da $x_2 = 0$. Cuando sólo una de y_1 o z_1 es cero, digamos $y_1 = 0$, aseguramos que $z_1 \neq 0$ y por ende $y_2 = 0$. En este nivel tenemos que

$$0 = x_1 = x_2 = y_1 = y_2$$

y $z_1 \neq 0$; elegimos $\alpha = \frac{z_2}{z_1}$ y debe ser $\alpha \neq 0$, ¿por qué?. Por la simetría del argumento, $z_1 = 0$ implica $y_1 \neq 0$ que a su vez implica $z_2 = 0$ y que $\alpha = \frac{y_2}{y_1} \neq 0$. Nótese que si $y_1 \neq 0$ y $z_1 \neq 0$, entonces $\alpha = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1}$ y en este caso también se verifica que $\alpha \neq 0$.

Subcaso $x_1 \neq 0$: Ahora podemos hacer

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 \frac{x_2}{x_1}, \\ z_2 &= z_1 \frac{x_2}{x_1}. \end{aligned}$$

Con estas ecuaciones, $y_1 = 0$ hace $y_2 = 0$ mientras que $y_1 \neq 0$ nos permite escribir

$$\alpha = \frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1}.$$

De manera análoga, $z_1 = 0$ implica $z_2 = 0$ y $z_1 \neq 0$, produce la ecuación

$$\alpha = \frac{x_2}{x_1} = \frac{z_2}{z_1}.$$

Y si $y_1 \neq 0$ y $z_1 \neq 0$, entonces $\alpha = \frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1}$ y en cualquier caso, $\alpha \neq 0$.

Reuniendo todo, tenemos que las ecuaciones (4.9) en cualquier caso implicaban que si una coordenada de \mathbf{u} es cero, la correspondiente coordenada de \mathbf{v} también es cero (por ello no se ven afectadas por el escalar α). Por otro lado, las coordenadas de \mathbf{u} que no son cero nos permiten elegir un $\alpha \in \mathbb{R}$ adecuado que cumple con $\alpha x_1 = x_2$, $\alpha y_1 = y_2$ y $\alpha z_1 = z_2$, es decir $\alpha \mathbf{u} = \mathbf{v}$. Con esto terminamos la prueba. \square

Con este resultado, al ser del tipo si y sólo si, optamos por dar las siguientes definiciones.

DEFINICIÓN 9. Sean \mathbf{u} y \mathbf{v} vectores de la misma dimensión.

1. Se dice que son paralelos si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha \mathbf{u} = \mathbf{v}$.
2. Se dice que son perpendiculares u ortogonales si $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

OBSERVACIÓN 7. Como para todo \mathbf{u} el vector $\mathbf{0}$ satisface que $\mathbf{0} = 0\mathbf{u}$ y $\langle \mathbf{u}, \mathbf{0} \rangle = 0$, el vector $\mathbf{0}$ es paralelo y ortogonal a todo vector \mathbf{u} . Es por ello que al vector nulo no se le asigna dirección.

También vale la pena señalar que cuando \mathbf{u} y \mathbf{v} son paralelos con ambos no nulos, podemos escribir $\mathbf{u} = \beta \mathbf{v}$ donde $\beta = \alpha^{-1}$.

Es tiempo de dar el material que hace falta para la demostración de la Desigualdad del Triángulo. Lo que necesitamos es una desigualdad demasiado importante y es estudiada en diversos cursos más avanzados en diferentes contextos. Es llamada la **Desigualdad de Cauchy-Schwartz**. Ésta dice que para vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} cualesquiera

$$(4.10) \quad |\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$$

o equivalentemente

$$(4.11) \quad \frac{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \leq 1.$$

En virtud de las ecuaciones (4.1) y (4.2), esto está de acuerdo con los posibles valores de $\cos \varphi$, a saber, el intervalo de la recta real $[-1, 1]$. Ahora bien, la prueba que aquí damos en realidad puede adaptarse a cualquier dimensión, aunque los cálculos serían sencillos pero algo tediosos. Debido a que nuestro estudio trata de los vectores de dimensiones dos y tres, la prueba se hace en \mathbb{R}^3 . Antes necesitamos enlistar algunas propiedades de las desigualdades de números reales.

PROPOSICIÓN 2. Sean $a, b \in \mathbb{R}$.

1. $a < b$ implica que $a + c < b + c$,
2. $0 \leq a < b$ si y sólo si $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

La prueba se omite.

TEOREMA 5. Sean \mathbf{u} y \mathbf{v} vectores cualesquiera de la misma dimensión. Entonces

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|.$$

DEMOSTRACIÓN. De acuerdo con la parte (2) de la Proposición 2, probaremos la desigualdad equivalente

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2.$$

Ahora bien, los cálculos necesarios ya se realizaron en la prueba del Teorema 4. La ecuación (4.7) es ahora una desigualdad, a saber

$$0 \leq (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2 + (x_1 z_2 - z_1 x_2)^2 + (y_1 z_2 - z_1 y_2)^2.$$

Procediendo en sentido opuesto a la prueba y aplicando (1) de la Proposición 2, llegamos primero a que

$$2(x_1 x_2 y_1 y_2 + x_1 x_2 z_1 z_2 + y_1 y_2 z_1 z_2) \leq (x_1^2 y_2^2 + y_1^2 x_2^2) + (x_1^2 z_2^2 + z_1^2 x_2^2) + (y_1^2 z_2^2 + z_1^2 y_2^2)$$

y en seguida sumamos a ambos lados de la desigualdad $(x_1 x_2)^2 + (y_1 y_2)^2 + (z_1 z_2)^2$ (en aquella ocasión los habíamos eliminado) para obtener precisamente

$$(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)^2 \leq (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2).$$

Pero esto es equivalente lo que dice la ecuación (4.10) □

Con esta desigualdad ahora sí podemos establecer la Desigualdad del Triángulo.

DEMOSTRACIÓN. Nuevamente emplearemos las propiedades de la Proposición 2. Tenemos pues que $0 \leq \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ si y sólo si $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 \leq (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2$. Pero por las partes (1), (2) y (4) del Teorema 3 y dado que $a \leq |a|$ para todo real a ,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + 2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + 2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2 |\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2 \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &= (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2. \end{aligned}$$

□

Es un ejercicio proporcionar condiciones necesarias y suficientes para que se dé $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$. Con el material que desarrollaremos en la siguiente sección puede construirse una prueba la Desigualdad de Cauchy-Schwartz enunciada en el Teorema 5 que no dependa en lo absoluto del número de coordenadas (ver el Ejercicio 34).

5. Descomposición de vectores

Hasta ahora hemos manejado vectores con su norma arbitraria. Pero como $\|\mathbf{u}\|$ es un escalar, cuando $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ podemos hacer $\left(\frac{1}{\|\mathbf{u}\|}\right)\mathbf{u}$. Aplicando (2) de las propiedades de la norma en el Teorema 2 resulta que

$$\left\| \left(\frac{1}{\|\mathbf{u}\|} \right) \mathbf{u} \right\| = \frac{\|\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|} = 1.$$

Este hecho lo planteamos en la definición siguiente.

DEFINICIÓN 10. Para un vector $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ se define el **vector unitario** en la dirección de \mathbf{u} como el vector $\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$.

A continuación restringiremos momentáneamente nuestra atención sólo al caso bidimensional y posteriormente daremos el salto al espacio. Desde luego que un salto a dimensiones superiores a tres también es posible.

Dado $(0, 0) \neq \mathbf{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, es obvio que los vectores $(-y, x)$ y $(y, -x)$ son ortogonales a \mathbf{u} . Al primero de ellos lo denotaremos \mathbf{u}_p , y lo leeremos "u perpendicular". La razón de elegir el primero de ellos es que \mathbf{u}_p se obtiene de \mathbf{u} mediante un giro de 90° en sentido contrario al de las manecillas, es decir, giramos \mathbf{u} un ángulo recto positivo para obtener \mathbf{u}_p . Es obvio que $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}_p\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. La Figura 17 muestra un \mathbf{u} y su \mathbf{u}_p .

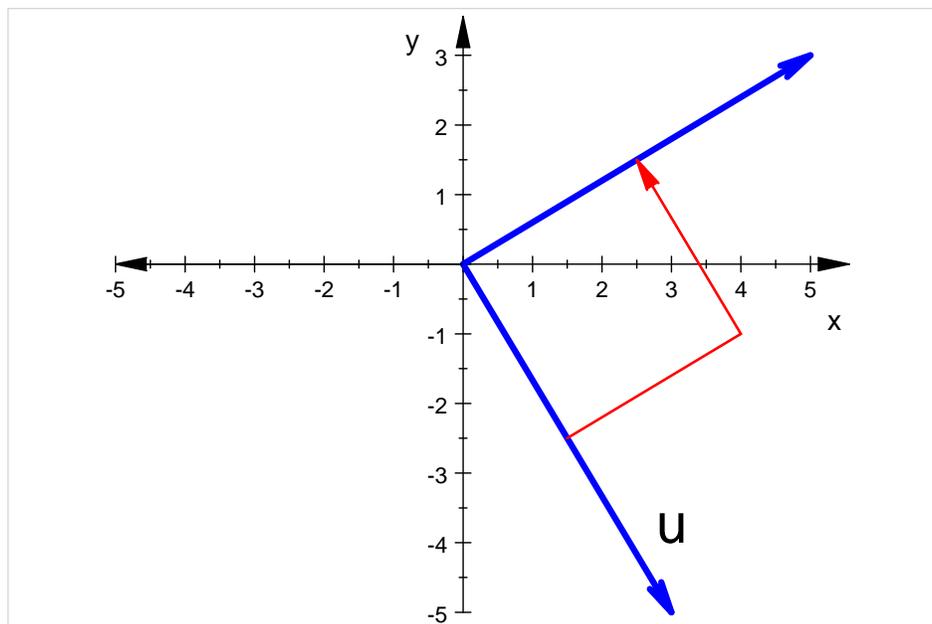


Figura 17

Asimismo, ya sabemos que si θ es el ángulo de \mathbf{u} , entonces $\mathbf{u} = (\|\mathbf{u}\| \cos \theta, \|\mathbf{u}\| \sin \theta)$, por lo que

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \hat{\mathbf{u}} &= (\cos \theta, \sin \theta), \\ \hat{\mathbf{u}}_p &= (-\sin \theta, \cos \theta). \end{aligned}$$

y así $\|\hat{\mathbf{u}}\|^2 = \|\hat{\mathbf{u}}_p\|^2 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$. Esto era de esperarse, pues al ser $\hat{\mathbf{u}}$ un vector unitario, sólo precisamos de su dirección para determinarlo. Un radiovector unitario siempre será un radio dirigido en la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. En el Ejemplo 11 presentamos los vectores $\hat{\mathbf{i}} = (1, 0)$ y $\hat{\mathbf{j}} = (0, 1)$, que serán llamados los **vectores unitarios canónicos**; éstos indican las direcciones de los ejes coordenados. Además, a partir del mismo Ejemplo 11, podemos establecer que

$$(5.2) \quad (x, y) = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}.$$

la que llamaremos la **descomposición canónica** de (x, y) . Para $\mathbf{u} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$, a x y y les llamaremos, además de coordenadas, **componentes canónicas** de \mathbf{u} .

Lo que ahora procede es descomponer cualquier vector \mathbf{v} como

$$(5.3) \quad \mathbf{v} = \alpha\hat{\mathbf{u}} + \beta\hat{\mathbf{u}}_p.$$

En ocasiones α y β serán las incógnitas y en otras lo será $\hat{\mathbf{u}}$.

Procedamos a calcular α . El proceso aplicará también para calcular β . En el caso bidimensional, la geometría es muy ilustrativa. Veamos la Figura 18

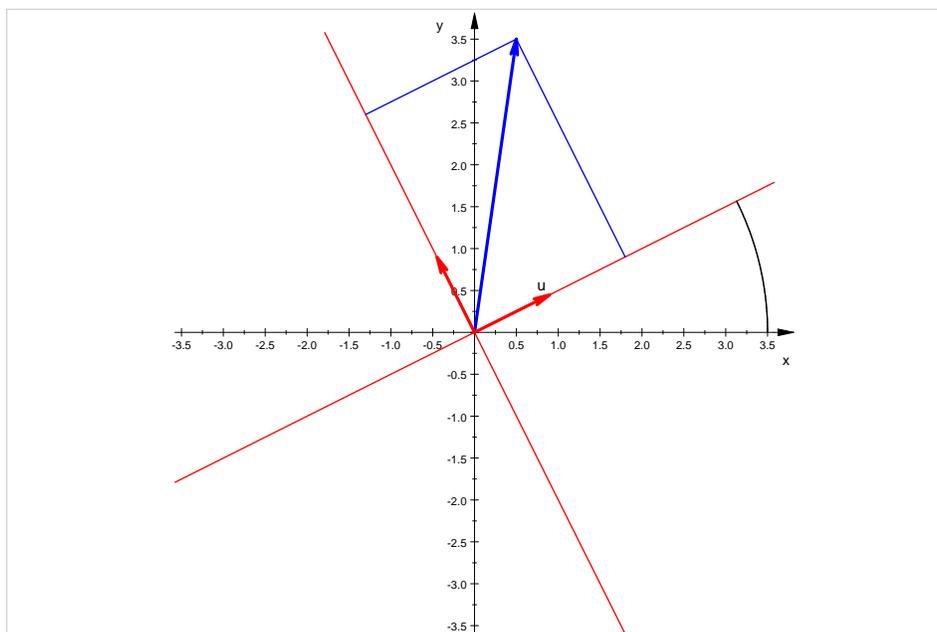


Figura 18

Realizando el producto interior $\langle \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v} \rangle$ encontramos que

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v} \rangle &= \langle \hat{\mathbf{u}}, \alpha\hat{\mathbf{u}} + \beta\hat{\mathbf{u}}_p \rangle \\ &= \alpha \langle \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}} \rangle + \beta \langle \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}_p \rangle \\ &= \alpha \|\hat{\mathbf{u}}\|^2 = \alpha \end{aligned}$$

pues $\langle \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}_p \rangle = 0$. Del mismo modo calculamos que $\beta = \langle \hat{\mathbf{u}}_p, \mathbf{v} \rangle$. Así pues, podemos escribir

$$(5.4) \quad \mathbf{v} = \langle \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v} \rangle \hat{\mathbf{u}} + \langle \hat{\mathbf{u}}_p, \mathbf{v} \rangle \hat{\mathbf{u}}_p.$$

EJEMPLO 13. Con el vector unitario $\hat{\mathbf{u}} = (\cos \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3}) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ calcule la descomposición $\alpha \hat{\mathbf{u}} + \beta \hat{\mathbf{u}}_p$ para los vectores dados. Las representaciones gráficas se muestran en la Figura 19.

1. Sea $\mathbf{v} = (\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$ (en color negro). En este caso, y en todos $\hat{\mathbf{u}}_p = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$. Calculando los escalares α y β obtenemos que

$$\begin{aligned} \alpha &= \left\langle \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2} \right) \right\rangle = \frac{1 + 7\sqrt{3}}{4}, \\ \beta &= \left\langle \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2} \right) \right\rangle = \frac{7 - \sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

Ahora los múltiplos escalares de $\hat{\mathbf{u}}$ y $\hat{\mathbf{u}}_p$ resultan ser

$$\begin{aligned} \alpha \hat{\mathbf{u}} &= \left(\frac{1 + 7\sqrt{3}}{4} \right) \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \left(\frac{1 + 7\sqrt{3}}{8}, \frac{21 + \sqrt{3}}{8} \right), \\ \beta \hat{\mathbf{u}}_p &= \left(\frac{7 - \sqrt{3}}{4} \right) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{3 - 7\sqrt{3}}{8}, \frac{7 - \sqrt{3}}{8} \right). \end{aligned}$$

2. Ahora para $\mathbf{w} = (-2, 4)$ (en color azul) tenemos que

$$\begin{aligned} \alpha &= \left\langle \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), (-2, 4) \right\rangle = -1 + 2\sqrt{3}, \\ \beta &= \left\langle \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right), (-2, 4) \right\rangle = 2 + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

por lo que descomponemos así

$$\begin{aligned} \alpha \hat{\mathbf{u}} &= (-1 + 2\sqrt{3}) \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{3}, 3 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \\ \beta \hat{\mathbf{u}}_p &= (2 + \sqrt{3}) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right) = \left(-\frac{3}{2} - \sqrt{3}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right). \end{aligned}$$

3. Continuando para $\mathbf{r} = (-4, -2)$ (en color magenta) realizando los cálculos, encontramos que

$$\begin{aligned} \alpha &= \left\langle \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), (-4, -2) \right\rangle = -(2 + \sqrt{3}), \\ \beta &= \left\langle \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right), (-4, -2) \right\rangle = -1 + 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

y la descomposición es

$$\alpha \hat{\mathbf{u}} = -(2 + \sqrt{3}) \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2} - \sqrt{3} \right),$$

$$\beta \hat{\mathbf{u}}_p = (-1 + 2\sqrt{3}) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right) = \left(-3 + \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + \sqrt{3} \right).$$

Nótese que $\mathbf{r} = \mathbf{w}_p$; entonces los escalares α y β de \mathbf{r} están, desde luego, relacionados con los de \mathbf{w} .

4. Un último ejemplo será $\mathbf{s} = (0, -5)$ (en color verde). Ahora tenemos que

$$\alpha = \left\langle \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), (0, -5) \right\rangle = -\frac{5}{2}\sqrt{3},$$

$$\beta = \left\langle \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right), (0, -5) \right\rangle = -\frac{5}{2}.$$

y por ende

$$\alpha \hat{\mathbf{u}} = -\frac{5}{2}\sqrt{3} \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \left(-\frac{5}{4}\sqrt{3}, -\frac{15}{4} \right),$$

$$\beta \hat{\mathbf{u}}_p = -\frac{5}{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{5}{4}\sqrt{3}, -\frac{5}{4} \right).$$

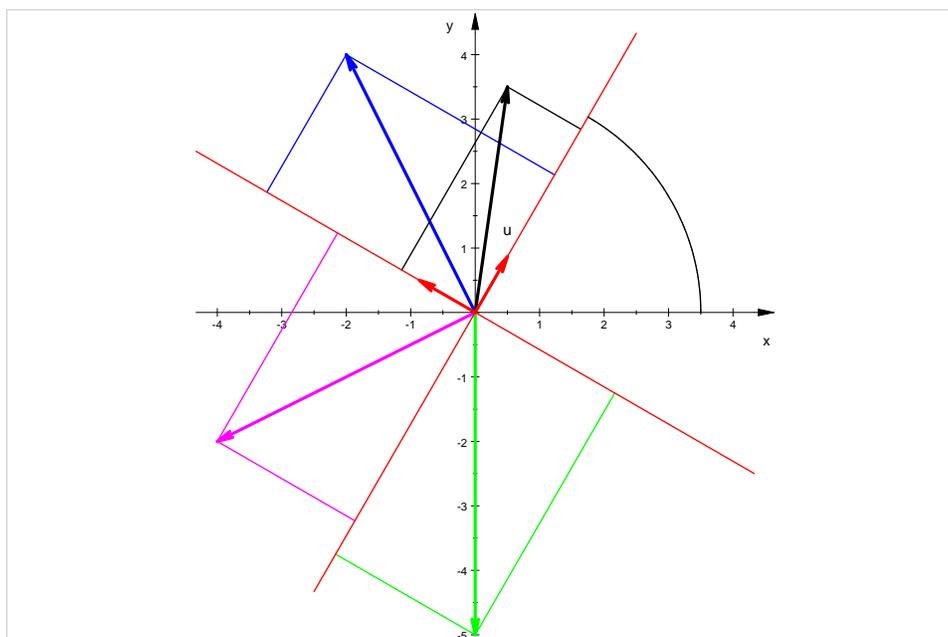


Figura 19

Cuando descomponemos \mathbf{v} como suma de dos vectores (por ahora sólo lo haremos en términos de $\hat{\mathbf{u}}$ y $\hat{\mathbf{u}}_p$) también diremos que \mathbf{v} es una **combinación lineal** de $\hat{\mathbf{u}}$ y $\hat{\mathbf{u}}_p$. Los

escalares α y β les llamaremos **componentes escalares** (o simplemente componentes) respecto a $\hat{\mathbf{u}}$ y $\hat{\mathbf{u}}_p$. A cada uno de los múltiplos escalares $\alpha\hat{\mathbf{u}}$ y $\beta\hat{\mathbf{u}}_p$ les llamaremos **componente vectorial** o **proyección ortogonal** de \mathbf{v} sobre $\hat{\mathbf{u}}$ y sobre $\hat{\mathbf{u}}_p$ respectivamente.

La proyección ortogonal de un vector \mathbf{v} sobre otro vector no se restringe a que el segundo sea unitario, basta con que no sea nulo. Denotaremos como $\mathbf{Proy}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$ a la proyección ortogonal de un vector \mathbf{v} sobre \mathbf{u} . De acuerdo con lo anterior, ahora es muy fácil obtener que

$$\mathbf{Proy}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \frac{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|}{\|\mathbf{u}\|^2} \mathbf{u}.$$

El escalar en el caso unitario es $\langle \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v} \rangle$ y éste multiplica a $\hat{\mathbf{u}}$, pero $\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$. Entonces para cualquier $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$

$$\begin{aligned} \mathbf{Proy}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} &= \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\|^2} \mathbf{u} \\ &= \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\|} \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \\ &= \left\langle \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}, \mathbf{v} \right\rangle \hat{\mathbf{u}} \\ &= \langle \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v} \rangle \hat{\mathbf{u}}. \end{aligned}$$

Entonces la proyección ortogonal de \mathbf{v} sobre \mathbf{u} es, en realidad, la componente vectorial de \mathbf{v} respecto a $\hat{\mathbf{u}}$, pero cuando el vector \mathbf{u} no es unitario no se acostumbra a llamarlo componente. Asimismo, en el caso de \mathbf{u} llamamos componente de \mathbf{v} respecto a \mathbf{u} o en la dirección de \mathbf{u} al número $\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\|}$. Este real lo denotamos como $\text{Comp}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$. De acuerdo con la Ecuación (4.3), si φ es el ángulo entre \mathbf{u} y \mathbf{v} , tenemos la fórmula

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \text{Comp}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} &= \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\|} \\ &= \cos \varphi \|\mathbf{v}\| \end{aligned}$$

EJEMPLO 14. *Calculemos proyecciones:*

1. *Dados $\mathbf{v} = (3, -1)$ y $\mathbf{u} = (2, 4)$, entonces*

$$\begin{aligned} \mathbf{Proy}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} &= \frac{\langle (2, 4), (3, -1) \rangle}{\|(2, 4)\|^2} (2, 4) \\ &= \frac{2}{20} (2, 4) \\ &= \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5} \right). \end{aligned}$$

Similarmente

$$\begin{aligned} \mathbf{Proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} &= \frac{\langle (2, 4), (3, -1) \rangle}{\|(3, -1)\|^2} (3, -1) \\ &= \frac{2}{10} (3, -1) \\ &= \left(\frac{3}{5}, -\frac{1}{5} \right). \end{aligned}$$

También tenemos que $\text{Comp}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \frac{2}{\sqrt{20}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ y $\text{Comp}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \frac{2}{\sqrt{10}}$.

2. Ahora con $\mathbf{v} = (3, -1)$ y $\mathbf{u} = (6, 2)$ tenemos que

$$\begin{aligned}\text{Proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} &= \left(\frac{24}{5}, -\frac{8}{5} \right), \\ \text{Comp}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} &= \frac{16}{\sqrt{10}}.\end{aligned}$$

Como ejercicio, las gráficas las realizará el estudiante.

6. Producto vectorial

Es un ejercicio verificar con vectores de dos coordenadas la ecuación (5.4). El estudiante notará que cualquier intento de obtener esta ecuación con dos vectores tridimensionales será infructuoso. Incluso, dado $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, no podemos determinar un \mathbf{u}_p ; la situación geométrica nos da ahora infinitos vectores no paralelos que son ortogonales a \mathbf{u} . Retomaremos esta situación más adelante.

Sin embargo, con $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$ $\mathbf{Proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ sigue dada por la misma fórmula:

$$\begin{aligned}\text{Proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} &= \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v} \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} (x_2, y_2, z_2).\end{aligned}$$

De manera similar, la ecuación (5.5) resulta ser

$$\begin{aligned}\text{Comp}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} &= \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|} \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.\end{aligned}$$

EJEMPLO 15. Con $\mathbf{u} = (-5, 3, 6)$ y $\mathbf{v} = (-1, 3, 1)$ tenemos que

$$\begin{aligned}\text{Proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} &= \frac{\langle (-5, 3, 6), (-1, 3, 1) \rangle}{(-1)^2 + 3^2 + 1^2} (-1, 3, 1) \\ &= \frac{20}{11} (-1, 3, 1) \\ &= \left(-\frac{20}{11}, \frac{60}{11}, \frac{20}{11} \right).\end{aligned}$$

La Figura 20 muestra en trazo discontinuo y color magenta $\mathbf{Proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$. La $\text{Comp}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \frac{20}{\sqrt{11}}$ es el escalar por el cual multiplicamos $\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{\sqrt{11}} (-1, 3, 1)$ para obtener $\mathbf{Proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$.

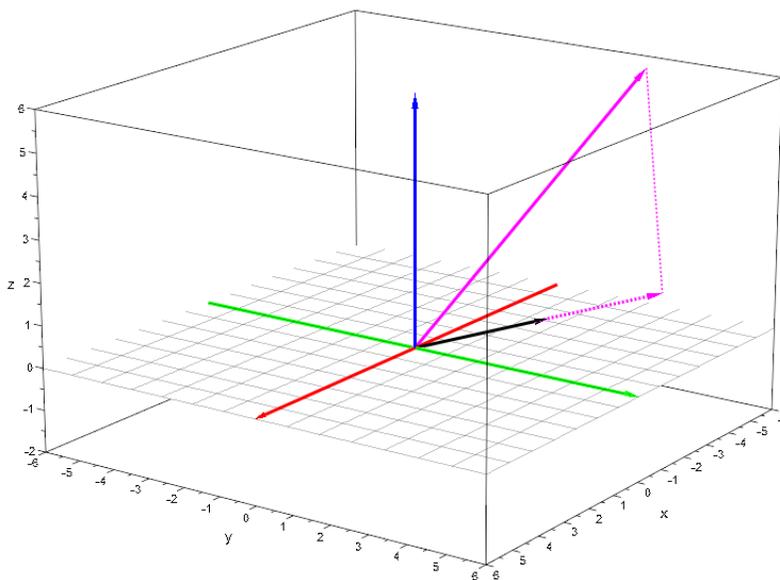


Figura 20

Las proyecciones de $\mathbf{u} = (x, y, z)$ respecto a los vectores unitarios canónicos $\hat{\mathbf{i}} = (1, 0, 0)$ y $\hat{\mathbf{j}} = (0, 1, 0)$ y de manera natural agregamos $\hat{\mathbf{k}} = (0, 0, 1)$ son precisamente los vectores $(x, 0, 0)$, $(0, y, 0)$ y $(0, 0, z)$. Además, esto permite establecer la ecuación

$$(6.1) \quad \begin{aligned} \mathbf{u} &= (x, y, z) \\ &= x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}. \end{aligned}$$

En lo que resta de este capítulo trataremos con vectores en \mathbb{R}^3 . Ahora dados $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$, ambos no nulos, buscamos un tercer vector $\mathbf{w} = (x, y, z)$ que sea ortogonal a \mathbf{u} y \mathbf{v} . Veremos que si bien hay infinitos de ellos, en realidad todos serán paralelos a uno en particular.

Deseamos pues que $\mathbf{w} = (x, y, z)$ sea ortogonal a \mathbf{u} y \mathbf{v} , lo que equivale a que se cumplan las ecuaciones

$$(6.2) \quad \begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle &= 0, \\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle &= 0, \end{aligned}$$

o lo que es lo mismo

$$(6.3) \quad \begin{aligned} x_1x + y_1y + z_1z &= 0 \quad (a), \\ x_2x + y_2y + z_2z &= 0 \quad (b), \end{aligned}$$

el cual es un *sistema de ecuaciones lineales* que consta de tres incógnitas y dos ecuaciones. Para resolverlo podemos proceder de diversas maneras. El estudio de los diferentes métodos de solución corresponde a otro curso. Por ahora procederemos de manera *intuitiva* y comenzamos eliminando la incógnita z de una de ellas. Multiplicando la ecuación (a) por $-z_2$ y la ecuación (b) por z_1 para después realizar la suma de las ecuaciones resultantes

$$\begin{aligned} -x_1z_2x - y_1z_2y - z_1z_2z &= 0 \\ z_1x_2x + z_1y_2y + z_1z_2z &= 0 \end{aligned}$$

y obtener la ecuación con sólo dos incógnitas

$$(z_1x_2 - x_1z_2)x + (z_1y_2 - y_1z_2)y = 0.$$

Es ahora una ecuación de la forma $Ax + By = 0$; una solución es $x = -B$ y $y = A$ (pero hay un número infinito de soluciones que se pueden elegir). Con esta elección obtenemos

$$\begin{aligned}x &= y_1z_2 - z_1y_2, \\y &= z_1x_2 - x_1z_2.\end{aligned}$$

Para calcular el valor de z sustituimos estos valores en cualquiera de las ecuaciones (6.3), digamos en (a), y realizando álgebra necesaria obtenemos

$$x_1(y_1z_2 - z_1y_2) + y_1(z_1x_2 - x_1z_2) + z_1z = 0,$$

simplificando

$$-x_1y_2z_1 + y_1x_2z_1 + z_1z = 0$$

y resolviendo para z tenemos que con $z_1 \neq 0$ (si fuese $z_1 = 0$, deberemos eliminar x o y , según sea $x_1 \neq 0$ o $y_1 \neq 0$; alguna de ellas debe ocurrir, pues $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$)

$$z = x_1y_2 - y_1x_2.$$

Resumiendo, con dos vectores $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$ hemos obtenido un tercer vector

$$\mathbf{w} = (y_1z_2 - z_1y_2, z_1x_2 - x_1z_2, x_1y_2 - y_1x_2)$$

que es ortogonal tanto a \mathbf{u} como a \mathbf{v} . Damos esto como la definición siguiente

DEFINICIÓN 11. Sean los vectores $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$ en \mathbb{R}^3 . Definimos el **producto vectorial** o **producto cruz** de \mathbf{u} y \mathbf{v} como

$$(6.4) \quad (y_1z_2 - z_1y_2, z_1x_2 - x_1z_2, x_1y_2 - y_1x_2)$$

y lo denotamos con $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

Estos nombres para este producto sólo obedecen a que ahora el resultado es un vector, a diferencia del producto escalar, o bien por su notación con una cruz.

Antes de enunciar las propiedades de esta nueva construcción, veamos un ejemplo con los mismos vectores del Ejemplo 15.

EJEMPLO 16. Con $\mathbf{u} = (-5, 3, 6)$ y $\mathbf{v} = (-1, 3, 1)$ tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= ((3)(1) - (6)(3), (6)(-1) - (-5)(1), (-5)(3) - (3)(-1)) \\ &= (-15, -1, -12).\end{aligned}$$

Ver la Figura 21. Con estos mismos datos tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \times \mathbf{u} &= (15, 1, 12) \\ &= -(\mathbf{u} \times \mathbf{v}).\end{aligned}$$

Esto no es una casualidad, ¡el producto cruz no es conmutativo!

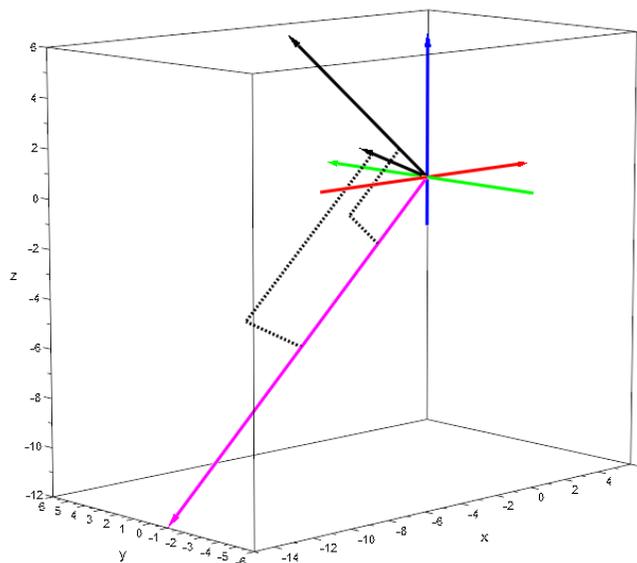


Figura 21

Una regla mnemotécnica sugerida para calcular $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es colocar las coordenadas en dos filas

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix},$$

por ejemplo, la fórmula para z dada en la expresión (6.4) surge del **determinante** 2×2 encerrado entre barras. Éste se calcula precisamente con tal fórmula:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - y_1 x_2.$$

Es útil recalcar que en esta expresión no aparecen precisamente z_1 ni z_2 ; de modo análogo en las fórmulas para x y y de la expresión (6.4) no aparecen las respectivas coordenadas, con la salvedad de que para y la resta está invertida. Entonces una forma alternativa para calcular $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es, de acuerdo con la ecuación (6.1)

$$(6.5) \quad \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \hat{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \hat{\mathbf{k}}$$

o bien

$$(6.6) \quad \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right).$$

Geoméricamente, una vez que ya vimos que $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ no es conmutativo, éste sí obedece a lo que llamamos orientación positiva: el dedo índice señalará a \mathbf{u} , el dedo medio a \mathbf{v} y el pulgar a $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Las propiedades nos harán ver que con la mano izquierda obtendremos la orientación para $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$.

TEOREMA 6. Sean $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$ y $\mathbf{w} = (x_3, y_3, z_3) \in \mathbb{R}^3$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces

1. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$; el producto cruz es cerrado.
2. $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

3. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$; *el producto cruz goza de anticonmutatividad.*
4. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$; *distributividad ante la suma.*
5. $\mathbf{u} \times (\alpha \mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\alpha \mathbf{u}) \times \mathbf{v}$; *asociatividad respecto a la multiplicación por escalares.*
6. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ *si y sólo si \mathbf{u} y \mathbf{v} son paralelos.*

DEMOSTRACIÓN. Las pruebas de (1) a (5) son mera rutina algebraica y se dejan al estudiante. Además es obvio que también $\mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$. Probemos (6).

Si \mathbf{u} y \mathbf{v} son paralelos, de acuerdo con la Definición 9 y la Observación 7, existe un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{u} = \alpha \mathbf{v}$. Aplicando las fórmulas de la expresión (6.6) obtenemos, por ejemplo, la primera coordenada de $\mathbf{u} \times \alpha \mathbf{u}$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ \alpha y_1 & \alpha z_1 \end{vmatrix} \\ &= \alpha(y_1 z_1 - z_1 y_1) \\ &= 0; \end{aligned}$$

del mismo modo verificamos que la segunda y tercer coordenada de $\mathbf{u} \times \alpha \mathbf{u}$ son cero (compare esto con las ecuaciones (4.8)). Tales ecuaciones se obtuvieron en la prueba del Teorema 4 a partir de suponer que $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$.

Recíprocamente, supongamos que $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Si uno es el vector nulo, desde luego que son paralelos. En el caso de que ambos sean no nulos, igualando la expresión (6.4) al vector $(0, 0, 0)$, nos produce las ecuaciones (4.8), que a su vez, después de casos y subcasos, nos permiten deducir que \mathbf{u} y \mathbf{v} son paralelos. \square

OBSERVACIÓN 8. *Podemos reunir el Teorema 4 con (6) del Teorema 6 como sigue: sean \mathbf{u} y $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Las tres afirmaciones*

1. \mathbf{u} y \mathbf{v} son paralelos,
2. $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$,
3. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$

son equivalentes.

Por lo anterior no es de sorprender que las ecuaciones (4.8) aparezcan en ambas demostraciones. Más aún, la Desigualdad de Cauchy-Schwartz dada en el Teorema 5, cuando \mathbf{u} y \mathbf{v} no son paralelos, se convierte en desigualdad estricta, esto es, $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| < \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$, o en su forma equivalente, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 < \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2$. En esta última expresión falta del lado izquierdo un término positivo para lograr la igualdad. Término que está relacionado con $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$.

El término $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2$ ya apareció en las ecuaciones (4.7) durante la prueba del Teorema 4; las reescribimos nuevamente pero como desigualdad

$$(6.7) \quad 0 \leq (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2 + (x_1 z_2 - z_1 x_2)^2 + (y_1 z_2 - z_1 y_2)^2.$$

Nótese que si $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (x_3, y_3, z_3)$, entonces esta desigualdad es precisamente

$$0 \leq \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = z_3^2 + (-y_3)^2 + x_3^2$$

y además será positivo si y sólo si \mathbf{u} y \mathbf{v} no son paralelos.

TEOREMA 7. *Sean \mathbf{u} y $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Entonces*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 + \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2.$$

DEMOSTRACIÓN. Para la prueba el proceso algebraico es similar al del Teorema 4: desarrollando los cuadrados en (6.7) obtenemos

$$(6.8) \quad \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = (x_1^2 y_2^2 + y_1^2 x_2^2) + (x_1^2 z_2^2 + z_1^2 x_2^2) + (y_1^2 z_2^2 + z_1^2 y_2^2) - 2(x_1 x_2 y_1 y_2 + x_1 x_2 z_1 z_2 + y_1 y_2 z_1 z_2)$$

y también

$$(6.9) \quad \begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 &= (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)^2 \\ &= x_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 + z_1^2 z_2^2 + \\ &\quad 2(x_1 x_2 y_1 y_2 + x_1 x_2 z_1 z_2 + y_1 y_2 z_1 z_2). \end{aligned}$$

Ahora bien

$$(6.10) \quad \begin{aligned} \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 &= (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) \\ &= x_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 + z_1^2 z_2^2 + \\ &\quad (x_1^2 y_2^2 + y_1^2 x_2^2) + (x_1^2 z_2^2 + z_1^2 x_2^2) + (y_1^2 z_2^2 + y_2^2 z_1^2). \end{aligned}$$

Para finalizar, observemos que si sumamos los lados correspondientes de las ecuaciones (6.8) y (6.9) el resultado es precisamente la ecuación (6.10). \square

COROLARIO 1. Sean \mathbf{u} y $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ y φ el ángulo entre ellos. Entonces

$$(6.11) \quad \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \varphi.$$

DEMOSTRACIÓN. De acuerdo con la identidad trigonométrica $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \cos^2 \varphi \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 (1 - \cos^2 \varphi) \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \sin^2 \varphi. \end{aligned}$$

Eliminando los cuadrados y de acuerdo con la Observación 6, $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \varphi$. \square

La interpretación geométrica de $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$ se muestra en la Figura 22, donde \mathbf{u} y \mathbf{v} forman un ángulo φ y ellos junto con sus traslaciones paralelas conforman un paralelogramo cuya área es sabido viene dada por el producto de la base por la altura.

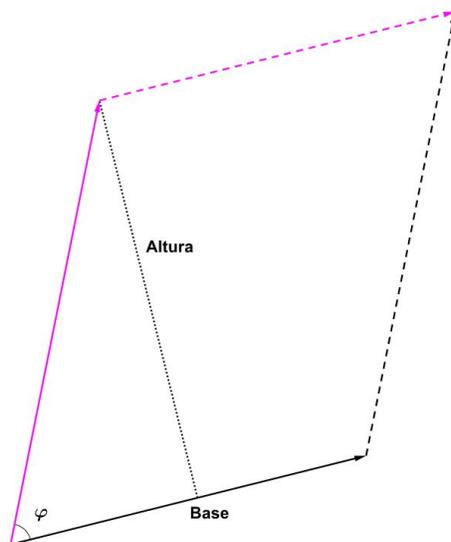


Figura 22

La base es la norma de uno de los vectores, digamos en este caso, $\|\mathbf{u}\|$. Si la altura es el segmento de recta perpendicular al vector \mathbf{u} con extremos en \mathbf{v} y en $\mathbf{Proy}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$, la altura es el cateto opuesto a φ de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es la norma de \mathbf{v} . Luego, de trigonometría, la altura está dada por $\|\mathbf{v}\| \sin \varphi$.

EJEMPLO 17. Se dan los vectores $\mathbf{u} = (2, a, 1)$ y $\mathbf{v} = (1, b, 2)$ y satisfacen que $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (3, -3, -1)$. Procedamos a calcular los valores de a y b . Realizando el producto cruz

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \hat{\mathbf{i}} \begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{vmatrix} - \hat{\mathbf{j}} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \hat{\mathbf{k}} \begin{vmatrix} 2 & a \\ 1 & b \end{vmatrix} \\ &= (2a - b, -3, 2b - a) \\ &= (3, -3, -1). \end{aligned}$$

Resolver esta ecuación entre vectores nos conduce a un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

$$\begin{aligned} 2a - b &= 3 \\ -a + 2b &= -1 \end{aligned}$$

cuya solución es $a = \frac{5}{3}$ y $b = \frac{1}{3}$. Los vectores $\mathbf{u} = (2, a, 1)$ y $\mathbf{v} = (1, b, 2)$ son los lados no paralelos de un paralelogramo con un vértice en el origen ubicado en el espacio tridimensional. De acuerdo con la discusión anterior, se tiene que dicho paralelogramo tiene un área igual a $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \sqrt{19}$.

Supongamos que \mathbf{u}, \mathbf{v} y $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ con cada uno de ellos no paralelo a cualquiera de los otros dos. Entonces estos tres vectores determinan un *paralelepípedo*, una especie de caja inclinada. La Figura 23 muestra uno de ellos.

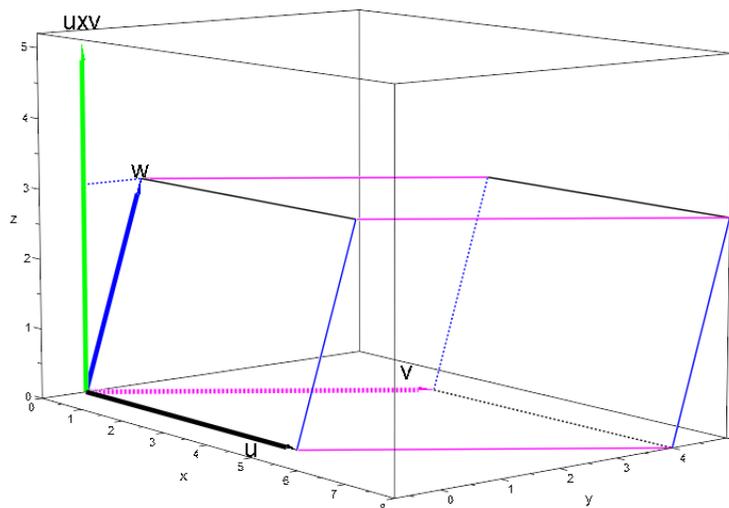


Figura 23

El volumen del cuerpo geométrico es el producto del área de la base y la altura. Si los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} conforman la base, sabemos que el área del paralelogramo determinado por ellos es $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$. Ahora bien, la altura es la norma de la proyección ortogonal de \mathbf{w} sobre $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, es decir, el valor absoluto de $\text{Comp}_{\mathbf{u} \times \mathbf{v}} \mathbf{w}$. En la Figura 23 se presenta el caso $\text{Comp}_{\mathbf{u} \times \mathbf{v}} \mathbf{w} > 0$. De acuerdo con la ecuación (5.5) tenemos que $\text{Comp}_{\mathbf{u} \times \mathbf{v}} \mathbf{w} = \frac{\langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \times \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|}$; multiplicando por el área de la base, obtenemos que el volumen es

$$(6.12) \quad \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \times \mathbf{v} \rangle .$$

Si fuese el caso de que $\text{Comp}_{\mathbf{u} \times \mathbf{v}} \mathbf{w} < 0$, el volumen sería $-\langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \times \mathbf{v} \rangle = |\langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \times \mathbf{v} \rangle|$, pero ello es cuestión de índole geométrica; algebraicamente no importará el signo del número. Este número es el llamado Triple Producto Escalar de \mathbf{w} , \mathbf{u} y \mathbf{v} . El orden en que se enlistan los tres vectores de este producto es importante, el Triple Producto Escalar de \mathbf{w} , \mathbf{v} y \mathbf{u} sería ahora $\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \times \mathbf{u} \rangle = -\langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \times \mathbf{v} \rangle$. Una notación que se usa con frecuencia es $[\mathbf{w}\mathbf{u}\mathbf{v}]$. Entonces, de acuerdo con la fórmula del producto cruz dada en (6.4) tenemos que

$$[\mathbf{w}\mathbf{u}\mathbf{v}] = x_3 (y_1 z_2 - z_1 y_2) - y_3 (x_1 z_2 - z_1 x_2) + z_3 (x_1 y_2 - y_1 x_2) .$$

Pero atendiendo a la fórmula dada en (6.5) o en (6.6)

$$[\mathbf{w}\mathbf{u}\mathbf{v}] = x_3 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_3 \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} .$$

Esto da origen al *determinante* 3×3 .

Luego, para $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$ y $\mathbf{w} = (x_3, y_3, z_3) \in \mathbb{R}^3$ se define y denota el determinante 3×3 como

$$(6.13) \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_3 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_3 \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} .$$

No obstante no estudiaremos la teoría de los determinantes en este libro, es muy pertinente hacer comentarios sobre los determinantes 2×2 y 3×3 , pues aparecerán con mucha frecuencia.

Det 2×2 : Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas se escribe

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}$$

y se encuentra que la solución a este sistema es única si y sólo si

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0.$$

Ver Ejercicio 42.

Det 3×3 : En la ecuación (6.13) los factores que multiplican a los determinantes 2×2 son las coordenadas del primer vector en $[\mathbf{wuv}]$ y la tercer fila en el arreglo rectangular de números llamado **matriz** (en este caso el número de filas es igual al número de columnas, por lo que se le llama matriz cuadrada). Es un ejercicio mostrar que

$$(6.14) \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Ver Ejercicio 44

Regla de Sarrus: Es una regla mnemotécnica para calcular el lado derecho de la ecuación (6.14): escriba la primera y segunda columna a la derecha de la tercera teniendo así cinco columnas. Realice los productos en las diagonales; los que van de izquierda a derecha se suman y los que van de derecha a izquierda se restan. En la Figura 24 se muestra un esquema de este método.

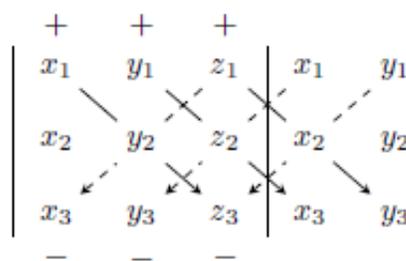


Figura 24

Es muy importante tener presente que la regla de Sarrus sólo funciona para determinantes 3×3 .

Para finalizar este capítulo comentamos que algunas aplicaciones de $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ y $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ se dan en Física. Por ejemplo, en Mecánica, $W = \langle \mathbf{F}, \mathbf{r} \rangle$ es el trabajo realizado por la fuerza \mathbf{F} aplicada a un objeto que sufre un desplazamiento \mathbf{r} . Para modelar los conceptos que precisan de la tercera dimensión como la *torca o torque* $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ donde \mathbf{r} es el vector de posición donde se aplica la fuerza \mathbf{F} . En Electromagnetismo, $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ es la fuerza sobre la carga q que se mueve con velocidad \mathbf{v} producida por el campo magnético \mathbf{B} .

7. Ejercicios

EJERCICIO 1. Determine para qué valores de x la ecuación es válida. Si no existe solución, explique el porqué

$$\begin{array}{ll}
 a) (x + 3, 5) = (-1, 9 + x), & b) (x - 4, 2) = (3, x - 5), \\
 c) (2x - 7, x + 2) = (-5, 3), & d) (x - 2, 2x + 1) = (-1, 3), \\
 e) (x^2 - 2x, x^2 - x) = (3, 6), & f) (x^2 + 2x, x^2 + 3x) = (-1, -1), \\
 g) (3x + 2, 2x - 3) = (8, 1), & h) (x - 2, -2x + 4) = (1, 1), \\
 i) (x + 2, x - 2, 1) = (4, 0, 3x - 5), & j) (1, -3, 1) = (x + 5, x + 3, x + 1), \\
 k) (x^2 + 2x, x^2 - 4x) = (0, -4), & l) (1, -x + 2) = (3x - 5, 0).
 \end{array}$$

EJERCICIO 2. Muestre que el punto $M = \left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$ equidista de los puntos $S = (a, b)$ y $F = (c, d)$, es decir, $d(S, M) = d(M, F)$.

EJERCICIO 3. Calcule los puntos finales F_1 , F_2 y F_3 del vector \mathbf{v} que comience en $S_1 = (3, 2)$, $S_2 = (-6, -5)$ y $S_3 = (-3, 7)$ si

$$\begin{array}{lll}
 a)\mathbf{v} = (4, -1), & b)\mathbf{v} = (3, -4), & c)\mathbf{v} = (-5, -9), \\
 d)\mathbf{v} = (0, 4), & e)\mathbf{v} = (4, -1), & f)\mathbf{v} = (-3, -4).
 \end{array}$$

EJERCICIO 4. Calcule los puntos finales F_1 y F_2 del vector \mathbf{v} que comience en $S_1 = (-1, 2, 2)$ y $S_2 = (-1, 3, 4)$ si

$$\begin{array}{lll}
 a)\mathbf{v} = (0, 4, -1), & b)\mathbf{v} = (3, -4, 1), & c)\mathbf{v} = (5, -9, 1), \\
 d)\mathbf{v} = (-2, 1, 3), & e)\mathbf{v} = (2, 4, -1), & f)\mathbf{v} = (-3, -4, 1).
 \end{array}$$

EJERCICIO 5. Calcule el par ordenado (x, y) tal que el vector que comienza en $S = (x, y)$ y termina en $F = (7, 3)$ es el radiovector $\mathbf{v} = (x, y)$. Generalice este ejercicio si $F = (a, b)$.

EJERCICIO 6. Con $\mathbf{u} = (-1, 4)$, $\mathbf{v} = (3, 2)$, $\mathbf{w} = (-4, -1)$, $\alpha = 2$ y $\beta = -3$ calcule

$$\begin{array}{lll}
 a)\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} - 2\alpha\mathbf{w}, & b)\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{w}, & c)\beta\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}, \\
 d)\beta\mathbf{u} - \alpha\mathbf{v}, & e)\alpha\mathbf{u} - \beta\mathbf{w}, & f)\alpha\mathbf{v} + \alpha\beta\mathbf{w}.
 \end{array}$$

EJERCICIO 7. Con $\mathbf{u} = (1, 3, 1)$, $\mathbf{v} = (3, -2, 3)$, $\mathbf{w} = (-1, 2, -5)$, $\alpha = -2$ y $\beta = 4$ calcule

$$\begin{array}{lll}
 a)\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} - 2\alpha\mathbf{w}, & b)\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{w}, & c)\beta\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}, \\
 d)\beta\mathbf{u} - \alpha\mathbf{v}, & e)\alpha\mathbf{u} - \beta\mathbf{w}, & f)\alpha\mathbf{v} + \alpha\beta\mathbf{w}.
 \end{array}$$

EJERCICIO 8. Calcule $\|\mathbf{r}\|$ donde \mathbf{r} es el vector resultante de cada uno de los incisos del Ejercicio 6.

EJERCICIO 9. Calcule el ángulo del vector \mathbf{r} resultante de cada uno de los incisos del Ejercicio 6.

EJERCICIO 10. Calcule $\|\mathbf{r}\|$ donde \mathbf{r} es el vector resultante de cada uno de los incisos del Ejercicio 7.

EJERCICIO 11. Calcule los cosenos y ángulos directores del vector \mathbf{r} resultante de cada uno de los incisos del Ejercicio 7.

EJERCICIO 12. Determine los vectores unitarios $\hat{\mathbf{r}}$ de los vectores resultantes de cada uno de los incisos de los Ejercicios 6 y 7.

EJERCICIO 13. Para un vector \mathbf{v} se dan dos cosenos directores y su norma. Encuentre el vector o decida si no lo hay.

1. $\cos \alpha = \frac{1}{2}, \cos \gamma = -\frac{1}{2}, \|\mathbf{v}\| = \sqrt{8}$.
2. $\cos \alpha = \frac{4}{7}, \cos \beta = \frac{6}{7}, \|\mathbf{v}\| = 2$.
3. $\cos \beta = \frac{3}{\sqrt{22}}, \cos \gamma = \frac{2}{\sqrt{11}}, \|\mathbf{v}\| = \sqrt{22}$.
4. $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \cos \beta = \frac{2}{5}, \|\mathbf{v}\| = 10$.

EJERCICIO 14. Calcule $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ si

- | | |
|--|--|
| a) $\mathbf{u} = (\frac{1}{2}, 3), \mathbf{v} = (-2, 1),$ | b) $\mathbf{u} = (4, -2, 1), \mathbf{v} = (2, 3, -1),$ |
| c) $\mathbf{u} = (\sqrt{8}, 2), \mathbf{v} = (\sqrt{2}, -2),$ | d) $\mathbf{u} = (2, -5), \mathbf{v} = (\frac{3}{2}, \frac{3}{5}),$ |
| e) $\mathbf{u} = (\sqrt{3}, -\sqrt{27}, 5), \mathbf{v} = (\sqrt{12}, \sqrt{3}, -5),$ | f) $\mathbf{u} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), \mathbf{v} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}),$ |
| g) $\mathbf{u} = (-3, 2), \mathbf{v} = (9, -6),$ | h) $\mathbf{u} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -1), \mathbf{v} = (1, 4, 3),$ |
| i) $\mathbf{u} = (\sqrt{12}, -\sqrt{3}), \mathbf{v} = (6, -3),$ | j) $\mathbf{u} = (\sqrt{3}, -\sqrt{6}), \mathbf{v} = (2, \sqrt{2}).$ |

EJERCICIO 15. Calcule el ángulo entre \mathbf{u} y \mathbf{v} para cada par de vectores del Ejercicio 14.

EJERCICIO 16. Dé un contraejemplo que muestre que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$ no implica que $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ ni que $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

EJERCICIO 17. Demuestre que si \mathbf{u} es paralelo a \mathbf{v} y \mathbf{v} es paralelo a \mathbf{w} , entonces \mathbf{u} es paralelo a \mathbf{w} .

EJERCICIO 18. Sean \mathbf{u}, \mathbf{v} y $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ tales que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ y $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$ con $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Demuestre que \mathbf{u} es paralelo a \mathbf{w} . Proporcione vectores \mathbf{u}, \mathbf{v} y $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ para los cuales esto es falso.

EJERCICIO 19. Sean \mathbf{u}, \mathbf{v} y $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ o \mathbb{R}^3 tales que \mathbf{u} y \mathbf{v} son paralelos. Muestre que el ángulo entre \mathbf{u} y \mathbf{w} o es igual al ángulo entre \mathbf{v} y \mathbf{w} o al ángulo suplementario del mismo.

EJERCICIO 20. Demuestre que $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

EJERCICIO 21. Demuestre que $|\|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\|| \leq \|\mathbf{u} \pm \mathbf{v}\|$.

EJERCICIO 22. Demuestre que $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2$. Enseguida obtenga la fórmula para $\langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle$ y demuéstrela.

EJERCICIO 23. Demuestre que $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2$.

EJERCICIO 24. Demuestre que $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ si y sólo si son paralelos.

EJERCICIO 25. Demuestre que son equivalentes las afirmaciones

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$.
2. $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$. Diagonales de un rectángulo.
3. $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$. Teorema de Pitágoras.

EJERCICIO 26. Demuestre el Teorema de Tales: En una semicircunferencia su diámetro es un segmento de recta con extremos S_1 y S_2 . Sea F un punto cualquiera en la semicircunferencia distinto de los extremos del diámetro. Se tienen los vectores \mathbf{u}_1 y \mathbf{u}_2 con puntos iniciales en S_1 y S_2 respectivamente y ambos con punto final en F . Demuestre que estos vectores \mathbf{u}_1 y \mathbf{u}_2 son ortogonales.

EJERCICIO 27. Calcule $\text{Proy}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$ y $\text{Proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ para cada par de vectores del Ejercicio 14.

EJERCICIO 28. Descomponga \mathbf{v} donde

$$\begin{aligned} a)\mathbf{v} &= (1, 2), & b)\mathbf{v} &= (-3, -4), & c)\mathbf{v} &= (1, 0), \\ d)\mathbf{v} &= \left(-2, \frac{3}{2}\right), & e)\mathbf{v} &= (1, 1), & f)\mathbf{v} &= (0, 1), \end{aligned}$$

como combinación lineal de $\hat{\mathbf{u}}$ y $\hat{\mathbf{u}}_p$ y de \mathbf{t} y \mathbf{t}_p si

1. $\hat{\mathbf{u}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\mathbf{t} = (3, 4)$,
2. $\hat{\mathbf{u}} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ y $\mathbf{t} = (\sqrt{3}, 1)$.

EJERCICIO 29. Calcule el vector $\hat{\mathbf{u}}$ que satisface las siguientes ecuaciones

1. $(-5, 10) = 5\hat{\mathbf{u}} + 10\hat{\mathbf{u}}_p$,
2. $(0, \sqrt{20}) = 4\hat{\mathbf{u}} + 2\hat{\mathbf{u}}_p$,
3. $(-\sqrt{2}, \sqrt{50}) = 4\hat{\mathbf{u}} + 6\hat{\mathbf{u}}_p$,
4. $(-31, 27) = 13\hat{\mathbf{u}} + 39\hat{\mathbf{u}}_p$.

EJERCICIO 30. Demuestre que si $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$, $(\mathbf{u}_p)_p = -\mathbf{u}$.

EJERCICIO 31. Sean \mathbf{u} y $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Demuestre que $(\alpha\mathbf{u} + \mathbf{v})_p = \alpha(\mathbf{u}_p) + \mathbf{v}_p$.

EJERCICIO 32. Escribiendo $\hat{\mathbf{u}} = (c, s)$ y $\mathbf{v} = (x, y)$, demuestre la ecuación

$$\mathbf{v} = \langle \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v} \rangle \hat{\mathbf{u}} + \langle \hat{\mathbf{u}}_p, \mathbf{v} \rangle \hat{\mathbf{u}}_p.$$

EJERCICIO 33. Suponga que $\mathbf{v} = \alpha\hat{\mathbf{u}} + \beta\hat{\mathbf{u}}_p$. Demuestre que

$$\mathbf{v}_p = -\beta\hat{\mathbf{u}} + \alpha\hat{\mathbf{u}}_p.$$

EJERCICIO 34. Si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, la Desigualdad de Cauchy-Schwartz es trivial. Con la Proyección Ortogonal $\mathbf{Proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v}$, calcule

$$\left\| \mathbf{u} - \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v} \right\|^2$$

y aplíquela para deducir la Desigualdad de Cauchy-Schwartz. Esto da una prueba que no depende ni de las coordenadas ni de la dimensión, sólo del producto interior.

EJERCICIO 35. Dados \mathbf{u} , \mathbf{v} y $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ calcule $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$, $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w})$, $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$, $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ y $(2\mathbf{u}) \times (-3\mathbf{v})$.

1. $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (3, 0, -1)$, $\mathbf{w} = (1, 1, 1)$,
2. $\mathbf{u} = (0, -2, 4)$, $\mathbf{v} = (0, 1, -2)$, $\mathbf{w} = (4, -2, 2)$,
3. $\mathbf{u} = (-1, 3, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 0, -1)$, $\mathbf{w} = (1, -1, 1)$,
4. $\mathbf{u} = (-1, -2, 3)$, $\mathbf{v} = (2, -6, 0)$, $\mathbf{w} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -1\right)$,
5. $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{i}}$, $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{j}}$, $\mathbf{w} = \hat{\mathbf{k}}$.

EJERCICIO 36. Establezca las identidades

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} &= \hat{\mathbf{k}}, & \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} &= \hat{\mathbf{i}}, & \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} &= \hat{\mathbf{j}}, \\ \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} &= -\hat{\mathbf{k}}, & \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} &= -\hat{\mathbf{i}}, & \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} &= -\hat{\mathbf{j}}. \end{aligned}$$

EJERCICIO 37. Sean \mathbf{u} y $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ y φ el ángulo entre ellos. Suponga que φ no es ángulo recto. Demuestre que

$$\tan \varphi = \frac{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}.$$

EJERCICIO 38. Sean \mathbf{u}, \mathbf{v} y $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Demuestre que

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \mathbf{v} - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{w}.$$

Enseguida establezca la ecuación análoga para $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ y pruébela.

EJERCICIO 39. Sean \mathbf{u}, \mathbf{v} y $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Demuestre que

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) + \mathbf{w} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{0}.$$

EJERCICIO 40. Sean $\mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Demuestre que

$$\begin{aligned} (\mathbf{t} \times \mathbf{u}) \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= \langle \mathbf{t} \times \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \mathbf{v} - \langle \mathbf{t} \times \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{w} \\ &= \langle \mathbf{v} \times \mathbf{w}, \mathbf{t} \rangle \mathbf{u} - \langle \mathbf{v} \times \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle \mathbf{t}. \end{aligned}$$

EJERCICIO 41. Sean \mathbf{u}, \mathbf{v} y $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Suponga que \mathbf{u} es ortogonal a \mathbf{v} y \mathbf{w} . Demuestre que \mathbf{u} es paralelo a $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$.

EJERCICIO 42. Demuestre que la solución del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}$$

está dada por

$$x = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \quad y = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

siempre que $a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \neq 0$.

EJERCICIO 43. Con la notación del Ejercicio 42, sean $\mathbf{a}_1 = (a_{11}, a_{12})$ y $\mathbf{a}_2 = (a_{21}, a_{22}) \in \mathbb{R}^2$. Pruebe que \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_2 son paralelos si y sólo si $a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = 0$. Interprete esto de manera geométrica.

EJERCICIO 44. Las matrices suelen denotarse con mayúsculas. Si A es una matriz de m filas y n columnas se dice que A es una matriz de orden $m \times n$ (se lee "m por n"). Si $m = n$, se dice que A es una matriz cuadrada. Para $n = 3$, escribimos

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Demuestre que las siguientes fórmulas dan el mismo resultado:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Cualquiera de ellas da el determinante de A , denotado por $\det A$.

EJERCICIO 45. Con el Ejercicio 44 demuestre que si $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$ y $\mathbf{w} = (x_3, y_3, z_3) \in \mathbb{R}^3$, entonces

$$[\mathbf{wuv}] = [\mathbf{uvw}] = [\mathbf{vwu}].$$

EJERCICIO 46. Pruebe la llamada *Identidad de Lagrange*: Sean \mathbf{t} , \mathbf{u} , \mathbf{v} y $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}\langle (\mathbf{t} \times \mathbf{u}), (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \rangle &= \begin{vmatrix} \langle \mathbf{t}, \mathbf{v} \rangle & \langle \mathbf{t}, \mathbf{w} \rangle \\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle & \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \end{vmatrix} \\ &= \langle \mathbf{t}, \mathbf{v} \rangle \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle - \langle \mathbf{t}, \mathbf{w} \rangle \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle .\end{aligned}$$

Ayuda: use el Ejercicio 38 y que el Ejercicio 45 nos permite escribir

$$[\mathbf{uvw}] = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \times \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \times \mathbf{u} \rangle .$$

EJERCICIO 47. Con los datos del Ejercicio 35 calcule $[\mathbf{uvw}]$, es decir, los volúmenes de los paralelepípedos determinados por \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} .

CAPÍTULO 2

Rectas en el plano

Un punto es lo que no tiene partes. Una línea es longitud sin anchura. Una línea recta es una línea que se encuentra de manera uniforme con los puntos sobre sí misma. Así comienza el Libro I de *Los Elementos* de Euclides. El famoso **Quinto Postulado de Euclides** dice lo siguiente:

V: que, si una recta incidente sobre dos rectas hace dos ángulos internos del mismo lado que suman menos que dos ángulos rectos, entonces si prolongamos esas rectas hasta el infinito, coincidirán en un mismo punto del mismo lado que los dos ángulos que suman menos que dos ángulos rectos.

Las tres definiciones que aquí citamos pretenden mostrar lo difícil que es dar una definición precisa de lo que entendemos por punto, línea y línea recta. Actualmente estos conceptos son lo que se denominan *objetos indefinidos*.

David Hilbert, en *The Foundations of Geometry*, propone 5 grupos de axiomas, totalizando 20 de ellos. Los dos primeros axiomas del primer grupo dicen:

(I) *Dos puntos P_1 y P_2 determinan completamente una recta. Escribimos $P_1P_2 = \mathcal{L}$ o $P_2P_1 = \mathcal{L}$. En vez de "determinan", podemos emplear otras expresiones; por ejemplo, \mathcal{L} une P_1 con P_2 , \mathcal{L} une P_1 y P_2 . Si P_1 está en \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 , usamos la expresión \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 tienen el punto P_1 en común.*

(II) *Dos puntos distintos cualesquiera de una recta la determinan completamente; esto es, si $P_1P_2 = \mathcal{L}$ y $P_1P_3 = \mathcal{L}$ y además $P_2 \neq P_3$, entonces $P_2P_3 = \mathcal{L}$.*

Tres axiomas más de este primer grupo, llamado *axiomas de conexión* se refieren a los planos.

Hilbert establece también el quinto postulado de Euclides como sigue: en un plano, dado un punto P que no pertenece a la recta \mathcal{L} , hay una y sólo una recta \mathcal{M} que contiene a P y que no contiene puntos de \mathcal{L} . A la recta \mathcal{M} se le llama recta paralela a \mathcal{L} que pasa por P .

1. Ecuaciones de la recta en el plano cartesiano

En un contexto vectorial pensemos ahora en los tres puntos

$$P_1 = (-40, -40), \quad P_2 = (0, 32), \quad P_3 = (-15, 5).$$

Considerando los puntos P_1 y P_2 , ellos determinan la recta $P_1P_2 = \mathcal{L}$ con ecuación $9x - 5y = -160$ y podemos ver que las coordenadas de P_3 satisfacen esta ecuación. De acuerdo con el segundo axioma de conexión, $P_2P_3 = \mathcal{L}$.

Los vectores $\mathbf{v} = P_2 - P_1 = (40, 72)$ y $\mathbf{v}_1 = P_2 - P_3 = (15, 27)$ son paralelos ya que $\mathbf{v} = \frac{8}{3}\mathbf{v}_1$, o lo que es lo mismo $\mathbf{v}_1 = \frac{3}{8}\mathbf{v}$; ambos vectores tienen un ángulo θ tal que $\tan \theta = \frac{9}{5}$.

Realizando cálculos sencillos con el vector \mathbf{v} notamos que

$$\begin{aligned} P_2 &= P_1 + \mathbf{v} \\ &= (-40, -40) + (40, 72), \end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned} P_3 &= P_1 + \frac{5}{8}\mathbf{v} \\ &= (-40, -40) + \frac{5}{8}(25, 35). \end{aligned}$$

En vez de multiplicar el vector \mathbf{v} por un escalar específico, hagámoslo con un escalar t que llamaremos **parámetro** para obtener un punto P de la siguiente manera

$$\begin{aligned} P &= P_1 + t\mathbf{v} \\ &= (-40, -40) + t(40, 72) \\ &= (-40 + 40t, -40 + 72t). \end{aligned}$$

Entonces $P = (x, y)$ es un punto cuyas coordenadas satisfacen las ecuaciones

$$\begin{aligned} x &= -40 + 40t \\ y &= -40 + 72t \end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación de \mathcal{L} encontramos que

$$\begin{aligned} 9x - 5y &= 9(-40 + 40t) - 5(-40 + 72t) \\ &= -360 + 360t + 200 - 360t \\ &= -160. \end{aligned}$$

Entonces, para cualquier valor del parámetro t , el punto $P(-40 + 40t, -40 + 72t)$ está en \mathcal{L} .

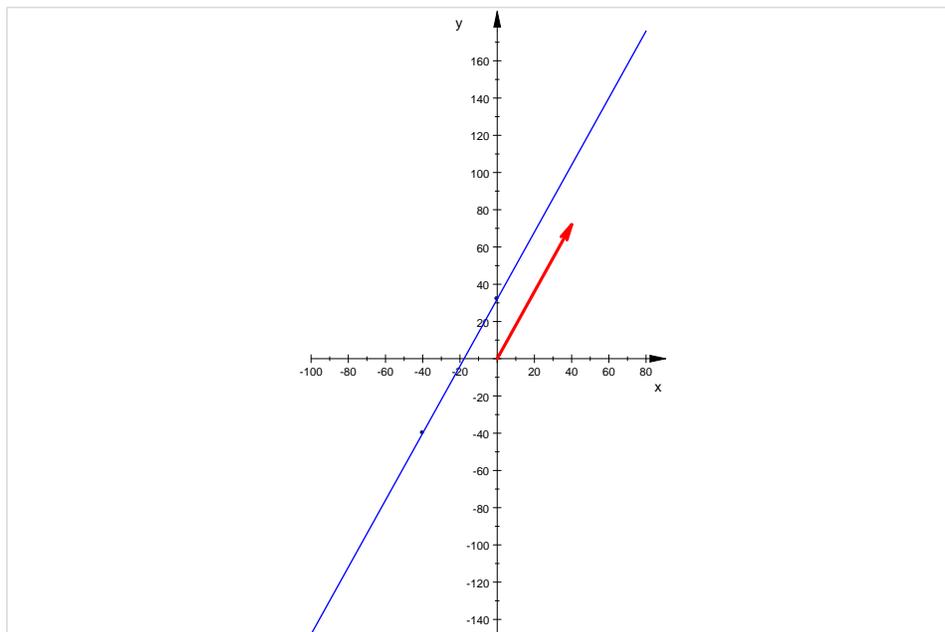


Figura 25

Bien, ahora generalicemos estas ideas. De acuerdo con el quinto postulado de Euclides en la versión de Hilbert, podemos aceptar que una recta \mathcal{L} también estará completamente determinada por un punto P_0 en ella y un vector paralelo $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$. Dicho vector lo llamaremos **vector de dirección**. La recta que pasa por P_0 y tiene la dirección de \mathbf{v} es el

conjunto de puntos P tales que existe un real t que satisface

$$(1.1) \quad P = P_0 + t\mathbf{v}.$$

A esta ecuación le llamaremos **ecuación vectorial** de \mathcal{L} . En notación de conjuntos escribimos

$$\mathcal{L} = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid \exists t \in \mathbb{R} : P = P_0 + t\mathbf{v}\}.$$

OBSERVACIÓN 9. *A partir de este momento la distinción entre punto y vector comienza a desvanecerse. En realidad trataremos a ambos conceptos como pares ordenados de números reales. Las operaciones entre pares ordenados (o ternas ordenadas según sea el caso) no dependen de lo que ellos estén representando o modelando. Por ello adoptaremos la notación donde $P = (x, y)$ denota un punto si y sólo si $\mathbf{p} = (x, y)$ es el radiovector correspondiente.*

Ahora bien, dada una recta \mathcal{L} que pasa por $P_0 = (x_0, y_0)$ tiene vector de dirección $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, un punto $P = (x, y) \in \mathcal{L}$ si y sólo si para algún real t se cumplen las ecuaciones

$$(1.2) \quad \begin{aligned} x &= x_0 + tv_1 \\ y &= y_0 + tv_2 \end{aligned}$$

las cuales se denominan **ecuaciones paramétricas** de \mathcal{L} . Entonces, en términos de vectores y de acuerdo con la Observación 9 un radiovector \mathbf{p} tendrá su punto final sobre \mathcal{L} si y sólo si es la suma vectorial de \mathbf{p}_0 y un múltiplo escalar de \mathbf{v} (ver la Figura 26).

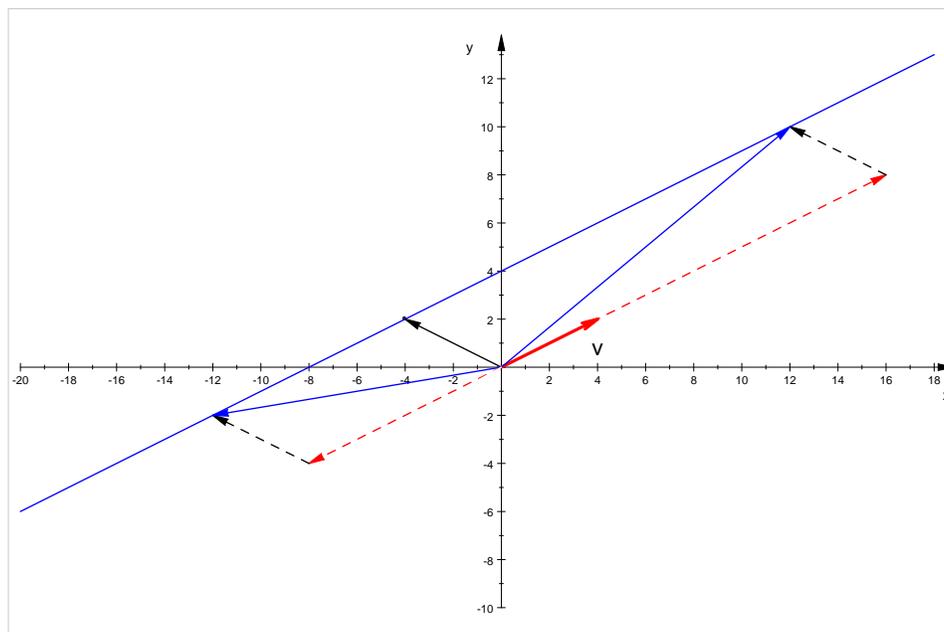


Figura 26

EJEMPLO 18. *En la Figura 26 se da el punto $P_0 = (-4, 2)$ y el vector de dirección $\mathbf{v} = (4, 2)$. La recta que pasa por P_0 y es paralela a \mathbf{v} tiene ecuación vectorial $(-4, 2) + t(4, 2)$. las ecuaciones paramétricas son*

$$\begin{aligned} x &= -4 + 4t \\ y &= 2 + 2t. \end{aligned}$$

En ambas ecuaciones podemos despejar el parámetro t e igualar las expresiones

$$\frac{x + 4}{4} = \frac{y - 2}{2}$$

y así obtener

$$2x + 8 = 4y - 8$$

o lo que es lo mismo

$$x - 2y + 8 = 0.$$

Retomando las ecuaciones (1.2), despejando el parámetro t e igualando las expresiones obtenemos las llamadas **ecuaciones simétricas**

$$(1.3) \quad \frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2}$$

con tal que \mathbf{v} no sea paralelo a los ejes coordenados. Realizando un poco de álgebra básica, reescribimos esta ecuación como

$$(1.4) \quad -v_2x + v_1y - (-v_2x_0 + v_1y_0) = 0$$

o como

$$-v_2x + v_1y = -v_2x_0 + v_1y_0$$

Expresamos finalmente esta ecuación de la forma

$$(1.5) \quad Ax + By + C = 0$$

donde $A = -v_2$, $B = v_1$ y $C = -(-v_2x_0 + v_1y_0)$. La ecuación (1.5) se denomina **ecuación cartesiana** de la recta. Escribiremos $\mathcal{L} : Ax + By + C = 0$ para referirnos a que $Ax + By + C = 0$ es una ecuación cartesiana de \mathcal{L} .

EJEMPLO 19. *Sustituyendo $t = \frac{7}{2}$ en las ecuaciones paramétricas que resultaron en el Ejemplo 18, nos resulta $P'_0 = (-4, 2) + \frac{7}{2}(4, 2) = (-4 + 14, 2 + 7) = (10, 9) \in \mathcal{L}$, asimismo hacemos $\mathbf{v}' = -\frac{1}{2}\mathbf{v} = (-2, -1)$ y con ello obtenemos la ecuación paramétrica $P'_0 + t\mathbf{v}' = (10, 9) + t(-2, -1)$, lo que conduce a las ecuaciones paramétricas $x = 10 - 2t$ y $y = 9 - t$. Nuevamente despejando el parámetro e igualando las expresiones tenemos que $\frac{x-10}{-2} = -(y-9)$; simplificando las ecuaciones simétricas*

$$\frac{10 - x}{2} = 9 - y$$

o bien $x - 2y + 8 = 0$. Entonces, distintos puntos en \mathcal{L} y distintos vectores de dirección, pero paralelos, nos dan diferentes ecuaciones vectoriales, simétricas y cartesianas; $\frac{1}{2}x - y + 4 = 0$ es otra ecuación cartesiana de la misma recta.

La utilidad de tener diferentes ecuaciones, primordialmente las vectoriales y paramétricas surgen en las aplicaciones de la geometría de vectores. Pensemos en distintas partículas que se mueven todas ellas sobre la recta $x - 2y + 8 = 0$ pero cada una lo hace partiendo de distintos puntos al instante $t = 0$ y con diferentes velocidades.

EJEMPLO 20. *Tres partículas M_1 , M_2 y M_3 se mueven sobre la recta de ecuación cartesiana $x - 2y + 8 = 0$ de acuerdo con las siguientes imposiciones:*

M_1 : comienza su movimiento en $(0, 4)$ y al instante $t = 1$ se encuentra en el punto $(4, 6)$;

2. Rectas en el plano

M_2 : al instante $t = 0$ se encuentra en el punto $(14, 11)$ y por cada unidad de tiempo se desplaza un vector $(-2, -1)$;

M_3 : cuando $t = 0$ se ubica en el punto $(-20, -6)$ y por cada unidad de tiempo se desplaza un vector $(8, 4)$.

Cada una de estas tres partículas se desplaza siempre sobre la recta $x - 2y + 8 = 0$ pero definitivamente lo hacen de manera diferente. Incluso la partícula M_2 se mueve en sentido opuesto a las otras dos.

EJEMPLO 21. Con los datos del Ejemplo 20, supongamos que el tiempo comienza a correr simultáneamente para las partículas M_1 y M_3 . Pensando en la recta como una pista y que ambas partículas se mueven en el mismo sentido, podemos considerar que M_1 comienza adelante de M_3 . ¿En qué instante estará M_3 en el punto de partida de M_1 ? ¿Existe un instante en que M_3 logra alcanzar a M_1 ? De ser así, ¿en qué punto se da el encuentro?

Solución. Responder la primer cuestión es encontrar un t_1 que satisfaga

$$(-20, -6) + t_1(8, 4) = (0, 4)$$

o $-20 + 8t_1 = 0$ y $-6 + 4t_1 = 4$. Es inmediato que $t_1 = \frac{5}{2}$ es el instante buscado.

Como la partícula M_1 comienza en $(0, 4)$ y cuando $t = 1$ se encuentra en $(4, 6)$, se mueve con velocidad $\mathbf{v}_1 = (4, 2)$. Para la segunda pregunta se debe encontrar un t_2 que satisfaga

$$(-20, -6) + t_2(8, 4) = (0, 4) + t_2(4, 2).$$

o bien

$$\begin{aligned}(-20, -6) - (0, 4) &= (-20, -10) \\ &= t_2[(4, 2) - (8, 4)] \\ &= t_2(-4, -2)\end{aligned}$$

y así tenemos que $t_2 = 5$. El punto donde coinciden las partículas es $(20, 14)$. La gráfica con los puntos en los instantes $t = 1, 2, 3, 4$ y 5 se dejan al estudiante.

EJEMPLO 22. Sea \mathcal{L} la recta que pasa por $P_1 = (-4, 5)$ y $P_2 = (3, -1)$. Un vector de dirección para \mathcal{L} es $\mathbf{v} = \pm(P_1 - P_2)$. Tomemos $\mathbf{v} = P_1 - P_2 = (-7, 6)$. Para calcular una ecuación vectorial podemos elegir cualquiera de los dos puntos, digamos P_1 . Así pues, recordando que no es única, una ecuación vectorial de \mathcal{L} es

$$\begin{aligned}P &= P_1 + t\mathbf{v} \\ &= (-4, 5) + t(-7, 6),\end{aligned}$$

las ecuaciones paramétricas son

$$\begin{aligned}x &= -4 - 7t \\ y &= 5 + 6t\end{aligned}$$

y las ecuaciones simétricas son $-\frac{x+4}{7} = \frac{y-5}{6}$, que dan lugar a una ecuación cartesiana de \mathcal{L}

$$6x + 7y - 11 = 0.$$

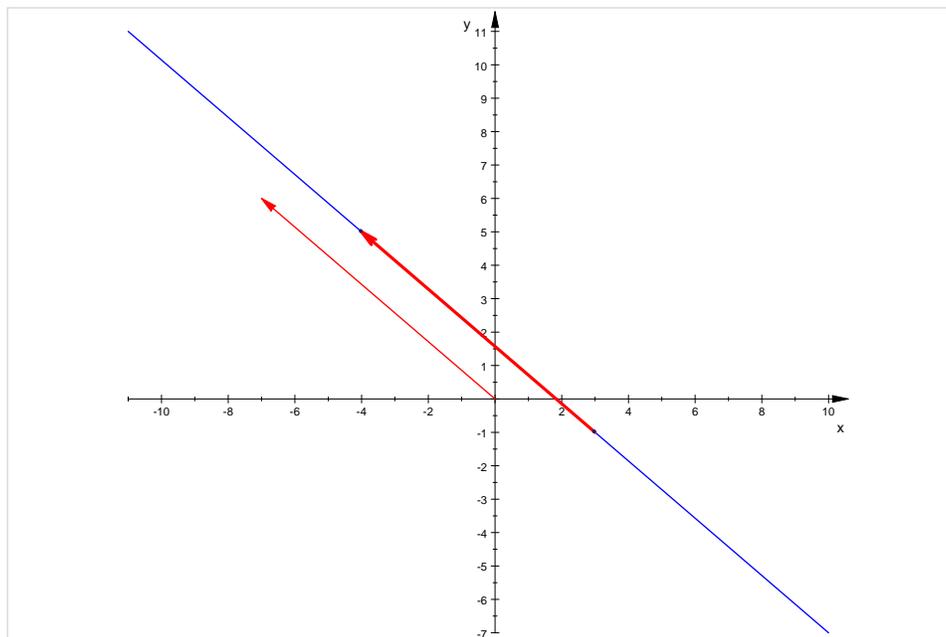


Figura 27

Hasta ahora se nos han dado los elementos que determinan una recta \mathcal{L} y con ellos hemos calculado diferentes ecuaciones para dicha recta. Si se proporciona la ecuación cartesiana, para decidir si $P = (x, y) \in \mathcal{L}$ se sustituyen las coordenadas de P en la ecuación y diremos que $P = (x, y) \in \mathcal{L}$ si y sólo si ésta se verifica. Si lo que conocemos es la ecuación vectorial, sin necesidad de calcular la ecuación cartesiana podemos decidir si $P = (x, y) \in \mathcal{L}$. La ecuación sería de la forma $P = P_0 + t\mathbf{v}$, entonces un punto $P \in \mathcal{L}$ si y sólo si existe un $t \in \mathbb{R}$ tal que $P - P_0 = t\mathbf{v}$, es decir, si y sólo si $P - P_0$ y \mathbf{v} son paralelos.

EJEMPLO 23. Sea $\mathcal{L} = (-4, 5) + t(-7, 6)$. Entonces con $P_0 = (-4, 5)$, para los puntos $P_1 = (-5, 9)$ y $P_2 = (10, -7)$ tenemos que $P_1 - P_0 = (1, 4)$ no es paralelo a $\mathbf{v} = (-7, 6)$ mientras que $P_2 - P_0 = (14, -12) = -2\mathbf{v}$. Así que $P_1 \notin \mathcal{L}$ y $P_2 \in \mathcal{L}$.

Al deducir las ecuaciones simétricas dadas en la ecuación (1.3) se pidió que $v_1 \neq 0$ y $v_2 \neq 0$. Cuando esto no ocurre, por ejemplo si $\mathbf{v} = (0, v_2)$ con $v_2 \neq 0$, entonces la ecuación vectorial de una recta paralela a \mathbf{v} que pasa por $P_0 = (x_0, y_0)$ es $(x_0, y_0) + t(0, v_2)$ y sus ecuaciones simétricas resultan ser $x = x_0$ y $y = y_0 + tv_2$. Como y puede tomar todos los valores reales mientras que x permanece constante, una recta paralela al eje Y tiene por ecuación cartesiana $x = x_0$. De manera similar cuando $\mathbf{v} = (v_1, 0)$ con $v_1 \neq 0$, la ecuación cartesiana de una recta paralela al eje X es $y = y_0$.

También en el proceso de obtener las ecuaciones simétricas obtuvimos la ecuación (1.4). La retomamos

$$-v_2x + v_1y - (-v_2x_0 + v_1y_0) = 0.$$

Con $P = (x, y)$ hacemos notar que la podemos expresar como

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{v}_p \rangle - \langle \mathbf{p}_0, \mathbf{v}_p \rangle = 0$$

o equivalentemente

$$\langle \mathbf{p} - \mathbf{p}_0, \mathbf{v}_p \rangle = 0.$$

2. Rectas en el plano

En particular, si \mathcal{L} pasa por P_1 y P_2 tenemos que $P \in \mathcal{L}$ si y sólo si

$$\langle \mathbf{p} - \mathbf{p}_1, (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)_p \rangle = 0.$$

En esta situación dado un vector de dirección \mathbf{v} para \mathcal{L} , el vector \mathbf{v}_p lo llamaremos **vector normal** de la recta \mathcal{L} y lo denotaremos \mathbf{n} . Además, en vez de escribir $\mathbf{n} = (-v_2, v_1)$, escribiremos $\mathbf{n} = (A, B)$ como cuando obtuvimos la ecuación (1.5). Tenemos pues que una recta \mathcal{L} queda determinada por un $P_0 \in \mathcal{L}$ y un vector normal $\mathbf{n} = (A, B)$ como el conjunto de puntos

$$\mathcal{L} = \{P \in \mathbb{R}^2 : \langle \mathbf{p} - \mathbf{p}_0, \mathbf{n} \rangle = 0\}.$$

De manera equivalente, $P \in \mathcal{L}$ si y sólo si $\langle \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{p}_0, \mathbf{n} \rangle$. Obsérvese que en la ecuación cartesiana (1.5), $C = -\langle \mathbf{p}_0, \mathbf{n} \rangle$.

EJEMPLO 24. Una recta \mathcal{L} tiene por vector normal $\mathbf{n} = (-2, 3)$ y pasa por el punto $P_0 = (3, 1)$. Entonces $\langle \mathbf{p}_0, \mathbf{n} \rangle = \langle (3, 1), (-2, 3) \rangle = -3$ y se observa de inmediato que una ecuación cartesiana es

$$-2x + 3y + 3 = 0.$$

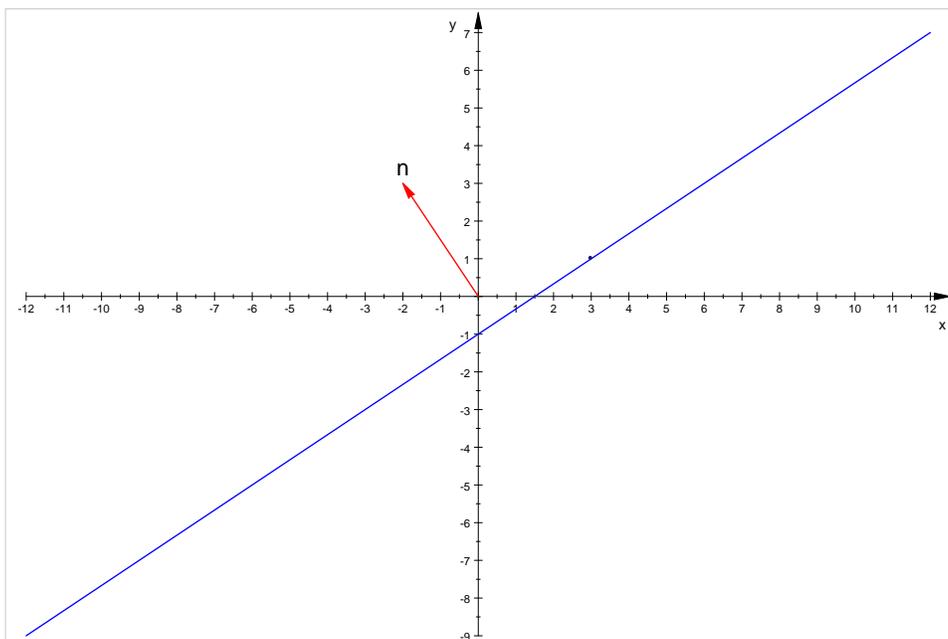


Figura 28

Otro concepto útil relacionado con las recta en el plano es el de **pendiente**. Ésta suele denotarse como m y se define como el cociente de *incremento en Y* sobre el *incremento en X*; dados dos puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ sobre una recta \mathcal{L} no paralela al eje Y , entonces

$$(1.6) \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Pensemos en la frase *se encuentra de manera uniforme con los puntos sobre sí misma* que aparece en la definición dada por Euclides y observemos la Figura 29; en cada recta se eligen 4 puntos arbitrarios y a partir de estos puntos se trazan en discontinuo segmentos paralelos a los ejes coordenados para formar triángulos rectángulos, dos por cada recta. Para cada recta estos triángulos son semejantes en el sentido de que los catetos (segmentos paralelos a los

ejes) guardan la misma proporción. Hoy atendemos al signo de las coordenadas de los puntos, es por ello que en una recta la proporción será negativa mientras que en la otra será positiva.

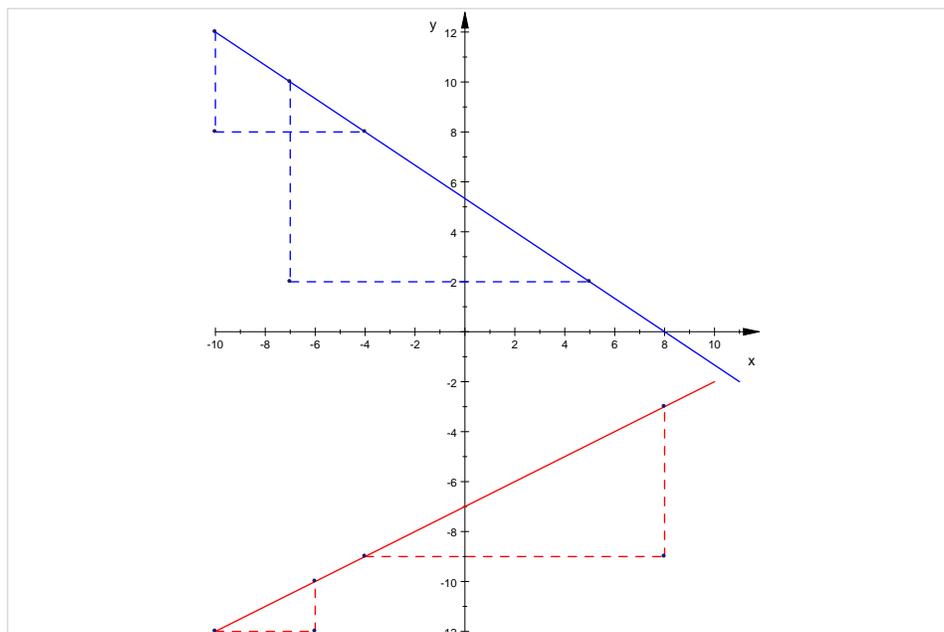


Figura 29

La proporción mencionada es precisamente $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ que sabemos corresponde a la tangente del ángulo que forma el vector de dirección $\mathbf{v} = P_2 - P_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ con el eje $+x$. Es por ello que para la recta en azul será negativa y para la roja positiva. Otra interpretación es que en la primera recta sucede que si un punto se mueve de tal manera que su primera coordenada aumenta, la segunda disminuye; lo contrario ocurre en la segunda recta, si x aumenta al moverse por esta recta, y también aumenta.

Es sencillo ver que no importa qué puntos se elijan en una misma recta \mathcal{L} para formar el triángulo rectángulo. Supongamos que se eligen P_1 y $P_2 \in \mathcal{L}$ para un primer triángulo y Q_1 y $Q_2 \in \mathcal{L}$ para un segundo triángulo, entonces $\mathbf{v} = P_2 - P_1$ y $\mathbf{u} = Q_2 - Q_1$ son paralelos, por lo que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{v} = (v_1, v_2) = \alpha \mathbf{u}$, con $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$. Entonces $v_1 = \alpha u_1$ y $v_2 = \alpha u_2$ y encontramos que

$$(1.7) \quad \frac{v_2}{v_1} = \frac{\alpha u_2}{\alpha u_1} = \frac{u_2}{u_1}.$$

siempre que $v_1 \neq 0$ y $u_1 \neq 0$.

Sean pues P_1 y $P_2 \in \mathcal{L}$ y $\mathbf{v} = P_2 - P_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ con $x_2 - x_1 \neq 0$ un vector de dirección para \mathcal{L} . Luego $P \in \mathcal{L}$ si y sólo si $\langle \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{n} \rangle$ donde $\mathbf{n} = (y_1 - y_2, x_2 - x_1)$. Haciendo cálculos algebraicos

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle &= \langle (x, y), (y_1 - y_2, x_2 - x_1) \rangle \\ &= (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{n} \rangle &= \langle (x_1, y_1), (y_1 - y_2, x_2 - x_1) \rangle \\ &= (y_1 - y_2)x_1 + (x_2 - x_1)y_1. \end{aligned}$$

Igualando estas ecuaciones

$$(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y = (y_1 - y_2)x_1 + (x_2 - x_1)y_1.$$

Dividiendo entre $x_2 - x_1$

$$-\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + y = -\frac{y_2 - y_1}{(x_2 - x_1)}x_1 + y_1.$$

Finalmente acomodando términos y factorizando

$$(1.8) \quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Esta ecuación es la llamada **ecuación punto pendiente**. Si usamos P_2 obtenemos

$$y - y_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2)$$

pero ambas nos conducen a la ecuación cartesiana

$$-(y_2 - y_1)x + y(x_2 - x_1) + (x_1y_2 - y_1x_2) = 0$$

pues en realidad $C = -\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{n} \rangle = -\langle \mathbf{p}_2, \mathbf{n} \rangle$ donde

$$\begin{aligned} -\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{n} \rangle &= (y_2 - y_1)x_1 - (x_2 - x_1)y_1 \\ &= x_1y_2 - y_1x_2 \\ &= (y_2 - y_1)x_2 - (x_2 - x_1)y_2 \\ &= -\langle \mathbf{p}_2, \mathbf{n} \rangle. \end{aligned}$$

Observe la ecuación (1.4). Es decir, siempre que se determine una recta con dos puntos distintos, no importa cuál de ellos se sustituya.

EJEMPLO 25. Una recta \mathcal{L} pasa por $P_1 = (-7, 10)$ y $P_2 = (5, 2)$. Entonces un vector de dirección es $\mathbf{v} = (12, -8)$ y ello nos da $m = \frac{2-10}{5-(-7)} = -\frac{2}{3}$. La ecuación punto pendiente es

$$y - 10 = -\frac{2}{3}(x + 7)$$

y llevándola a la ecuación cartesiana resulta

$$2x + 3y - 16 = 0.$$

Observe que otro vector de dirección es $(3, -2)$ y este vector nos da el vector normal $\mathbf{n} = (2, 3)$.

EJEMPLO 26. Ahora se tiene que la recta \mathcal{L} tiene pendiente $m = \frac{1}{2}$ y pasa por $P_0 = (0, -7)$. Es sencillo obtener la ecuación punto pendiente como

$$y + 7 = \frac{1}{2}x$$

o en su forma cartesiana

$$x - 2y - 14 = 0.$$

Las rectas de los Ejemplos 25 y 26 se muestran en la Figura 29. Con los datos del Ejemplo 26 podemos calcular un vector de dirección. Sabemos que los coeficientes de x y y son las coordenadas del vector normal \mathbf{n} , por lo que $\mathbf{n} = (1, -2)$, ello nos da un vector de dirección, que puede ser $\pm\mathbf{n}_p$. Eligiendo $\mathbf{v} = (2, 1)$ y multiplicando éste por $\frac{1}{2}$ obtenemos el vector $\mathbf{v}_0 = (1, \frac{1}{2})$. Este vector tiene la forma $(1, m)$.

En general, si $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ es un vector de dirección de una recta \mathcal{L} con $v_1 \neq 0$, multiplicando por el escalar $\frac{1}{v_1}$ obtenemos el vector $\mathbf{v}_0 = \left(1, \frac{v_2}{v_1}\right) = (1, m)$. De acuerdo con (1.7) ahora tenemos que dada una recta \mathcal{L} , ésta tendrá un único vector de dirección de la forma $(1, m)$. Si la recta \mathcal{L} es paralela al eje Y , el homólogo vector de dirección es $(0, 1)$.

Hay una forma de la ecuación para una recta \mathcal{L} que no es paralela a cualquiera de los ejes y no pasa por el origen. Tiene la particularidad de que sí es única para cada recta. Es determinada por dos puntos específicos: las intersecciones de \mathcal{L} con cada uno de los ejes coordenados. Estos puntos tienen, desde luego, una coordenada nula. Sean $(a, 0)$ y $(0, b)$ tales puntos. Al valor a le llamaremos **abscisa al origen** mientras que el valor b se denominará **ordenada al origen**.

EJEMPLO 27. *En el Ejemplo 25 la ecuación cartesiana resultó ser*

$$2x + 3y - 16 = 0.$$

Cuando hacemos $y = 0$ podemos calcular $x = 8$. Luego la abscisa al origen es $a = 8$. Asignando $x = 0$ obtenemos $y = \frac{16}{3}$. Entonces la ordenada al origen es $b = \frac{16}{3}$. Los puntos donde \mathcal{L} intersecta a los ejes X y Y son $(8, 0)$ y $(0, \frac{16}{3})$ respectivamente (ver Figura 29). Nuevamente notamos que estos puntos nos dan el vector de dirección $(8, -\frac{16}{3}) = \frac{2}{3}(12, -8)$ o bien $(8, -\frac{16}{3}) = 8(1, -\frac{2}{3})$. Cada uno de ellos paralelo a los otros dos.

En la ecuación punto pendiente $y - y_1 = m(x - x_1)$, despejamos a y para obtener

$$y = mx + (y_1 - mx_1).$$

Entonces, si $x = 0$, tenemos que $y = y_1 - mx_1$. Así pues, $b = y_1 - mx_1$ y la **ecuación ordenada al origen** se escribe

$$(1.9) \quad y = mx + b.$$

Ahora bien, con $\mathbf{a} = (a, 0)$ y $\mathbf{b} = (0, b)$ obtenemos un vector de dirección $\mathbf{v} = (a, -b)$ y un vector normal $\mathbf{n} = (b, a)$, también $\langle \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle = ab$. Así que con estos puntos obtenemos la ecuación cartesiana

$$bx + ay - ab = 0.$$

Como la recta no es paralela a cualquiera de los ejes y no contiene al origen, $ab \neq 0$. Entonces podemos dividir entre ab y obtener la que llamaremos **ecuación cartesiana ordinaria**

$$(1.10) \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

y ésta sí será única para una recta que no es paralela a cualquiera de los ejes y no contiene al origen.

EJEMPLO 28. *La recta que pasa por $P_1 = (-7, 10)$ y $P_2 = (5, 2)$ tiene una ecuación vectorial*

$$P = (-7, 10) + t(3, -2),$$

una ecuación cartesiana

$$2x + 3y - 16 = 0,$$

abscisa al origen $a = 8$, ordenada al origen $b = \frac{16}{3}$, una ecuación punto pendiente

$$y + 7 = -\frac{2}{3}(x - 10)$$

pero su única ecuación cartesiana ordinaria será

$$\frac{x}{8} + \frac{3y}{16} = 1.$$

EJEMPLO 29. Una recta \mathcal{L} tiene como vector de dirección al $\mathbf{v} = (2, \sqrt{2})$ y pasa por $P_0 = (\sqrt{18}, 4)$. Entonces una ecuación vectorial es

$$P = (\sqrt{18}, 4) + t(2, \sqrt{2})$$

y las ecuaciones paramétricas correspondientes son

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{18} + 2t \\ y &= 4 + \sqrt{2}t. \end{aligned}$$

Con estas ecuaciones llegamos a las ecuaciones simétricas

$$\frac{x - \sqrt{18}}{2} = \frac{y - 4}{\sqrt{2}}$$

que a su vez nos da la siguiente ecuación cartesiana

$$\sqrt{2}x - 2y + 2 = 0.$$

Rápidamente vemos que $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y que la ecuación punto pendiente es

$$y - 4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \sqrt{18}).$$

Sustituyendo $x = 0$ resulta que la ordenada al origen es $b = 1$ mientras que con $y = 0$ obtenemos la abscisa al origen $a = -\sqrt{2}$, por lo que la ecuación ordenada al origen es

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}x + 1$$

¿es esta ecuación única? Finalmente la ecuación cartesiana ordinaria es

$$-\frac{x}{\sqrt{2}} + y = 1.$$

La gráfica de la recta se deja al estudiante.

Terminamos esta sección con la siguiente definición natural.

DEFINICIÓN 12. Dos rectas \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 con vectores de dirección \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 se dicen paralelas (respectivamente ortogonales) si \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 son paralelos (respectivamente ortogonales). Si \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 no son ni paralelas ni ortogonales, se dice que son oblicuas y el ángulo entre ellas es el ángulo entre \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 . Convendremos en considerar el ángulo menor que un ángulo recto.

2. Distancia de un punto a una recta

Para determinar la distancia de un punto P a una recta \mathcal{L} , tomamos ésta como la mínima de las distancias de P a cada uno de los puntos de \mathcal{L} . En la Figura 30 se sugiere que esta distancia será la longitud del segmento de recta perpendicular a \mathcal{L} con extremos en P y \mathcal{L} misma. Con las herramientas vectoriales que tenemos no necesitamos calcular este último punto, en realidad sólo precisamos de calcular la norma de la proyección de $\mathbf{p} - \mathbf{s}$ sobre el vector normal \mathbf{n} donde $S \in \mathcal{L}$ es arbitrario.

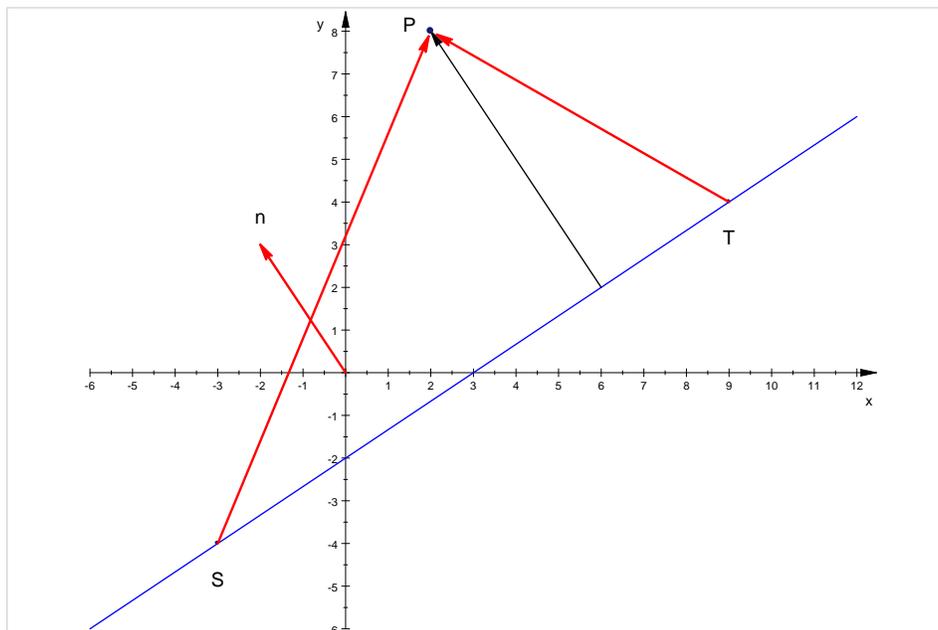


Figura 30

Entonces proyectando el vector $\mathbf{p} - \mathbf{s}$ sobre \mathbf{n} obtenemos el vector

$$\frac{\langle \mathbf{p} - \mathbf{s}, \mathbf{n} \rangle}{\|\mathbf{n}\|^2} \mathbf{n}$$

cuya norma es

$$\frac{|\langle \mathbf{p} - \mathbf{s}, \mathbf{n} \rangle|}{\|\mathbf{n}\|}.$$

Sean pues $P = (x_0, y_0)$, $S = (x_1, y_1) \in \mathcal{L}$ y $\mathbf{n} = (A, B)$. Luego una ecuación cartesiana de \mathcal{L} es $Ax + By + C = 0$ donde ya es sabido que $C = -(Ax_1 + By_1)$. Sustituyendo estos datos obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{|\langle \mathbf{p} - \mathbf{s}, \mathbf{n} \rangle|}{\|\mathbf{n}\|} &= \frac{|\langle (x_0, y_0) - (x_1, y_1), (A, B) \rangle|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\ &= \frac{|Ax_0 + By_0 - (Ax_1 + By_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\ &= \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \end{aligned}$$

Y hemos deducido que si $d(P, \mathcal{L})$ es la distancia de $P = (x_0, y_0)$ a \mathcal{L} con ecuación cartesiana $Ax + By + C = 0$, entonces

$$(2.1) \quad d(P, \mathcal{L}) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Veamos que no importa la elección del punto en \mathcal{L} . Sean S y T dos puntos en \mathcal{L} arbitrarios. Entonces $\mathbf{s} - \mathbf{t}$ es paralelo a \mathcal{L} y por ende $\langle \mathbf{s} - \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle = 0$. Con esto resulta que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p} - \mathbf{s}, \mathbf{n} \rangle &= 0 + \langle \mathbf{p} - \mathbf{s}, \mathbf{n} \rangle \\ &= \langle \mathbf{s} - \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle + \langle \mathbf{p} - \mathbf{s}, \mathbf{n} \rangle \\ &= \langle (\mathbf{s} - \mathbf{t}) + (\mathbf{p} - \mathbf{s}), \mathbf{n} \rangle \\ &= \langle \mathbf{p} - \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{|\langle \mathbf{p} - \mathbf{s}, \mathbf{n} \rangle|}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{|\langle \mathbf{p} - \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle|}{\|\mathbf{n}\|}.$$

EJEMPLO 30. Una recta \mathcal{L} pasa por $S = (6, 2)$ y tiene pendiente $m = \frac{3}{5}$, así que $\mathbf{v} = (5, 3)$ es un vector de dirección y $\mathbf{n} = (-3, 5)$ es un vector normal. Si $P = (2, -4)$, entonces $\mathbf{p} - \mathbf{s} = (-4, -6)$

$$\begin{aligned} d(P, \mathcal{L}) &= \frac{|-3(-4) + 5(-6)|}{\sqrt{9 + 25}} \\ &= \frac{|-18|}{\sqrt{34}} = \frac{18}{\sqrt{34}}. \end{aligned}$$

EJEMPLO 31. Dadas las rectas \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 con ecuaciones cartesianas

$$\begin{aligned} x + 2y - 3 &= 0 \\ 2x + y - 5 &= 0 \end{aligned}$$

los conjuntos de puntos que equidistan de estas rectas, esto es

$$\{P \in \mathbb{R}^2 : d(P, \mathcal{L}_1) = d(P, \mathcal{L}_2)\}$$

son precisamente los $P = (x, y)$ que satisfacen

$$\frac{|x + 2y - 3|}{\sqrt{5}} = \frac{|2x + y - 5|}{\sqrt{5}}.$$

Resolviendo con la propiedad de los números reales que dice que $0 \leq b = |x|$ si y sólo si $x = b$ o $x = -b$ obtenemos, después de eliminar los denominadores,

$$x + 2y - 3 = 2x + y - 5$$

o

$$x + 2y - 3 = -2x - y + 5.$$

Reacomodando términos y simplificando encontramos que los conjuntos equidistantes buscados son las rectas \mathcal{M}_1 y \mathcal{M}_2 con ecuaciones cartesianas

$$x - y - 2 = 0$$

y

$$3x + 3y - 8 = 0.$$

La Figura 31 muestra las rectas \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 en azul y \mathcal{M}_1 y \mathcal{M}_2 en rojo. Estas últimas son ortogonales. Además dividen los ángulos entre \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 exactamente a la mitad (ver Ejercicio 71). Debido a esta última propiedad es que se les denomina **bisectrices**.

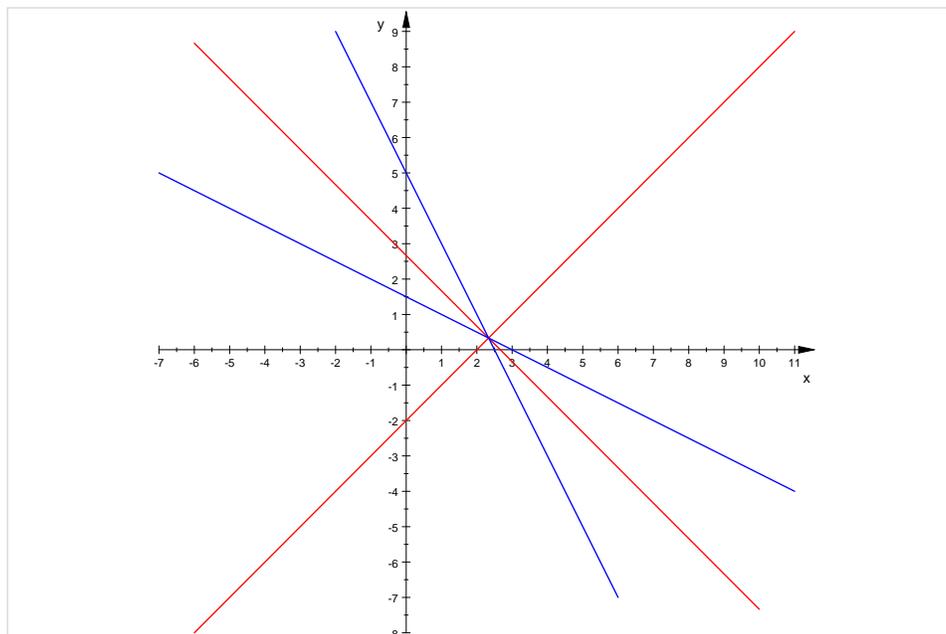


Figura 31

3. Intersección de rectas

Dadas dos rectas \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 ortogonales u oblicuas, inexorablemente se intersectarán en un punto, es decir $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ consta de un sólo punto. Si son paralelas, $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ será el conjunto vacío. El caso restante es cuando $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$ y la intersección será toda la recta.

Es fácil decidir si dos rectas son paralelas o no simplemente comparando sus vectores de dirección o de manera equivalente, comparando sus vectores normales a través de los coeficientes de x y y .

Se puede demostrar algebraicamente que dos rectas no paralelas se intersectan en un solo punto. Primero veamos un ejemplo.

EJEMPLO 32. Las rectas \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 tienen ecuaciones cartesianas

$$a) 3x + 5y = 11$$

$$b) 2x - 3y = 1.$$

Por los coeficientes, es inmediato que no son paralelas. Podemos eliminar cualquiera de las incógnitas en ambas ecuaciones. Multiplicando (a) por 3 y (b) por 5 obtenemos las ecuaciones

$$9x + 15y = 33$$

$$10x - 15y = 5$$

y sumando estas ecuaciones obtenemos

$$19x = 38$$

o bien $x = 2$. Sustituyendo este valor en (a) o (b) resulta que $y = 1$.

Observemos que los valores por los que multiplicamos las ecuaciones constituyen uno de los vectores normales. Acomodemos las ecuaciones (a) y (b) en manera vectorial

$$x(3, 2) + y(5, -3) = (11, 1)$$

y para eliminar y realizamos el producto escalar por $(5, -3)_p = (3, 5)$. Asimismo pudimos realizar el producto escalar por $(3, 2)_p = (-2, 3)$,

$$\begin{aligned}y(-2, 3) \bullet (5, -3) &= (-2, 3) \bullet (11, 1) \\ -19y &= -19,\end{aligned}$$

y con ello obtener $y = 1$.

De acuerdo con los Ejercicios 42 y 43, dos rectas \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 no son paralelas si y sólo si se intersectan en un sólo punto.

Un método efectivo y que puede aplicarse a un número mayor de ecuaciones e incógnitas es el llamado Método de Eliminación Gaussiana o Método de Gauss-Jordan. Con la notación del Ejercicio 42, sean

$$\begin{aligned}a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2\end{aligned}$$

ecuaciones cartesianas de las rectas \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 . Si $a_{11} = 0$, el valor de y es inmediato y en la segunda ecuación nos da el valor de x . Si $a_{11} \neq 0$, multiplicamos la primer ecuación por $\frac{1}{a_{11}}$ y ésta se transforma en

$$(3.1) \quad x + \frac{a_{12}}{a_{11}}y = \frac{b_1}{a_{11}},$$

enseguida multiplicamos esta última por $-a_{21}$ y la sumamos a la segunda ecuación

$$\begin{aligned}-a_{21}x - a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}}y &= -a_{21}\frac{b_1}{a_{11}} \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2.\end{aligned}$$

Esto elimina la incógnita x y nos da

$$\left(a_{22} - a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)y = b_2 - a_{21}\frac{b_1}{a_{11}}.$$

Multiplicando por $\left(a_{22} - a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)^{-1}$, acomodando términos, llegamos a que

$$y = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (3.1) nos da que

$$x = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

El Ejercicio 43 nos dice ahora que $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ si y sólo si las rectas no son paralelas y ello equivale a que las ecuaciones de las rectas \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 tendrán solución única.

EJEMPLO 33. *Las rectas cuyas ecuaciones son $3x - 8y - 2 = 0$ y $3x - 8y - 44 = 0$ contienen los lados opuestos de un paralelogramo. Una de las diagonales está sobre la recta $x + 2y + 4 = 0$ y la otra diagonal pasa por el punto $P = \left(4, \frac{1}{5}\right)$. Determine los cuatro vértices del paralelogramo.*

Solución. Podemos calcular fácilmente dos de los cuatro puntos que son la intersección de la diagonal con los lados opuestos paralelos. Se trata de resolver dos sistemas de ecuaciones lineales, cada uno con dos incógnitas. Los sistemas son

$$\begin{aligned} 3x - 8y &= 2 \\ x + 2y &= -4 \end{aligned}$$

cuya solución es

$$x = \frac{(2)(2) - (-8)(-4)}{(3)(2) - (-8)(1)} = -2, \quad y = \frac{(3)(-4) - (2)(1)}{(3)(2) - (-8)(1)} = -1$$

y

$$\begin{aligned} 3x - 8y &= 44 \\ x + 2y &= -4 \end{aligned}$$

con solución

$$x = \frac{(2)(44) - (-8)(-4)}{(3)(2) - (-8)(1)} = 4, \quad y = \frac{(3)(-4) - (44)(1)}{(3)(2) - (-8)(1)} = -4.$$

Así hemos encontrado los primeros dos puntos del paralelogramo

$$\begin{aligned} P_1 &= (-2, -1) \\ P_2 &= (4, -4). \end{aligned}$$

Ahora bien, los otros dos puntos serán las intersecciones de los lados paralelos con la segunda diagonal. De ésta sabemos que pasa por el punto $P = (4, \frac{1}{5})$ y también por el punto medio de la primera diagonal, cuyos extremos acabamos de calcular. Llamemos Q a este punto medio y sabemos que

$$\begin{aligned} Q &= \left(\frac{-2 + 4}{2}, \frac{-1 - 4}{2} \right) \\ &= \left(1, -\frac{5}{2} \right). \end{aligned}$$

Así pues, la otra diagonal pasa por P y Q , y por ello, un vector de dirección será $\mathbf{v} = (3, \frac{27}{10})$ o el vector paralelo $\frac{10}{3}\mathbf{v} = (10, 9)$. Por ende, $\mathbf{n} = (-9, 10)$ y como pasa por P , resulta así que una ecuación para esta diagonal es $-9x + 10y + 34 = 0$. Los otros dos puntos buscados, a los cuales llamaremos P_3 y P_4 , son las soluciones de los sistemas

$$\begin{aligned} 3x - 8y &= 2 \\ 9x - 10y &= 34 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} 3x - 8y &= 44 \\ 9x - 10y &= 34. \end{aligned}$$

Resolviéndolos encontramos que

$$\begin{aligned} P_3 &= (6, 2) \\ P_4 &= (-4, -7). \end{aligned}$$

Como ejercicio, las gráficas las realizará el estudiante.

Terminamos este capítulo con un uso de los determinantes 3×3 . Para calcularlos, ver el Ejercicio 44.

EJEMPLO 34. Sean a y $b \in \mathbb{R}$ tales que $ab \neq 0$. Entonces el determinante 3×3 siguiente

$$\begin{vmatrix} x & y & \frac{1}{ab} \\ a & 0 & \frac{1}{ab} \\ 0 & b & \frac{1}{ab} \end{vmatrix} = 0$$

nos da

$$x \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{ab} \\ b & \frac{1}{ab} \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} a & \frac{1}{ab} \\ 0 & \frac{1}{ab} \end{vmatrix} + \frac{1}{ab} \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = 0.$$

Realizando los determinantes 2×2 obtenemos la ecuación

$$-\frac{1}{a}x - y\frac{1}{b} + 1 = 0.$$

En realidad, ésta es la ecuación cartesiana ordinaria de la recta que tiene abscisa y ordenada al origen a y b respectivamente.

4. Ejercicios

EJERCICIO 48. Con los datos del Ejemplo 20, suponiendo que M_2 y M_3 comienzan su movimiento en el mismo instante, determine el tiempo t y el punto en el que las partículas coinciden.

EJERCICIO 49. Calcule una ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas y simétricas correspondientes, una ecuación cartesiana, una ecuación punto pendiente, la ecuación ordenada al origen y la ecuación cartesiana ordinaria para la recta \mathcal{L} que pasa por P_1 y P_2 si

$$\begin{array}{ll} a) P_1 = (-3, \sqrt{108}), P_2 = (1, \sqrt{12}), & b) P_1 = (2, 1), P_2 = (0, 0), \\ c) P_1 = (3, 2), P_2 = (1, 1), & d) P_1 = (-6, -3), P_2 = (-4, -2), \\ e) P_1 = (4, 2), P_2 = (4, -2), & f) P_1 = (3, -4), P_2 = (-1, 1), \\ g) P_1 = (5, 2), P_2 = (1, -3), & h) P_1 = (\sqrt{125}, 2), P_2 = (\sqrt{20}, -1), \\ i) P_1 = (2, 2), P_2 = (5, 1), & j) P_1 = (5, 2), P_2 = (-1, -4), \\ k) P_1 = (4, 2), P_2 = (-2, 8), & l) P_1 = (-5, 2), P_2 = (1, 2). \end{array}$$

EJERCICIO 50. Calcule una ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas y simétricas correspondientes, una ecuación cartesiana, una ecuación punto pendiente, la ecuación ordenada al origen y la ecuación cartesiana ordinaria para la recta \mathcal{L} que pasa por $P_1 = (h, k)$ y $P_2 = (k, h)$. Enseguida haga lo correspondiente para la recta que pasa por $P_1 = (h, k)$ y $P_2 = (-k, h)$.

EJERCICIO 51. Calcule una ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas y simétricas correspondientes, una ecuación cartesiana, una ecuación punto pendiente, la ecuación ordenada al origen y la ecuación cartesiana ordinaria para la recta \mathcal{L} que pasa por P_0 y tienen como un vector de dirección a \mathbf{v} si

$$\begin{array}{lll} a) P_0 = (1, 2), \mathbf{v} = (-1, 3), & b) P_0 = (-2, 3), \mathbf{v} = (2, 1), & c) P_0 = (1, 1), \mathbf{v} = (2, -3), \\ d) P_0 = (4, 7), \mathbf{v} = (3, 3), & e) P_0 = (-2, -3), \mathbf{v} = (1, 4), & f) P_0 = (-3, 2), \mathbf{v} = (2, 1). \end{array}$$

EJERCICIO 52. Con las rectas del Ejercicio 51, por cada inciso decida si los puntos P y Q pertenecen a la recta con el mismo inciso si

$$\begin{array}{lll} a) P = (3, -4), Q = (-1, 2), & b) P = (5, 2), Q = (4, 6), & c) P = (7, -8), Q = (-3, 7), \\ d) P = (7, 11), Q = (-2, -1), & e) P = (1, 9), Q = (5, -7), & f) P = (0, \frac{7}{2}), Q = (-7, 0). \end{array}$$

EJERCICIO 53. Determine si los puntos P_1 , P_2 y P_3 están sobre una recta (se dice que son **puntos colineales**) si

$$\begin{aligned} a) P_1 &= (2, 1), & P_2 &= (-1, 3), & P_3 &= (5, -1), \\ b) P_1 &= (8, -3), & P_2 &= (-4, 5), & P_3 &= (2, 4), \\ c) P_1 &= (2, 1), & P_2 &= (8, -3), & P_3 &= (-4, 5), \\ d) P_1 &= (1, -3), & P_2 &= (8, -3), & P_3 &= (0, -1). \end{aligned}$$

No caiga en la tentación de graficar los puntos. Emplee técnicas vectoriales, pues éstas aplican al caso tridimensional e incluso a dimensiones superiores.

EJERCICIO 54. Con las ecuaciones vectoriales o paramétricas calculadas en los incisos (a) y (h) del Ejercicio 49, calcule los valores de t que dan los puntos $(a, 0)$ y $(0, b)$.

EJERCICIO 55. Con las ecuaciones paramétricas del Ejemplo 29 obtenga los valores de t que dan los puntos $(a, 0)$ y $(0, b)$. Además calcule el ángulo que forma \mathcal{L} con el eje $+x$.

EJERCICIO 56. Sean P_1 y $P_2 \in \mathbb{R}^2$ y consideremos el segmento que une estos puntos

$$\overline{P_1 P_2} = \{P_1 + t(P_2 - P_1) : 0 \leq t \leq 1\}.$$

Entonces $Q_0 = P_1 + \frac{1}{2}(P_2 - P_1)$ bisecta el segmento; $Q_1 = P_1 + \frac{1}{3}(P_2 - P_1)$ y $Q_2 = P_1 + \frac{2}{3}(P_2 - P_1)$ trisectan el segmento. Determine el conjunto de puntos que dividen el segmento en N segmentos de la misma longitud.

EJERCICIO 57. Las **medianas** de un triángulo son los segmentos con extremos en cada vértice y el punto medio del lado opuesto. Para los siguientes triángulos con vértices en P_1 , P_2 y P_3 obtenga ecuaciones cartesianas para las rectas que contienen a las medianas si

$$\begin{aligned} a) P_1 &= (-6, 1), & P_2 &= (-3, -2), & P_3 &= (0, 3), \\ b) P_1 &= (8, -3), & P_2 &= (-4, 5), & P_3 &= (2, 4), \\ c) P_1 &= (-6, -1), & P_2 &= (0, -1), & P_3 &= (-6, 1), \\ d) P_1 &= (1, -3), & P_2 &= (8, -3), & P_3 &= (0, -1). \end{aligned}$$

EJERCICIO 58. Las **mediatrices** de un triángulo son las rectas ortogonales que pasan por el punto medio de cada lado. Con los triángulos del Ejercicio 57 calcule ecuaciones cartesianas de las mediatrices.

EJERCICIO 59. Sean \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 dos rectas con el mismo vector de dirección \mathbf{v} . Sean $P \neq Q$ tales que $P \in \mathcal{L}_1$ y $Q \in \mathcal{L}_2$. Demuestre que si existe un $R \in \mathcal{L}_1$ y $R \in \mathcal{L}_2$, entonces

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r} - \mathbf{p}, \mathbf{v}_p \rangle &= 0 \\ \langle \mathbf{r} - \mathbf{q}, \mathbf{v}_p \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Con esto demuestre que

$$\langle \mathbf{q} - \mathbf{p}, \mathbf{v}_p \rangle = 0.$$

Concluya que la existencia de este R implica que no puede ocurrir $P \notin \mathcal{L}_2$ ni $Q \notin \mathcal{L}_1$.

EJERCICIO 60. Suponga que el punto $P = (h, k) \in \mathcal{L}$ cuya ecuación cartesiana es $Ax + By + C = 0$. Demuestre que si $A \neq 0$, la recta corta al eje X en el punto $(h + \frac{B}{A}k, 0)$ y que si $B \neq 0$, la recta corta al eje Y en el punto $(0, k + \frac{A}{B}h)$.

EJERCICIO 61. Demuestre que dos rectas \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 con pendientes m_1 y m_2 respectivamente son ortogonales si y sólo si $m_1 m_2 = -1$.

EJERCICIO 62. *Obtenga una ecuación cartesiana y la ecuación cartesiana ordinaria de las rectas con las siguientes características:*

1. *La recta que contiene al origen y es ortogonal a la recta cuyas ordenada y abscisa al origen son 5 y $-\frac{2}{3}$.*
2. *La recta que contiene $P = (3, -2)$ y es ortogonal a la recta que pasa por $Q = (1, 1)$ y tiene pendiente $\frac{3}{2}$.*
3. *La recta cuyas ordenada y abscisa al origen suman 7 y tiene pendiente $-\frac{11}{3}$.*
4. *La recta cuyas ordenada y abscisa al origen suman 2 y tiene pendiente $\frac{9}{5}$.*
5. *La recta cuyas ordenada y abscisa al origen suman 0 y contiene al punto $P = (2, 4)$ (dos soluciones).*
6. *La recta cuyas ordenada y abscisa al origen suman -1 y contiene al punto $P = (2, 2)$ (dos soluciones).*
7. *La recta cuyas ordenada y abscisa al origen suman 1 y contiene al punto $P = (-6, -4)$ (dos soluciones).*
8. *La recta cuyo producto de su ordenada y abscisa al origen es 12 y contiene al punto $P = (3, 1)$.*
9. *La recta cuyo producto de su ordenada y abscisa al origen es 12 y contiene al punto $P = (3, -3)$ (dos soluciones).*
10. *La recta cuyo producto de su ordenada y abscisa al origen es 6 y contiene al punto $P = (0, \frac{1}{2})$.*
11. *La recta cuyo producto de su ordenada y abscisa al origen es 6 y contiene al punto $P = (\frac{3}{2}, -3)$ (dos soluciones).*
12. *La recta que consta de los puntos que equidistan de P_1 y $P_2 \in \mathbb{R}^2$ con $P_1 \neq P_2$.*

EJERCICIO 63. *Determine el valor de a para que las rectas*

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{2} = 1, \quad -\frac{x}{4} - \frac{y}{2} = 1$$

sean ortogonales.

EJERCICIO 64. *Determine el valor de b para que las rectas*

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{b} = 1, \quad \frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 1$$

sean ortogonales.

EJERCICIO 65. *Calcule $d(P, \mathcal{L})$ donde \mathcal{L} tiene a \mathbf{v} como vector de dirección y pasa por S si*

$$\begin{aligned} a) P &= (2, 5), & \mathbf{v} &= (3, -1), & S &= (1, 3), \\ b) P &= (-1, 3), & \mathbf{v} &= (2, 2), & S &= (4, -2), \\ c) P &= (-5, 1), & \mathbf{v} &= (4, -6), & S &= (0, -1), \\ d) P &= (3, 4), & \mathbf{v} &= (2, 1), & S &= (4, 6). \end{aligned}$$

EJERCICIO 66. *Calcule $d(P, \mathcal{L})$ donde \mathcal{L} tiene pendiente m y pasa por S si*

$$\begin{aligned} a) P &= (1, 6), & m &= 2, & S &= (3, 3), \\ b) P &= (4, -2), & m &= -\frac{1}{2}, & S &= (5, -3), \\ c) P &= (-3, -4), & m &= -\frac{1}{7}, & S &= (2, 3), \\ d) P &= (-4, 0), & m &= -4, & S &= (0, 4). \end{aligned}$$

EJERCICIO 67. Calcule ecuaciones cartesianas para las bisectrices de los ángulos formados por las rectas

$$\begin{aligned} a) \mathcal{L}_1 : 3x + 4y - 2 = 0, \quad \mathcal{L}_2 : 4x + 3y + 2 = 0, \\ b) \mathcal{L}_1 : 3x - 4y + 1 = 0, \quad \mathcal{L}_2 : 5x + 12y - 2 = 0, \\ c) \mathcal{L}_1 : x + 3y - 2 = 0, \quad \mathcal{L}_2 : 2x - 6y + 5 = 0, \\ d) \mathcal{L}_1 : x + y - 6 = 0, \quad \mathcal{L}_2 : 3x - 3y + 5 = 0. \end{aligned}$$

EJERCICIO 68. Calcule $d(P, \mathcal{L})$ donde $P = (b, a)$ y \mathcal{L} tiene abscisa y ordenada al origen a y b respectivamente.

EJERCICIO 69. Calcule $d(P, \mathcal{L})$ donde $P = (b, -a)$ y \mathcal{L} tiene abscisa y ordenada al origen a y b respectivamente.

EJERCICIO 70. Calcule $d(P, \mathcal{L})$ donde $P = (a, b)$ y \mathcal{L} tiene abscisa y ordenada al origen a y b respectivamente.

EJERCICIO 71. Sean \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 dos rectas no paralelas y \mathcal{M}_1 y \mathcal{M}_2 las bisectrices. Demuestre que \mathcal{M}_1 y \mathcal{M}_2 siempre son ortogonales entre ellas y que forman ángulos con \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 iguales a la mitad de los ángulos entre \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 .

EJERCICIO 72. Las bisectrices de un triángulo son las semirrectas que dividen los ángulos internos en dos ángulos iguales. Con los triángulos del Ejercicio 57 calcule ecuaciones cartesianas de las rectas que contienen a las bisectrices.

EJERCICIO 73. Encuentre $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ si

$$\begin{aligned} a) \mathcal{L}_1 : x + 3y = 7, \quad \mathcal{L}_2 : 2x + y = -1, \\ b) \mathcal{L}_1 : 3x - 2y = 19, \quad \mathcal{L}_2 : 2x + 5y = 0, \\ c) \mathcal{L}_1 : x - 2y = 7, \quad \mathcal{L}_2 : -2x + 4y = 14, \\ d) \mathcal{L}_1 : 3x + 2y = 4; \quad \mathcal{L}_2 : 2x - 7y = 11, \\ e) \mathcal{L}_1 : 3x - 2y = 8, \quad \mathcal{L}_2 : 6x - 4y = 3, \\ f) \mathcal{L}_1 : 5x + y = -9, \quad \mathcal{L}_2 : x - 3y = -5. \end{aligned}$$

EJERCICIO 74. Calcule ecuaciones cartesianas para la recta \mathcal{L} determinada por las siguientes características:

1. Pasa por $P = (4, \frac{8}{3})$ y la intersección de las rectas $\mathcal{L}_1 : 3x - 4y = 2$ y $\mathcal{L}_2 : 12x - 15y = 8$.
2. Pasa por $P = (a, b)$ y la intersección de las rectas $\mathcal{L}_1 : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ y $\mathcal{L}_2 : \frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$.
3. Pasa por la intersección de las rectas $\mathcal{L}_1 : 3x + y = 16$ y $\mathcal{L}_2 : 2x - 7y = 3$ y es paralela a $\mathcal{L}_3 : x - 3y = -2$.
4. Pasa por la intersección de las rectas $\mathcal{L}_1 : x + 2y = 12$ y $\mathcal{L}_2 : 3x - 4y = 26$ y es perpendicular a $\mathcal{L}_3 : x + y = 1$.

EJERCICIO 75. Una recta \mathcal{L} se mueve en \mathbb{R}^2 de tal manera que su abscisa y su ordenada al origen satisfacen que sus inversos multiplicativos siempre suman el valor constante $k \neq 0$. Demuestre que la recta siempre pasará por $(\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$.

EJERCICIO 76. Los lados paralelos de un paralelogramo son segmentos de longitud $2\sqrt{5}$ y están sobre las rectas $\mathcal{L}_1 : x + 2y = 8$ y $\mathcal{L}_2 : x + 2y = -12$. Una diagonal está sobre la recta $\mathcal{D} : x - 8y = -2$. Calcule los cuatro vértices del paralelogramo (dos soluciones).

EJERCICIO 77. Las **alturas** de un triángulo son las longitudes de los segmentos perpendiculares a cada lado con un extremo en un vértice y el otro en el lado opuesto o su prolongación. Con los triángulos del Ejercicio 57 calcule ecuaciones cartesianas de las rectas que contienen a las alturas. Enseguida calcule las alturas y las áreas de los triángulos.

EJERCICIO 78. Demuestre que el área de un triángulo con vértices en $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ y $P_3 = (x_3, y_3)$ está dada por la fórmula

$$\frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) - x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_1 - y_2)|$$

(ver el Ejercicio 85).

EJERCICIO 79. Demuestre que las medianas, las mediatrices, las bisectrices y las alturas de un triángulo descansan en rectas que se intersectan de tres en tres en un punto. Ayuda: asegúrese que en cualquier terna, dos de ellas no son paralelas y establezca que el punto en común a éstas debe pertenecer a la tercer recta.

EJERCICIO 80. Sea $Ax + By + C = 0$ una ecuación cartesiana de una recta \mathcal{L} con $A^2 + B^2 \neq 0$. La ecuación

$$(4.1) \quad \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

se denomina la **ecuación normal** de la recta. Demuestre que

$$d(\mathbf{0}, \mathcal{L}) = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

es decir, la distancia del origen a la recta. Señale cuál es un vector unitario normal $\hat{\mathbf{n}}$ de la recta \mathcal{L} .

EJERCICIO 81. Obtenga la ecuación normal de la recta \mathcal{L} que está a una distancia $d = 10$ del origen y es perpendicular a $\mathbf{n} = (-4, 3)$ (dos soluciones).

EJERCICIO 82. Haciendo referencia al Ejercicio 44, sean $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Demuestre que una ecuación cartesiana para la recta que pasa por P_1 y P_2 está dada por

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

EJERCICIO 83. Demuestre que $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ y $P_3 = (x_3, y_3)$ son colineales si y sólo si

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

EJERCICIO 84. Sean \mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_2 y \mathcal{L}_3 tres rectas con ecuaciones cartesianas $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ y $A_3x + B_3y + C_3 = 0$. Suponga que se intersectan en cierto punto $S = (h, k)$. Demuestre que

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

EJERCICIO 85. Demuestre que si $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ y $P_3 = (x_3, y_3)$ no son colineales, entonces el área del triángulo con vértices en estos puntos es el valor absoluto de

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

(ver el Ejercicio 78).

EJERCICIO 86. Demuestre que

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ 1 & m & 0 \end{vmatrix} = 0$$

es la ecuación de una recta que pasa por $P_0 = (x_0, y_0)$ y tienen pendiente m .

EJERCICIO 87. Demuestre que

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 1 & m & 0 \end{vmatrix} = 0$$

es la ecuación de la recta con pendiente m y ordenada al origen b .

EJERCICIO 88. Sean \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 dos rectas con ecuaciones cartesianas $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Demuestre que los ángulos suplementarios formados por estas rectas satisfacen

$$\tan \varphi = \pm \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}.$$

EJERCICIO 89. Demuestre que las rectas con ecuación

$$\alpha x + y = 2\alpha + 1$$

constituyen una familia de rectas que pasan por $P = (2, 1)$ con pendiente $-\alpha$.

EJERCICIO 90. Obtenga la ecuación de la familia de rectas que pasan por $P = (-3, 2)$ que tienen pendiente α .

CAPÍTULO 3

Rectas y planos en el espacio

Un plano es al espacio lo que una recta es al plano bidimensional. Comenzamos este capítulo con esta analogía porque en \mathbb{R}^3 la ecuación cartesiana de un plano será de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$. Pero antes estudiaremos las rectas en el espacio.

1. Rectas en el espacio

Al igual que en el plano cartesiano, una recta \mathcal{L} queda bien determinada por (a) dos puntos P_1 y P_2 en ella o (b) un punto P_0 en ella y un vector \mathbf{v} de dirección. En el primer caso siempre obtendremos el vector de dirección $\mathbf{v} = \pm(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)$ o cualquier múltiplo escalar de este vector.

EJEMPLO 35. *La recta \mathcal{L} pasa por $P_1 = (-3, -5, 4)$ y $P_2 = (6, 6, -1)$. Entonces un vector de dirección es $\mathbf{v} = (9, 11, -5)$. En la Figura 32 se muestra una vista de la recta en el espacio con un vector de dirección $(\frac{9}{5}, \frac{11}{5}, -1)$. Una ecuación vectorial de la recta es*

$$P = (6, 6, -1) + t \left(\frac{9}{5}, \frac{11}{5}, -1 \right).$$

Los puntos sobre la recta \mathcal{L} son, como en el caso bidimensional, los extremos de los radiovectores \mathbf{p} de la forma anterior. Del mismo modo, $Q \in \mathcal{L}$ si y sólo si hay un escalar t tal que $Q - P_2 = t\mathbf{v}$. Sea ahora $P = (x, y, z) \in \mathcal{L}$. Entonces para esta ecuación vectorial las ecuaciones paramétricas de \mathcal{L} son

$$\begin{aligned}x &= 6 + 9t \\y &= 6 + 11t \\z &= -1 - 5t.\end{aligned}$$

Despejando el parámetro t obtenemos las correspondientes ecuaciones simétricas

$$\frac{x - 6}{9} = \frac{y - 6}{11} = \frac{z + 1}{-5}.$$

La recta en el espacio no tiene ecuación cartesiana.

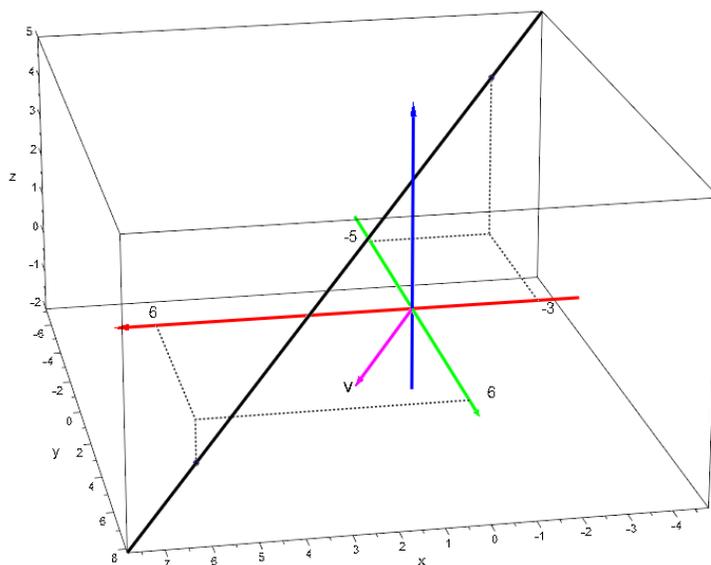


Figura 32

En términos más generales, sea \mathcal{L} la recta que pasa por $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y tiene vector de dirección $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Entonces \mathcal{L} tendrá por ecuación vectorial

$$P = P_0 + t\mathbf{v},$$

o bien

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(v_1, v_2, v_3)$$

y esta última forma nos da las ecuaciones paramétricas

$$(1.1) \quad \begin{aligned} x &= x_0 + tv_1 \\ y &= y_0 + tv_2 \\ z &= z_0 + tv_3 \end{aligned}$$

que a su vez nos dan las **ecuaciones simétricas**

$$(1.2) \quad \frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}.$$

Es importante recalcar que las ecuaciones paramétricas 1.1 y las ecuaciones simétricas 1.2 proporcionan información sobre la recta: un punto en ella y un vector de dirección.

EJEMPLO 36. Una recta \mathcal{L} en \mathbb{R}^3 tiene por ecuaciones simétricas

$$\frac{x + 3}{2} = y - 5 = -\frac{z}{3}.$$

Entonces, llevando estas ecuaciones a la forma 1.2, encontramos que la recta pasa por $P_0 = (-3, 5, 0)$ y un vector de dirección es $\mathbf{v} = (2, 1, -3)$. Las correspondientes ecuaciones paramétricas son

$$\begin{aligned} x &= -3 + 2t \\ y &= 5 + t \\ z &= -3t \end{aligned}$$

3. Rectas y planos en el espacio

y una ecuación vectorial es $P = (-3, 5, 0) + t(2, 1, -3)$.

EJEMPLO 37. Una recta \mathcal{L} en \mathbb{R}^3 pasa por $P_1 = (5, 4, \frac{1}{2})$ y $P_2 = (7, 4, \frac{7}{2})$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 \\ &= (2, 0, 3).\end{aligned}$$

Así, estos datos nos dan la ecuación vectorial

$$P = \left(5, 4, \frac{1}{2}\right) + t(2, 0, 3)$$

y las ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned}x &= 5 + 2t \\ y &= 4 \\ z &= \frac{1}{2} + 3t.\end{aligned}$$

Ahora tenemos que si $P = (x, y, z) \in \mathcal{L}$, necesariamente $y = 4$.

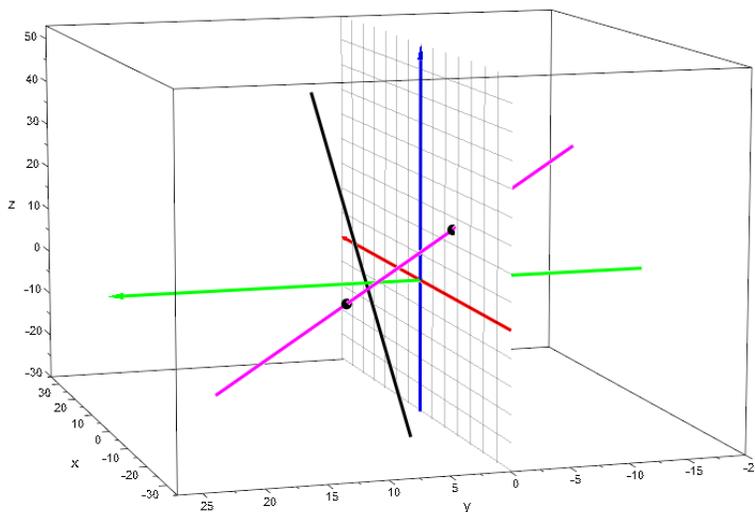


Figura 33

La Figura 33 muestra la situación de las rectas de los Ejemplos 36 y 37 en el espacio.

OBSERVACIÓN 10. La recta del Ejemplo 37 (en negro) jamás cruza el plano $y = 0$. En esta situación se dice que la recta es paralela al plano XZ . De manera análoga, rectas paralelas al plano $x = 0$, o plano YZ tienen ecuaciones paramétricas de la forma

$$\begin{aligned}x &= x_0 \\ y &= y_0 + tv_2 \\ z &= z_0 + tv_3.\end{aligned}$$

Ecuaciones análogas se dan para las rectas paralelas al plano XY .

OBSERVACIÓN 11. *Algo importante que recalcar es que, aunque estas rectas no son paralelas, pues sus vectores de dirección no lo son, la intersección de ellas es el conjunto vacío. Esto no contradice el Quinto Postulado de Euclides en la versión de Hilbert, pues él se refiere a rectas sobre un mismo plano.*

EJEMPLO 38. *Si tratásemos de encontrar la intersección de las rectas de los Ejemplos 36 y 37, primeramente debemos llamar de manera distinta a los parámetros e igualar las respectivas ecuaciones paramétricas. Así pues, deberíamos resolver para t_1 y t_2 las ecuaciones*

$$\begin{aligned} 5 + 2t_1 &= -3 + 2t_2 \\ 4 &= 5 + t_2 \\ \frac{1}{2} + 3t_1 &= -3t_2. \end{aligned}$$

Esto nos conduce a que $t_2 = -1$ y el punto, si existiese, sería $(-5, 4, 3)$ y es inmediato que no hay t_1 tal que

$$\begin{aligned} 5 + 2t_1 &= -5 \\ \frac{1}{2} + 3t_1 &= 3. \end{aligned}$$

EJEMPLO 39. *La recta del Ejemplo 36 (en magenta en la Figura 33) sí corta los planos coordenados XY , XZ y YZ . Para encontrar los puntos de intersección procedemos como sigue: el punto Q_1 donde la recta corta al plano YZ es donde $x = 0$, es decir, $-3 + 2t = 0$, luego $t = \frac{3}{2}$ y encontramos que el punto buscado es $Q_1 = (0, \frac{13}{2}, -\frac{9}{2})$. Al plano XZ lo corta cuando $y = 0$ en el punto Q_2 , o sea, cuando $t = -5$ y con ello tenemos que $Q_2 = (-13, 0, 15)$; estos puntos se pueden observar en la Figura 33. Finalmente, el punto $Q_3 = P_0$ es donde la recta corta al plano XY , pues en tal punto $z = 0$. También vale la pena notar que $\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1 = -\frac{13}{2}\mathbf{v}$.*

EJEMPLO 40. *Las rectas $\mathcal{L}_1 : (2, 3, -1) + t_1(3, 3, 3)$ y $\mathcal{L}_2 : (5, 1, 2) + t_2(3, 4, 3)$ se intersectan en un punto. Igualando las respectivas ecuaciones paramétricas*

$$\begin{aligned} 2 + 3t_1 &= 5 + 3t_2 \\ 3 + 3t_1 &= 1 + 4t_2 \\ -1 + 3t_1 &= 2 + 3t_2 \end{aligned}$$

y resolviendo el sistema con dos de ellas, digamos las dos primeras, llegamos al sistema

$$\begin{aligned} 3t_1 - 3t_2 &= 3 \\ 3t_1 - 4t_2 &= -2 \end{aligned}$$

*cuya solución encontramos rápidamente como $t_1 = 6$ y $t_2 = 5$. Luego, el punto en $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ tiene coordenadas $x = 20$ y $y = 21$. Estos valores también nos dan para ambas rectas $z = 17$. Entonces \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 se intersectan en $(20, 21, 17)$. Dos rectas en el espacio que tienen al menos un punto en común se dicen **rectas coplanares***

2. Planos en el espacio

Al comenzar el Capítulo 2 se mencionaron tres de las primeras cuatro definiciones con que comienzan *Los Elementos* de Euclides. La faltante dice: los extremos de líneas son puntos. Se menciona hasta ahora porque haremos la analogía con las superficies. Euclides dice: superficie

es lo que únicamente tiene anchura y longitud. Los extremos de superficies son líneas. Un plano es una superficie que se encuentra de manera uniforme con las rectas sobre sí misma. Con ello tenemos las primeras siete definiciones de *Los Elementos*.

Por su parte, D. Hilbert, en *The Foundations of Geometry*, en los tres axiomas de conexión restantes, dice:

(III) Tres puntos P_0, P_1 y P_2 no colineales determinan completamente un plano. Escribimos $P_0P_1P_2 = \mathcal{P}$. Empleamos expresiones como P_0, P_1 y P_2 están en \mathcal{P} , P_0, P_1 y P_2 son puntos de \mathcal{P} , \mathcal{P} pasa por P_0, P_1 y por P_2 .

(IV) Cualesquiera tres puntos P_0, P_1 y P_2 no colineales en \mathcal{P} , determinan completamente el plano \mathcal{P} . Si $P_3 \in \mathcal{P}$ y P_0, P_1 y P_3 no son colineales, entonces $P_0P_1P_3 = \mathcal{P}$.

(V) Si dos puntos P_1 y P_2 de una recta \mathcal{L} están en \mathcal{P} , entonces toda la recta \mathcal{L} está en \mathcal{P} . Esto lo escribimos como $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}$.

Los primeros planos con los que hemos tenido contacto son los que llamamos planos coordenados (ver la Figura 4). Como es costumbre, comencemos con un ejemplo particular.

EJEMPLO 41. Sean $P_0 = (1, 1, 1)$, $P_1 = (-1, 2, 3)$ y $P_2 = (-1, -2, -1)$. Con ellos podemos hacer $\mathbf{v} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0$ y $\mathbf{u} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0$. Entonces $\mathbf{v} = (-2, 1, 2)$ y $\mathbf{u} = (-2, -3, -2)$. Por el axioma (III) de Hilbert, el plano \mathcal{P} que contiene estos puntos está bien determinado y ahora en virtud del axioma (V), las rectas $\mathcal{L}_1 : P_0 + t_1\mathbf{v}$ y $\mathcal{L}_2 : P_0 + t_2\mathbf{u}$ están contenidas en \mathcal{P} . Entonces los puntos $P = (x, y, z)$ de la forma $P = P_0 + t_1\mathbf{v} + t_2\mathbf{u}$ satisfacen una propiedad en común con \mathbf{v} y \mathbf{u} . Ver Figura 34 donde se muestra un punto P con $t_1 > 0$ y $t_2 < 0$. Si igualamos coordenadas, obtenemos

$$\begin{aligned} x &= 1 - 2t_1 - 2t_2 \\ y &= 1 + t_1 - 3t_2 \\ z &= 1 + 2t_1 - 2t_2. \end{aligned}$$

Una vez que tenemos $\mathbf{v} = (-2, 1, 2)$ y $\mathbf{u} = (-2, -3, -2)$, calculamos el producto cruz,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \times \mathbf{u} &= (-2, 1, 2) \times (-2, -3, -2) \\ &= (4, -8, 8), \end{aligned}$$

y hacemos $\mathbf{n} = \frac{1}{4}(\mathbf{v} \times \mathbf{u}) = (1, -2, 2)$. Como tenemos que $\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{n}, \mathbf{u} \rangle = 0$, entonces $P = P_0 + t_1\mathbf{v} + t_2\mathbf{u}$ satisface

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n}, \mathbf{p} - \mathbf{p}_0 \rangle &= \langle \mathbf{n}, t_1\mathbf{v} + t_2\mathbf{u} \rangle \\ &= t_1 \langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle + t_2 \langle \mathbf{n}, \mathbf{u} \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Es decir, que así como \mathbf{v} y \mathbf{u} , el vector $\mathbf{p} - \mathbf{p}_0$ también es ortogonal a \mathbf{n} . Luego, sustituyendo variables y datos

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (1, -2, 2), (x - 1, y - 1, z - 1) \rangle \\ &= (x - 1) - 2(y - 1) + 2(z - 1). \end{aligned}$$

Acomodando términos escribimos

$$x - 2y + 2z - 1 = 0.$$

Note que si hubiésemos empleado directamente $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$, habríamos obtenido

$$4x - 8y + 8z - 4 = 0.$$

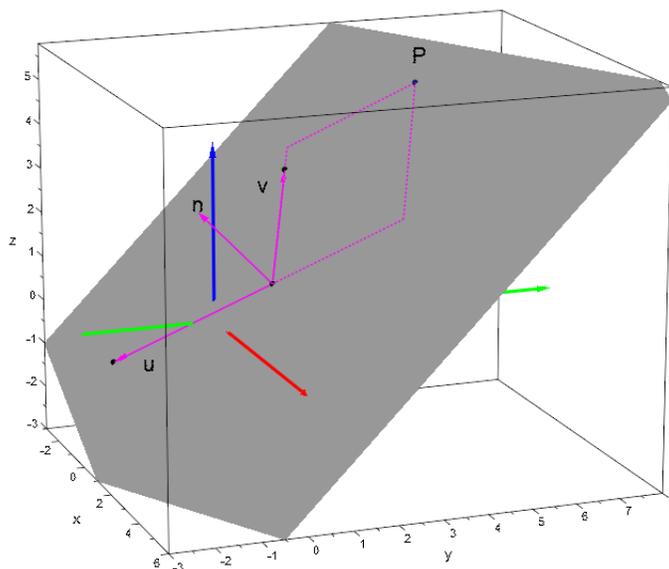


Figura 34

Como hicimos con las rectas en el plano, generalicemos estas ideas. Dados tres puntos $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ no colineales, el plano \mathcal{P} por ellos determinados es el conjunto

$$(2.1) \quad \mathcal{P} = \{P \in \mathbb{R}^3 \mid \exists t_1, t_2 \in \mathbb{R} : P = P_0 + t_1(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) + t_2(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0)\}.$$

Si designamos $\mathbf{v} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0 = (v_1, v_2, v_3)$ y $\mathbf{u} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0 = (u_1, u_2, u_3)$, entonces escribimos

$$(2.2) \quad \mathcal{P} = \{P \in \mathbb{R}^3 \mid \exists t_1, t_2 \in \mathbb{R} : P = P_0 + t_1\mathbf{v} + t_2\mathbf{u}\}.$$

Cualquiera de estas ecuaciones es la llamada **ecuación vectorial** del plano \mathcal{P} . De acuerdo con esto, también nos referiremos a \mathcal{P} como el plano que pasa por P_0 y es paralelo a \mathbf{v} y \mathbf{u} .

Igualando las coordenadas de P en la ecuación (2.2), obtenemos

$$(2.3) \quad \begin{aligned} x &= x_0 + t_1v_1 + t_2u_1 \\ y &= y_0 + t_1v_2 + t_2u_2 \\ z &= z_0 + t_1v_3 + t_2u_3 \end{aligned}$$

que serán las **ecuaciones paramétricas** plano \mathcal{P} .

Si hacemos $\mathbf{n} = (A, B, C)$ donde $\mathbf{n} = \mathbf{v} \times \mathbf{u}$, entonces diremos que \mathcal{P} es el plano que pasa por P_0 y es ortogonal a \mathbf{n} . Con esta última referencia escribimos

$$\mathcal{P} = \{P \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \mathbf{n}, \mathbf{p} - \mathbf{p}_0 \rangle = 0\}.$$

Sustituyendo las coordenadas obtenemos

$$\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0\},$$

distribuyendo y reagrupando términos llegamos a

$$(2.4) \quad Ax + By + Cz + D = 0$$

donde $D = -\langle \mathbf{n}, \mathbf{p}_0 \rangle$. Esta ecuación es la llamada **ecuación cartesiana** del plano \mathcal{P} y \mathbf{n} se llama **vector normal**.

3. Rectas y planos en el espacio

Recordando del Capítulo 1 que dado un $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ no nulo podíamos definir \mathbf{v}_p ortogonal a \mathbf{v} y en el Capítulo 2 podíamos hablar de dos rectas perpendiculares entre ellas, cada una con vector de dirección \mathbf{v} y \mathbf{v}_p , al pasar al espacio tridimensional, dado un vector no nulo $\mathbf{n} = (A, B, C)$, resulta que el conjunto de vectores ortogonales a \mathbf{n} es un plano que pasa por el origen. Sea V tal conjunto. Entonces

$$V = \{(x, y, z) : Ax + By + Cz = 0\}.$$

Estos planos, así como las rectas, ya sean bidimensionales o tridimensionales que pasan por el origen, juegan un importante rol en cursos más avanzados.

El caso general es cuando el plano pasa por un P_0 , el plano es el conjunto de puntos P tales que $\mathbf{p} - \mathbf{p}_0$ es ortogonal a \mathbf{n} ; si ocurriese que $\langle \mathbf{n}, \mathbf{p}_0 \rangle = 0$, se trataría de un plano que pasa por el origen.

En el siguiente ejemplo también calculamos la **ecuación cartesiana ordinaria**, que al igual que en las rectas en el plano, será única para cada plano que no es paralelo a cualquiera de los planos coordenados, no contiene al origen y es de la forma

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

EJEMPLO 42. Las rectas oblicuas $\mathcal{L}_1 : (1, -2, 1) + t_1(1, 3, 3)$ y $\mathcal{L}_2 : -(3, 7, 1) + t_2(2, -1, -4)$ se intersectan en un punto. Para determinarlo resolvemos para t_1 y t_2 el sistema de tres ecuaciones lineales que surgen de igualar las ecuaciones simétricas de ambas rectas:

$$\begin{aligned}t_1 - 2t_2 &= -4 \\3t_1 + t_2 &= -5 \\3t_1 + 4t_2 &= -2.\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema encontramos que $t_1 = -2$ y $t_2 = 1$ y con las ecuaciones vectoriales calculamos que $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = (-1, -8, -5)$. Sea pues $P_0 = (-1, -8, -5)$. Se trata de dos rectas coplanares. El plano que las contiene tiene como vectores paralelos los vectores de dirección de las rectas; luego con $\mathbf{v} = (1, 3, 3)$ y $\mathbf{u} = (2, -1, -4)$ calculamos enseguida

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= \mathbf{v} \times \mathbf{u} \\&= (1, 3, 3) \times (2, -1, -4) \\&= (-9, 10, -7)\end{aligned}$$

y $\langle \mathbf{n}, \mathbf{p}_0 \rangle = 9 - 80 + 35 = -36$. Así pues, una ecuación cartesiana del plano es

$$-9x + 10y - 7z + 36 = 0$$

o de manera equivalente

$$9x - 10y + 7z = 36.$$

La Figura 35 muestra el plano \mathcal{P} , las rectas coplanares y el vector normal $\mathbf{n} = (9, -10, 7)$. También se indican los puntos en los que \mathcal{P} intersecta a los ejes coordenados, los cuales son $A_1 = (4, 0, 0)$, $A_2 = (0, -\frac{18}{5}, 0)$ y $A_3 = (0, 0, \frac{36}{7})$. Entonces de manera análoga al caso de las rectas, la ecuación

$$\frac{x}{4} - \frac{5}{18}y + \frac{7}{36}z = 1$$

es la ecuación cartesiana ordinaria y es única para este plano.

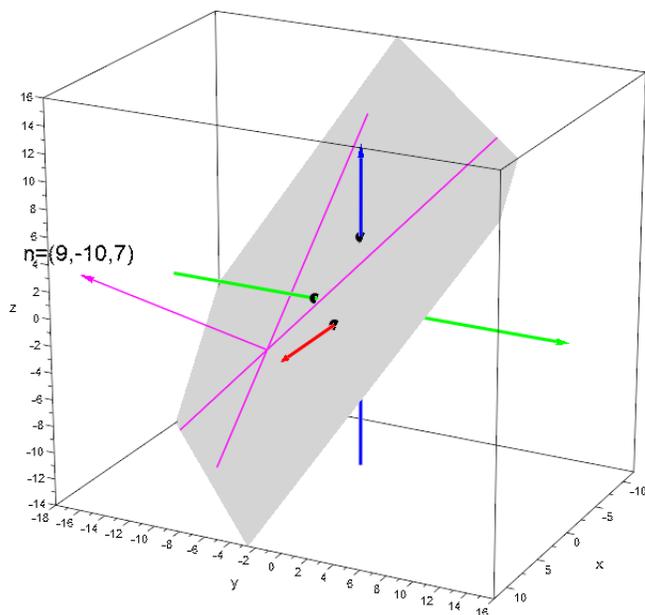


Figura 35

3. Distancia de un punto a un plano

De manera análoga al caso de la distancia de un punto a una recta en el plano cartesiano, definimos la distancia de un punto P en el espacio a un plano \mathcal{P} con ecuación cartesiana $Ax + By + Cz + D = 0$ como la longitud del segmento perpendicular al plano con extremos en P y un $S \in \mathcal{P}$. Tal longitud es la proyección de $\mathbf{p} - \mathbf{s}$ sobre el vector normal \mathbf{n} del plano donde $S \in \mathcal{P}$. Una de las virtudes del álgebra vectorial es que los cálculos realizados para obtener la fórmula para $d(P, \mathcal{L})$ en la ecuación (2.1) del Capítulo 2 son exactamente los mismos, por lo que

$$d(P, \mathcal{P}) = \frac{|\langle \mathbf{p} - \mathbf{s}, \mathbf{n} \rangle|}{\|\mathbf{n}\|}.$$

Desde luego que ahora $\mathbf{n} = (A, B, C)$, $P = (x_0, y_0, z_0)$, $S = (x_1, y_1, z_1)$ y $D = -\langle \mathbf{n}, \mathbf{s} \rangle = -(Ax_1 + By_1 + Cz_1)$ y en consecuencia

$$(3.1) \quad d(P, \mathcal{P}) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Echando un vistazo a la prueba del caso bidimensional de que $d(P, \mathcal{L})$ no depende de la elección del punto S en la recta, el álgebra vectorial nos indica que dicha prueba tampoco depende si se trata dos o tres dimensiones, así que con el mismo argumento concluimos que $d(P, \mathcal{P})$ no depende de la elección del punto S en el plano (ver Figura 36).

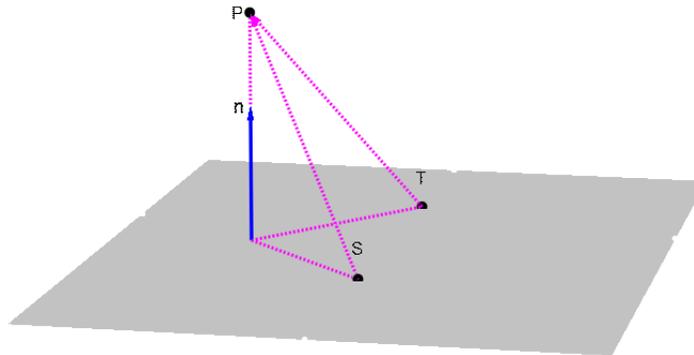


Figura 36

EJEMPLO 43. Se dan los planos $\mathcal{P}_1 : 2x - y + 2z = 0$ y $\mathcal{P}_2 : x + 2y - 2z + 3 = 0$. El conjunto de puntos que equidistan de estos planos satisfacen

$$\frac{|2x - y + 2z|}{3} = \frac{|x + 2y - 2z + 3|}{3}.$$

Resolviendo con las propiedades de valor absoluto llegamos a que

$$2x - y + 2z = x + 2y - 2z + 3$$

o

$$2x - y + 2z = -(x + 2y - 2z + 3).$$

Reagrupando términos obtenemos

$$x - 3y + 4z - 3 = 0$$

o

$$3x + y + 3 = 0.$$

Es decir, el conjunto consta de dos planos \mathcal{Q}_1 y \mathcal{Q}_2 con vectores normales $\mathbf{n}_1 = (1, -3, 4)$ y $\mathbf{n}_2 = (3, 1, 0)$, que además son ortogonales. En la Figura 37, \mathcal{Q}_1 y \mathcal{Q}_2 se muestran en azul claro y magenta respectivamente. Además \mathcal{Q}_2 no se intersecta con el eje Z . Los cuatro planos se intersectan en una recta (ver el Ejercicio 114).

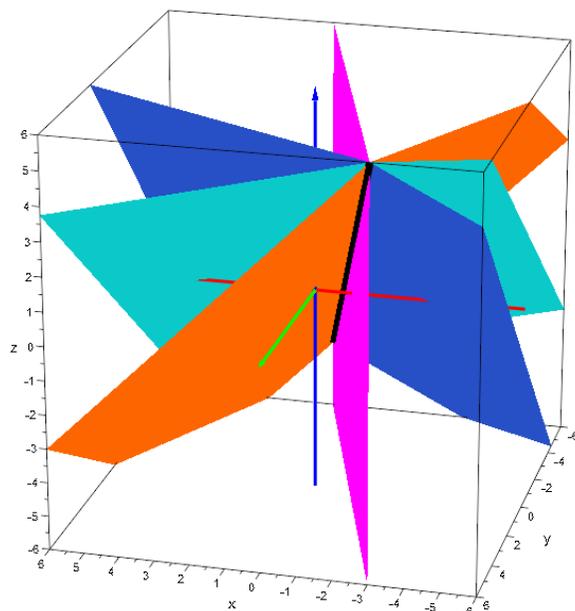


Figura 37

El Ejemplo 43 pone de manifiesto algunas de las relaciones entre planos y propiedades de éstas que estudiaremos en la siguiente sección. Antes de continuar con dicha sección, damos las siguientes definiciones, también de manifiesto en este mismo ejemplo.

DEFINICIÓN 13. *Dados dos planos \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 con vectores normales \mathbf{n}_1 y \mathbf{n}_2 , definimos el ángulo entre \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 como el ángulo menor que un ángulo recto entre \mathbf{n}_1 y \mathbf{n}_2 . Asimismo \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 son paralelos (ortogonales) si \mathbf{n}_1 y \mathbf{n}_2 lo son.*

DEFINICIÓN 14. *Sean \mathcal{L} una recta con vector de dirección \mathbf{v} y \mathcal{P} un plano con vector normal \mathbf{n} . Diremos que \mathcal{L} es paralela a \mathcal{P} si $\langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle = 0$. También diremos que \mathcal{L} es perpendicular a \mathcal{P} si \mathbf{v} y \mathbf{n} son paralelos.*

Si un plano \mathcal{P} es paralelo a un eje coordenado, en cualquier ecuación cartesiana no aparecerá la variable de tal eje. En el Ejemplo 43 el plano \mathcal{Q}_2 es paralelo al eje Z y en su ecuación cartesiana el coeficiente de z es cero, pues en su vector normal, desde luego, dicha coordenada será nula.

Terminamos esta sección con un hecho que con álgebra de vectores es sencillo de establecer. Si \mathcal{L} es una recta en el espacio con vector de dirección \mathbf{v} y $P \in \mathbb{R}^3$, entonces para cualquier $S \in \mathcal{L}$

$$d(P, \mathcal{L}) = \frac{\|(\mathbf{p} - \mathbf{s}) \times \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}$$

(ver el Ejercicio 93).

4. Intersecciones de recta con plano y plano con plano

Intuitivamente se observa que cuando una recta se interseca con un plano, puede hacerlo en un único punto o bien toda la recta está contenida en el plano, lo cual ocurre sólo si la recta y el plano son paralelos. También es fácil pensar que una recta paralela a un plano, éste puede no contener puntos de aquélla.

3. Rectas y planos en el espacio

Dados una recta \mathcal{L} y un plano \mathcal{P} , un método para encontrar $\mathcal{L} \cap \mathcal{P}$ consiste en sustituir las ecuaciones paramétricas de la recta en la ecuación cartesiana del plano. Si

$$\begin{aligned}x &= q_1 + tv_1 \\y &= q_2 + tv_2 \\z &= q_3 + tv_3\end{aligned}$$

son las ecuaciones paramétricas de \mathcal{L} y $Ax + By + Cz + D = 0$ es una ecuación cartesiana de \mathcal{P} , entonces el método consiste en resolver para t

$$A(q_1 + tv_1) + B(q_2 + tv_2) + C(q_3 + tv_3) + D = 0$$

y despejando a t obtenemos

$$\begin{aligned}t &= \frac{-D - (Aq_1 + Bq_2 + Cq_3)}{Av_1 + Bv_2 + Cv_3} \\&= \frac{\langle \mathbf{p}_0, \mathbf{n} \rangle - \langle \mathbf{q}_0, \mathbf{n} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle}.\end{aligned}$$

El punto $P = \mathbf{q}_0 + \left(\frac{\langle \mathbf{p}_0, \mathbf{n} \rangle - \langle \mathbf{q}_0, \mathbf{n} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle} \right) \mathbf{v} \in \mathcal{P}$, pues en realidad así se eligió el punto; tenemos que

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{p} - \mathbf{p}_0, \mathbf{n} \rangle &= \left\langle \mathbf{q}_0 + \left(\frac{\langle \mathbf{p}_0, \mathbf{n} \rangle - \langle \mathbf{q}_0, \mathbf{n} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle} \right) \mathbf{v} - \mathbf{p}_0, \mathbf{n} \right\rangle \\&= \langle \mathbf{q}_0, \mathbf{n} \rangle - \langle \mathbf{p}_0, \mathbf{n} \rangle + \left\langle \left(\frac{\langle \mathbf{p}_0, \mathbf{n} \rangle - \langle \mathbf{q}_0, \mathbf{n} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle} \right) \mathbf{v}, \mathbf{n} \right\rangle \\&= \langle \mathbf{q}_0, \mathbf{n} \rangle - \langle \mathbf{p}_0, \mathbf{n} \rangle + (\langle \mathbf{p}_0, \mathbf{n} \rangle - \langle \mathbf{q}_0, \mathbf{n} \rangle) \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle} \\&= 0.\end{aligned}$$

TEOREMA 8. *La recta $\mathcal{L} : Q_0 + t\mathbf{v}$ y el plano $\mathcal{P} : \langle \mathbf{p} - \mathbf{p}_0, \mathbf{n} \rangle = 0$ son paralelos si y sólo si se cumple que $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}$ o $\mathcal{L} \cap \mathcal{P} = \emptyset$.*

DEMOSTRACIÓN. Cuando una recta \mathcal{L} no es paralela a un plano \mathcal{P} , tenemos que $\mathcal{L} \cap \mathcal{P}$ consta de un punto. Para hacerlo ver sean $\mathcal{L} : Q_0 + t\mathbf{v}$ y $\mathcal{P} : \langle \mathbf{p} - \mathbf{p}_0, \mathbf{n} \rangle = 0$. Para encontrar el punto $S \in \mathcal{L} \cap \mathcal{P}$, sustituimos $\mathbf{p} = \mathbf{q}_0 + t\mathbf{v}$ en la ecuación del plano y resolvemos para t . Así pues, buscamos t tal que

$$\begin{aligned}0 &= \langle \mathbf{q}_0 + t\mathbf{v} - \mathbf{p}_0, \mathbf{n} \rangle \\&= \langle \mathbf{q}_0 - \mathbf{p}_0, \mathbf{n} \rangle + t \langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle\end{aligned}$$

o de manera equivalente

$$\begin{aligned}t &= \frac{\langle \mathbf{p}_0 - \mathbf{q}_0, \mathbf{n} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle} \\&= \frac{\langle \mathbf{p}_0, \mathbf{n} \rangle - \langle \mathbf{q}_0, \mathbf{n} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle}\end{aligned}$$

que, como \mathbf{v} y \mathbf{n} no son ortogonales, $\langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle \neq 0$. Con este valor de t calculamos el punto S con la ecuación vectorial de la recta. Hemos probado así que si \mathcal{L} no es paralela a \mathcal{P} , entonces no se cumple $\mathcal{L} \cap \mathcal{P} = \emptyset$, pues $S \in \mathcal{L} \cap \mathcal{P}$; la unicidad de este mismo punto S implica que

tampoco se verifica que $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}$, pues se tendría $\mathcal{L} \cap \mathcal{P} = \mathcal{L}$ violando con ello la unicidad. Luego, por contrapositiva, $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}$ o $\mathcal{L} \cap \mathcal{P} = \emptyset$ implica que \mathcal{L} es paralela a \mathcal{P} .

Recíprocamente, si \mathcal{L} es paralela a \mathcal{P} , entonces por definición $\langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle = 0$. Procedamos a deducir que $\mathcal{L} \cap \mathcal{P} = \emptyset$ o $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}$, que equivale a que si $\mathcal{L} \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}$. Para deducir esta última afirmación, haremos ver que $\mathcal{L} \cap \mathcal{P}$ consta de al menos dos puntos y así el axioma de conexión (V) de Hilbert nos garantiza la contención. Elijamos un $P_1 \in \mathcal{L} \cap \mathcal{P}$, lo cual podemos hacer por hipótesis. Como $P_1 \in \mathcal{L}$, hay un $t_1 \in \mathbb{R}$ tal que $P_1 = P_0 + t_1 \mathbf{v}$. Simplemente tomemos $P_2 = P_0 + 2t_1 \mathbf{v}$. Definitivamente $P_2 \in \mathcal{L}$ y también tenemos que $P_1 \neq P_2$. Además

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0, \mathbf{n} \rangle &= \langle 2t_1 \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Así que $P_1, P_2 \in \mathcal{L} \cap \mathcal{P}$ como se quería probar. □

En el Ejemplo 39 encontramos las intersecciones de una recta con los tres planos coordenados. Cada uno de estos puntos fueron un caso particular de este método, todos ellos con el punto \mathbf{p}_0 como el origen y \mathbf{n} como los vectores canónicos $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$. Así pues, una recta $\mathcal{L} : Q_0 + t\mathbf{v}$ interseca a los planos coordenados con los valores del parámetro t como siguen:

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{-\langle \mathbf{q}_0, \hat{\mathbf{i}} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{i}} \rangle} = -\frac{q_1}{v_1} \quad \text{para el plano } YZ, \\ t_2 &= \frac{-\langle \mathbf{q}_0, \hat{\mathbf{j}} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{j}} \rangle} = -\frac{q_2}{v_2} \quad \text{para el plano } XZ, \\ t_3 &= \frac{-\langle \mathbf{q}_0, \hat{\mathbf{k}} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{k}} \rangle} = -\frac{q_3}{v_3} \quad \text{para el plano } XY. \end{aligned}$$

Cada valor de t en la tabla corresponde a los puntos de la recta sobre el plano coordenado correspondiente.

A continuación estudiaremos las diferentes intersecciones entre dos o tres planos. Dos planos no paralelos se intersectan en una recta.

EJEMPLO 44. Sean $\mathcal{P}_1 : 2x - 3y + 4z = 12$ y $\mathcal{P}_2 : x - 2y + 7z = 14$. Es inmediato que $\mathbf{n}_1 = (2, -3, 4)$ y $\mathbf{n}_2 = (1, -2, 7)$ no son paralelos. Encontrar la recta $\mathcal{L} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ equivale a resolver el sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas

$$\begin{aligned} a) \quad &2x - 3y + 4z = 12 \\ b) \quad &x - 2y + 7z = 14. \end{aligned}$$

Multiplicando (b) por -2 y sumándola a (a) obtenemos

$$\begin{aligned} a) \quad &y - 10z = -16 \\ b) \quad &x - 2y + 7z = 14. \end{aligned}$$

Ahora multiplicamos (a) por 2 y la sumamos a (b)

$$\begin{aligned} a) \quad &y - 10z = -16 \\ b) \quad &x - 13z = -18. \end{aligned}$$

El sistema resultante es, en realidad, las ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned} x &= -18 + 13t \\ y &= -16 + 10t \\ z &= t \end{aligned}$$

que corresponden a la recta que pasa por $P_0 = (-18, -16, 0) \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ y tiene vector de dirección $\mathbf{v} = (13, 10, 1) = -\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_1$.

El Ejemplo 44 pudo resolverse encontrando un punto en $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ asignando cero a una coordenada cualquiera. En este caso, sin proponerse, se hizo $z = 0$ y resolviendo el sistema en dos ecuaciones con dos incógnitas resultante

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 12 \\ x - 2y &= 14 \end{aligned}$$

concluiríamos que $P_0 = (-18, -16, 0)$. Con la elección $x = 0$ encontramos que $P_1 = (0, -\frac{28}{13}, \frac{18}{13})$ es otro punto en $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ y por ende en la recta \mathcal{L} con un vector de dirección paralelo a $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$. Observe que $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0 = \frac{18}{13}\mathbf{v}$. Una situación similar ocurre cuando elegimos $y = 0$.

Bien, la razón por la que se optó por el primer método obedece a que es aplicable a cualquier sistema de ecuaciones lineales y sus fundamentos corresponden a otro curso. Por el momento sólo expondremos el método que se denomina de Gauss-Jordan. Ver los comentarios previos al Ejemplo 33.

Emplearemos la notación del Ejercicio 43 para denotar el vector normal del plano i -ésimo \mathcal{P}_i como $\mathbf{n}_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3})$; así que cuando se trata de dos planos, escribiremos sus ecuaciones cartesianas como

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 &: a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ \mathcal{P}_2 &: a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2. \end{aligned}$$

y cuando sea necesario agregaremos $\mathcal{P}_3 : a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3$. Durante los cálculos no necesitamos acarrear las literales, así que usaremos la llamada **matriz aumentada**

$$(4.1) \quad \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \end{array} \right].$$

La matriz que consiste de todas excepto la última columna se le llama **matriz de coeficientes**.

En el manejo de matrices se tienen tres operaciones elementales sobre las filas o renglones:

Permutar renglones: se permutan los renglones i -ésimo y k -ésimo, con $i \neq k$; se denota $R_i \leftrightarrow R_k$.

Multiplicar un renglón por un escalar: se multiplica el i -ésimo renglón por un escalar $\alpha \neq 0$; se denota αR_i .

Sumar a un renglón el múltiplo escalar de otro renglón: al i -ésimo renglón se le suma el múltiplo escalar de un k -ésimo renglón con $i \neq k$ y $\alpha \neq 0$ y se sustituye en la posición i -ésima; se denota $\alpha R_k + R_i \rightarrow R_i$.

Con estas operaciones podemos llevar a la matriz (4.1) a lo que se denomina **Forma escalonada reducida por renglones**.

DEFINICIÓN 15. Una matriz está en su forma escalonada reducida por renglones o en su forma RREF por sus siglas en inglés si tiene las siguientes propiedades:

1. Si tiene renglones enteramente de ceros, éstos se encuentran en las filas inferiores. Se denominan renglones nulos.
2. En cualquier renglón que no consta sólo de ceros, el primer elemento no cero es 1 y se llama **pivote**.

3. En dos renglones no nulos consecutivos, el pivote del renglón inferior está más a la derecha del pivote del renglón superior.
4. Las columnas que contienen a los pivotes constan sólo de ceros en el resto de las entradas.

EJEMPLO 45. En el Ejemplo 44, la matriz aumentada es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 12 \\ 1 & -2 & 7 & 14 \end{array} \right].$$

Entonces una sucesión finita de operaciones elementales sobre las filas para llevarla a la forma RREF es

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 12 \\ 1 & -2 & 7 & 14 \end{array} \right] & R_1 \leftrightarrow R_2 \\ \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & -2 & 7 & 14 \\ 2 & -3 & 4 & 12 \end{array} \right] & -2R_1 + R_2 \rightarrow R_2 \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 7 & 14 \\ 0 & \mathbf{1} & -10 & -16 \end{array} \right] & 2R_2 + R_1 \rightarrow R_1 \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -13 & -18 \\ 0 & 1 & -10 & -16 \end{array} \right]. & \end{aligned}$$

Según la Definición 15, la última matriz está en la forma RREF y el **sistema de ecuaciones equivalente** es

$$\begin{aligned} x - 13z &= -18 \\ y - 10z &= -16. \end{aligned}$$

Los pivotes se indicaron en negrita cuando aparecieron por primera vez. Una operación elemental por filas no debe modificar un pivote.

Cuando se trata de tres planos, se presentan diferentes situaciones. Veamos diferentes ejemplos.

EJEMPLO 46. Se dan los planos

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 &: 2x + 3y - 4z = 6 \\ \mathcal{P}_2 &: x + \frac{3}{2}y - 2z = -7 \\ \mathcal{P}_3 &: -4x - 6y + 8z = 1. \end{aligned}$$

Entonces los vectores normales son

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1 &= (2, 3, -4) \\ \mathbf{n}_2 &= \left(1, \frac{3}{2}, -2\right) \\ \mathbf{n}_3 &= (-4, -6, 8). \end{aligned}$$

3. Rectas y planos en el espacio

Se ve de inmediato que $\mathbf{n}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_3 = -2\mathbf{n}_1$ y si intentamos usar el método de Gauss-Jordan con la matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 6 \\ 1 & \frac{3}{2} & -2 & -7 \\ -4 & -6 & 8 & 1 \end{array} \right]$$

resulta que su forma RREF es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

La segunda fila nos dice que $0x + 0y + 0z = 1$ lo cual es una inconsistencia, es decir, la intersección entre tres planos distintos y paralelos es el vacío, que a partir de ahora lo simbolizaremos con \emptyset . En la Figura 38a se ven tres planos paralelos.

EJEMPLO 47. Se dan los planos

$$\mathcal{P}_1 : 3x + 2y + 2z = -3$$

$$\mathcal{P}_2 : 2x - y + 2z = 6$$

$$\mathcal{P}_3 : 4x + 5y + 2z = -5.$$

Entonces realizando eliminación Gaussiana con la matriz aumentada tenemos

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & -5 \end{array} \right] & \xrightarrow{\frac{1}{3}R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{24}{7} \\ 0 & \frac{7}{3} & -\frac{2}{3} & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} -\frac{7}{3}R_2 + R_3 \\ \rightarrow R_3 \end{array} \\ \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & -5 \end{array} \right] & \begin{array}{l} -2R_1 + R_2 \\ \rightarrow R_2 \\ -4R_1 + R_3 \\ \rightarrow R_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{7} & -\frac{24}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{7}R_3} \\ \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & -\frac{2}{7} & -\frac{2}{3} & 8 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -1 \end{array} \right] & \xrightarrow{-\frac{3}{7}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{7} & -\frac{24}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Esta última no está en la forma RREF, pues no cumple con (4) de la Definición 15. En este caso se dice que la matriz está en su forma escalonada por renglones. La forma RREF es en realidad

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{6}{7} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

pero para decidir que $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \emptyset$ basta con la primera.

Lo que sigue es un pequeño bosquejo de lo que se estudia en un primer curso de Álgebra Lineal. Comenzamos con los vectores normales

$$\mathbf{n}_1 = (3, 2, 2)$$

$$\mathbf{n}_2 = (2, -1, 2)$$

$$\mathbf{n}_3 = (4, 5, 2).$$

Con las operaciones elementales por fila lo que hicimos fueron múltiplos escalares de estos vectores y sumas de los mismos. Por ejemplo, en las dos primeras se realizaron las siguientes sumas de vectores

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3}\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 &= \left(0, -\frac{7}{3}, \frac{2}{3}\right) \\ -\frac{4}{3}\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_3 &= -\left(0, -\frac{7}{3}, \frac{2}{3}\right). \end{aligned}$$

Por ello, en la forma escalonada por renglones, el renglón nulo es en realidad

$$\begin{aligned} \left(-\frac{2}{3}\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2\right) + \left(-\frac{4}{3}\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_3\right) &= -2\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 + \mathbf{n}_3 \\ &= (0, 0, 0). \end{aligned}$$

O lo que es lo mismo $\mathbf{n}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{n}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{n}_3$. Esto dice que N_1 está en el plano que pasa por el origen

$$\mathcal{P} = \{t_1\mathbf{n}_2 + t_2\mathbf{n}_3\}.$$

En Álgebra Lineal esta idea se llama **dependencia lineal**, pero por ahora diremos que los vectores \mathbf{n}_1 , \mathbf{n}_2 y \mathbf{n}_3 son **vectores coplanares**. La Figura 38b muestra tres planos no paralelos pero que sus vectores normales son coplanares; N_1 , N_2 y $N_3 \in \mathcal{P}$ donde el origen también está en \mathcal{P} .

EJEMPLO 48. Los planos paralelos $\mathcal{P}_1 : x + 2y - z = 1$ y $\mathcal{P}_2 : 2x + 4y - 2z = 1$ junto con $\mathcal{P}_3 : 3x - y - 5z = 2$ son tales que $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \emptyset$. Se deja al estudiante emplear la eliminación Gaussiana para constatarlo algebraicamente. La Figura 38c muestra dos planos paralelos y un tercer plano no paralelo.

Cuando un sistema de ecuaciones lineales no tiene solución se dice que es **inconsistente**.

DEFINICIÓN 16. *Un conjunto finito de puntos $\{N_1, \dots, N_k\}$ se dicen coplanares si hay un plano \mathcal{P} con vector normal \mathbf{n} tal que si $P \in \mathcal{P}$, entonces $\langle \mathbf{n}_1 - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = \dots = \langle \mathbf{n}_k - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = 0$.*

Sabemos que las ecuaciones $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ y $Ax + By + Cz + D_2 = 0$ representan dos planos paralelos; serán el mismo plano si y sólo si $D_1 = D_2$ (ver el Ejercicio 122). Cuando en la ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ hacemos variar a D , geoméricamente estamos desplazando paralelamente el plano manteniéndolo siempre ortogonal al vector (A, B, C) . Podemos ver que en la Figura 38d uno de los tres planos de la Figura 38b ha sido así desplazado hasta que las tres rectas paralelas son *coincidentes*, es decir, son una misma recta.

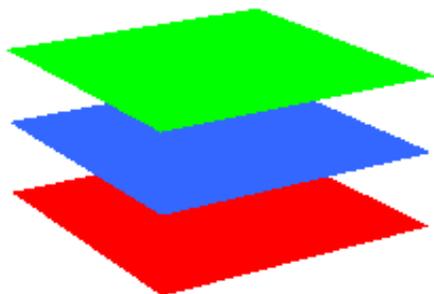


Figura 38a

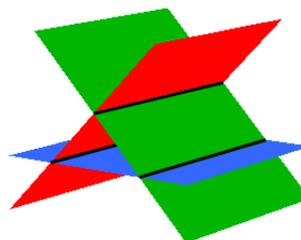


Figura 38b

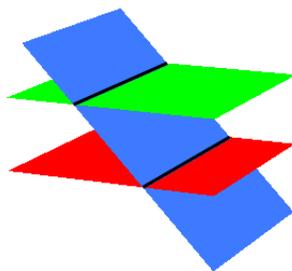


Figura 38c

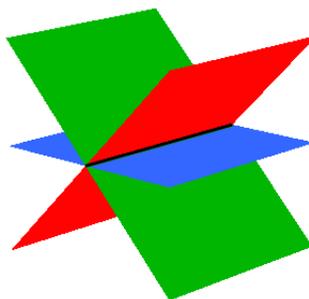


Figura 38d

EJEMPLO 49. Retomemos los planos del Ejemplo 47 con la variante de que en \mathcal{P}_3 el lado derecho de la ecuación será k . Con eliminación Gaussiana encontraremos el valor de k que haga que $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$ sea una recta en el espacio.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & k \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{3}R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{24}{7} \\ 0 & \frac{7}{3} & -\frac{2}{3} & k-4 \end{array} \right] \begin{array}{l} -\frac{7}{3}R_2 + R_3 \\ \rightarrow R_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & k \end{array} \right] \begin{array}{l} -2R_1 + R_2 \\ \rightarrow R_2 \\ -4R_1 + R_3 \\ \rightarrow R_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{24}{7} \\ 0 & 0 & 0 & k+12 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{7}R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 8 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & k-4 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{3}{7}R_2}$$

Luego, con $k = -12$ evitamos la inconsistencia. Al continuar con la eliminación Gaussiana

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{7} & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{7} & -\frac{24}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad -\frac{2}{3}R_2 + R_1 \rightarrow R_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{6}{7} & \frac{9}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{7} & -\frac{24}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Entonces, como en el Ejemplo 44, el sistema equivalente es

$$\begin{aligned} x + \frac{6}{7}z &= \frac{9}{7} \\ y - \frac{2}{7}z &= -\frac{24}{7} \end{aligned}$$

que nos da las ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned} x &= \frac{9}{7} - \frac{6}{7}t \\ y &= -\frac{24}{7} + \frac{2}{7}t \\ z &= t. \end{aligned}$$

Ahora es fácil notar que se trata de la recta \mathcal{L} que pasa por $P_0 = (\frac{9}{7}, -\frac{24}{7}, 0)$ y tiene como vector de dirección a $\mathbf{v} = 7(-\frac{6}{7}, \frac{2}{7}, 1) = (-6, 2, 7)$. Luego,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 &: 3x + 2y + 2z = -3 \\ \mathcal{P}_2 &: 2x - y + 2z = 6 \\ \mathcal{P}_3 &: 4x + 5y + 2z = -12 \end{aligned}$$

son tres planos tales que $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \mathcal{L} = \{P_0 + t\mathbf{v} : t \in \mathbb{R}\}$.

EJEMPLO 50. El caso que resta para la situación de tres planos no paralelos es cuando la intersección $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$ es un punto.

Sean los planos

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 &: 2x + y + 2z = 2 \\ \mathcal{P}_2 &: x + y + 3z = 2 \\ \mathcal{P}_3 &: 7x + 4y - z = -2. \end{aligned}$$

Aplicamos el método de Gauss-Jordan para llevar la matriz aumentada a su forma RREF.

3. Rectas y planos en el espacio

$$\begin{array}{ccc}
 \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 7 & 4 & -1 & -2 \end{array} \right] & R_1 \leftrightarrow R_2 & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \end{array} \right] \quad -\frac{1}{10}R_3 \\
 \\
 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 7 & 4 & -1 & -2 \end{array} \right] & \begin{array}{l} -2R_1 + R_2 \\ \rightarrow R_2 \\ -7R_1 + R_3 \\ \rightarrow R_3 \end{array} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] & \begin{array}{l} -4R_3 + R_2 \\ \rightarrow R_2 \\ -3R_3 + R_1 \\ \rightarrow R_1 \end{array} \\
 \\
 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & -3 & -22 & -16 \end{array} \right] & \begin{array}{l} -R_2 \\ 3R_2 + R_3 \\ \rightarrow R_3 \end{array} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] & \begin{array}{l} -R_2 + R_1 \\ \rightarrow R_1 \end{array} \\
 \\
 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] & & & &
 \end{array}$$

Hemos encontrado que la solución al sistema es $x = 1, y = -2, z = 1$. Entonces $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \{(1, -2, 1)\}$.

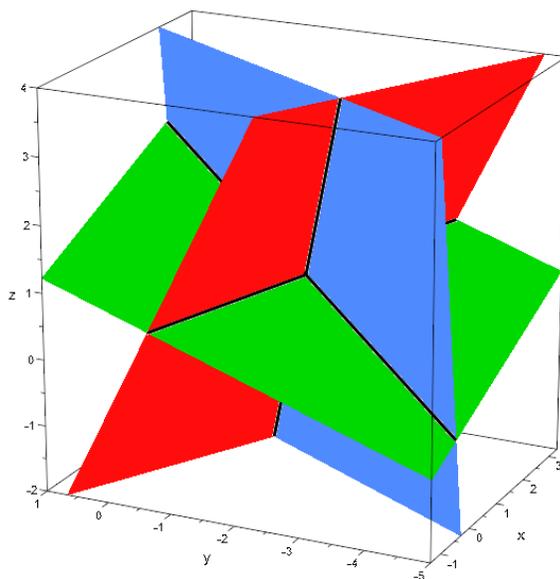


Figura 39

Existen intersecciones entre planos que ayudan a ubicar en el espacio el plano. Así como en el Capítulo 2 hablamos de la abscisa y ordenada al origen, que son las intersecciones de la recta con los ejes coordenados, ahora veremos las intersecciones de un plano $\mathcal{P} : Ax + By + Cz + D = 0$ con los planos coordenados. Estas intersecciones son muy sencillas de obtener, pues basta con asignar cero a la variable correspondiente. Estas intersecciones, que no sólo son útiles para el caso de los planos como veremos más adelante, reciben el nombre de **trazas**.

EJEMPLO 51. Las intersecciones de un plano \mathcal{P} son: con el plano XY , llamada traza $z = 0$ es $2x + 5y = 6$ y con el plano XZ , llamada traza $y = 0$ es $2x - 3z = 6$. Para calcular una ecuación del plano obtenemos las intersecciones de estas rectas (que, desde luego, descansan sobre el plano coordenado correspondiente) con los ejes. Ambas trazas nos dan que $(3, 0, 0)$ es un punto en \mathcal{P} . La traza $z = 0$ nos dice que $(0, \frac{6}{5}, 0) \in \mathcal{P}$ mientras que con la traza $y = 0$ podemos decir que $(0, 0, -2) \in \mathcal{P}$. Con tres puntos en el plano obtenemos que

$$2x + 5y - 3z = 6$$

es una ecuación cartesiana de \mathcal{P} . La traza $x = 0$ es $5y - 3z = 6$.

OBSERVACIÓN 12. No debe causar confusión si una ecuación cartesiana de la forma $Ax + By + C = 0$ es una recta en \mathbb{R}^2 o la traza de un plano paralelo al eje Z con vector normal $\mathbf{n} = (A, B, 0)$.

5. Ejercicios

EJERCICIO 91. Determine ecuaciones vectoriales, paramétricas y simétricas para las rectas que pasan por P_1 y P_2 si

$$\begin{aligned} a) P_1 &= (-7, -2, 3), P_2 = (2, 1, -1), & b) P_1 &= (-4, -4, -2), P_2 = (-4, 4, 2), \\ c) P_1 &= (4, -5, 4), P_2 = (-2, 4, 1), & d) P_1 &= (3, -4, 3), P_2 = (-7, -2, -2), \\ e) P_1 &= (7, -3, 4), P_2 = (-1, 5, -1), & f) P_1 &= (-5, 2, 5), P_2 = (5, 3, 0), \\ g) P_1 &= (7, 4, 2), P_2 = (4, -5, -1), & h) P_1 &= (-6, -5, -2), P_2 = (-6, 4, 1), \\ i) P_1 &= (2, 7, 5), P_2 = (-4, 1, 3), & j) P_1 &= (2, 1, 7), P_2 = (-1, -2, 3), \\ k) P_1 &= (1, -7, -2), P_2 = (-1, 2, 0), & l) P_1 &= (-6, -6, 2), P_2 = (-1, 4, 2). \end{aligned}$$

EJERCICIO 92. Determine ecuaciones vectoriales, paramétricas y simétricas para las rectas que tienen las siguientes características:

1. Pasa por $P_0 = (1, 2, -2)$ y es paralela a la recta con ecuaciones simétricas

$$\frac{x - 2}{2} = \frac{y + 2}{3} = \frac{1 - z}{2}.$$

2. Pasa por $P_0 = (-1, 4, 3)$ y es paralela a la recta con ecuaciones simétricas

$$\frac{2 - x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z - 1}{4}.$$

3. Pasa por $P_0 = (2, -1, 4)$ y es paralela a la recta con ecuaciones simétricas

$$2x - 1 = 4y + 8 = 3z - 5.$$

4. Pasa por el origen y un vector de dirección tiene ángulos directores $\alpha = \frac{\pi}{4}$ y $\beta = \frac{\pi}{3}$ (dos soluciones).
5. Pasa por el origen y un vector de dirección tiene ángulos directores $\alpha = \beta = \gamma$.
6. Pasa por $P_0 = (2, 1, 5)$, es perpendicular y se intersecta con la recta

$$\frac{x - 1}{4} = \frac{y + 2}{4} = \frac{z - 3}{2}.$$

EJERCICIO 93. Defina la distancia de un punto P en el espacio a una recta \mathcal{L} como la longitud del segmento perpendicular a la recta con extremos en P y un P_0 en \mathcal{L} . Demuestre que si \mathbf{v} es un vector de dirección de \mathcal{L} y $S \in \mathcal{L}$, entonces

$$(5.1) \quad d(P, \mathcal{L}) = \frac{\|(\mathbf{p} - \mathbf{s}) \times \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}.$$

En seguida pruebe que la fórmula no depende de la elección de $S \in \mathcal{L}$.

EJERCICIO 94. El ángulo entre dos rectas en \mathbb{R}^3 se define como el ángulo entre sus vectores de dirección y convendremos en tomar el que es menor que un ángulo recto. Ver la Definición 12 en la página 53. Con las rectas del Ejercicio 91, calcule el ángulo entre las parejas de rectas en cada fila.

EJERCICIO 95. Como en el Ejercicio 53, decida si las siguientes ternas de puntos son colineales.

- a) $P_1 = (1, 2, 1), P_2 = (3, 3, 2), P_3 = (-2, 1, -2),$
- b) $P_1 = (4, -3, 2), P_2 = (1, 12, -10), P_3 = (3, 2, -2),$
- c) $P_1 = (3, -3, -2), P_2 = (4, -2, -3), P_3 = (1, -5, 0),$
- d) $P_1 = (-7, 0, 6), P_2 = (-4, 3, 3), P_3 = (-6, 1, 5),$
- e) $P_1 = (-6, 1, 5), P_2 = (-10, 2, 9), P_3 = (2, -1, -3),$
- f) $P_1 = (-2, 0, 4), P_2 = (4, 1, -1), P_3 = (0, 2, 1).$

EJERCICIO 96. Demuestre que si P_1, P_2 y $P_3 \in \mathbb{R}^3$ son colineales, entonces $[\mathbf{p}_i \mathbf{p}_j \mathbf{p}_k] = 0$ donde los subíndices toman valores distintos.

EJERCICIO 97. Decida si los siguientes pares de rectas se intersectan en un punto. Si tal punto existe, calcúlelo.

- a) $\mathcal{L}_1 : (7, -1, 3) + t_1(-10, 2, -2), \quad \mathcal{L}_2 : (2, 5, 1) + t_2(0, 5, 1),$
- b) $\mathcal{L}_1 : (6, 2, -1) + t_1(-4, -4, -1), \quad \mathcal{L}_2 : (-4, -8, -\frac{7}{2}) + t_2(2, 4, \frac{17}{2}),$
- c) $\mathcal{L}_1 : (-4, -10, -4) + t_1(-6, 0, 2), \quad \mathcal{L}_2 : (-10, -8, 2) + t_2(4, 12, -5),$
- d) $\mathcal{L}_1 : (12, -7, 5) + t_1(-5, 6, -2), \quad \mathcal{L}_2 : (2, 15, -1) + t_2(0, -10, 2).$

EJERCICIO 98. Pruebe que las rectas de los incisos (a) y (d) forman un polígono en el espacio. ¿De qué polígono se trata?

EJERCICIO 99. Calcule una ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas correspondientes y una ecuación cartesiana del plano \mathcal{P} si contiene a los puntos P_0, P_1 y $P_2 \in \mathbb{R}^3$ donde

- a) $P_0 = (1, 2, 1), P_1 = (3, 3, 2), P_2 = (-2, 1, -2),$
- b) $P_0 = (1, -3, 2), P_1 = (1, 2, -10), P_2 = (1, -2, -2),$
- c) $P_0 = (2, 3, -2), P_1 = (2, -3, -3), P_2 = (1, -5, 0),$
- d) $P_0 = (-2, 1, 6), P_1 = (-2, 3, -1), P_2 = (-1, 2, 5),$
- e) $P_0 = (-4, 0, 0), P_1 = (0, 2, 0), P_2 = (0, 0, 4),$
- f) $P_0 = (-2, 0, 4), P_1 = (4, 1, -1), P_2 = (0, 2, 1).$

EJERCICIO 100. Con los datos del Ejercicio 97, si las rectas se intersectan, calcule una ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas correspondientes y una ecuación cartesiana del plano \mathcal{P} que las contiene.

EJERCICIO 101. Suponga que $\mathcal{P} : (x_0, y_0, z_0) + t_1(v_1, v_2, v_3) + t_2(u_1, u_2, u_3)$ es una ecuación vectorial de un plano. Resolviendo un sistema de ecuaciones, deduzca a partir de las ecuaciones paramétricas de \mathcal{P} la ecuación cartesiana correspondiente.

EJERCICIO 102. Calcule una ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas correspondientes y una ecuación cartesiana del plano \mathcal{P} si contiene al punto $P_0 = (3, -2, 1)$ y a la recta con ecuaciones simétricas

$$-(x + 2) = 5 - y = \frac{z}{6}.$$

EJERCICIO 103. Calcule una ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas correspondientes y una ecuación cartesiana del plano \mathcal{P} si contiene al punto $P_0 = (2, -4, 3)$ y a la recta con ecuaciones simétricas

$$\frac{x + 1}{3} = \frac{y - 2}{3} = \frac{z - 2}{2}.$$

EJERCICIO 104. Calcule una ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas correspondientes y una ecuación cartesiana del plano \mathcal{P} si contiene al punto $P_0 = (7, -1, 3)$ y es perpendicular a la recta con ecuaciones simétricas

$$\frac{7 - x}{10} = \frac{y + 1}{2} = \frac{3 - z}{2}.$$

EJERCICIO 105. Calcule una ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas correspondientes y una ecuación cartesiana del plano \mathcal{P} si contiene al punto $P_0 = (3, 4, -2)$ y es perpendicular a la recta con ecuaciones simétricas

$$\frac{3x - 12}{2} = \frac{2y + 2}{3} = \frac{2 - z}{3}.$$

EJERCICIO 106. Calcule una ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas correspondientes y una ecuación cartesiana del plano \mathcal{P} cuyas intersecciones con los ejes X , Y y Z son 2, -3 y 5 respectivamente.

EJERCICIO 107. Calcule una ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas correspondientes y una ecuación cartesiana del plano \mathcal{P} si contiene a los puntos $P_0 = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 4)$, $P_1 = (\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 3)$ y es perpendicular al plano con ecuación cartesiana

$$5x + y - 2z = 0.$$

EJERCICIO 108. Calcule una ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas correspondientes y una ecuación cartesiana del plano \mathcal{P} si contiene a los puntos $P_0 = (\frac{4}{3}, -2, -\frac{2}{3})$, $P_1 = (\frac{1}{3}, 2, \frac{1}{3})$ y es perpendicular al plano con ecuación cartesiana

$$3x - y + z = 3.$$

EJERCICIO 109. Sean P_1 y $P_2 \in \mathbb{R}^3$ distintos. Demuestre que

$$\mathcal{P} = \{P \in \mathbb{R}^3 : d(P, P_1) = d(P, P_2)\}$$

es un plano con un vector normal $\mathbf{n} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$.

EJERCICIO 110. Con las rectas del Ejercicio 92.6, calcule una ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas correspondientes y una ecuación cartesiana del plano \mathcal{P} que las contiene.

3. Rectas y planos en el espacio

EJERCICIO 111. Sea \mathcal{P} un plano con vector normal unitario $\hat{\mathbf{n}} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$. La ecuación

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma + p = 0$$

se denomina la **ecuación normal** del plano. Demuestre que $d(\mathbf{0}, \mathcal{P}) = |p|$. Indique una fórmula para p .

EJERCICIO 112. Sea $\mathcal{P} : Ax + By + Cz + D = 0$ y \mathcal{L} la recta que pasa por el origen y es perpendicular a \mathcal{P} . Deduzca que el punto de intersección de \mathcal{P} y \mathcal{L} es

$$\left(\frac{-AD}{A^2 + B^2 + C^2}, \frac{-BD}{A^2 + B^2 + C^2}, \frac{-CD}{A^2 + B^2 + C^2} \right).$$

Con ello establezca la fórmula

$$d(\mathbf{0}, \mathcal{P}) = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

EJERCICIO 113. Calcule ecuaciones vectoriales para las rectas obtenidas al intersectar los planos \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 si

$$\begin{aligned} a) \mathcal{P}_1 : 2x + 3y - 3z &= 6, & \mathcal{P}_2 : -2x + y + 2z &= 3, \\ b) \mathcal{P}_1 : 4x + y - 2z &= -11, & \mathcal{P}_2 : 2x + 7y + z &= -20, \\ c) \mathcal{P}_1 : x + y + z &= 1, & \mathcal{P}_2 : 3x - 5y + 4z &= 21, \\ d) \mathcal{P}_1 : 5x - 2y + 3z &= 40, & \mathcal{P}_2 : 4x - y + 4z &= 38, \\ e) \mathcal{P}_1 : 4x - 6y + z &= -7, & \mathcal{P}_2 : 3x + 5z &= 12, \\ f) \mathcal{P}_1 : 4x + 2y + z &= -4, & \mathcal{P}_2 : 7x + 6y + 5z &= 1. \end{aligned}$$

EJERCICIO 114. Determine una ecuación vectorial para la intersección de los cuatro planos del Ejemplo 43.

EJERCICIO 115. Calcule una ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas correspondientes y las ecuaciones simétricas de la recta \mathcal{L} que pasa por $P_0 = (-2, 5, 1)$ y es paralela a la recta de intersección de los planos $\mathcal{P}_1 : -x + 3y + 2z = 5$; y $\mathcal{P}_2 : -2x + y + 2z = 3$.

EJERCICIO 116. Calcule una ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas correspondientes y las ecuaciones simétricas de la recta \mathcal{L} que pasa por $P_0 = (-3, 2, 2)$ y es paralela a la recta de intersección de los planos $\mathcal{P}_1 : 3x + 3y + z = 5$; y $\mathcal{P}_2 : -2x + 3y + 2z = -1$.

EJERCICIO 117. Sean $\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ y $\mathbf{n}_3 = (A_3, B_3, C_3)$ tres vectores todos no nulos y sea

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}.$$

Aplique el Ejercicio 45 para probar que $\Delta = 0$ si y sólo si para los planos

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 & : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \mathcal{P}_2 & : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ \mathcal{P}_3 & : A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{aligned}$$

se cumple una de las cuatro condiciones:

- a. Los planos son paralelos;
- b. Dos planos son paralelos y un tercero no lo es;

- c. *Cualquier par de planos no son paralelos y el tercero es paralelo a la recta de intersección de los otros dos;*
 d. *La intersección de los tres planos es una recta.*

EJERCICIO 118. *Como en el Ejercicio 117, pruebe que $\Delta = 0$ si y sólo si \mathbf{n}_1 , \mathbf{n}_2 y \mathbf{n}_3 son coplanares respecto a un plano que pasa por el origen. Este ejercicio dice que $\Delta = 0$ si y sólo si cualquiera de los vectores es combinación lineal de los otros dos con escalares no todos iguales a cero; son **linealmente dependientes**.*

EJERCICIO 119. *Determine $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$ si*

- a) $\mathcal{P}_1 : 9x - 3y + 21z = 4$, $\mathcal{P}_2 : 5x + y - 2z = 0$, $\mathcal{P}_3 : x - y + z = 1$,
 b) $\mathcal{P}_1 : 3x + 2y + z = 3$, $\mathcal{P}_2 : x + 2y - z = 1$, $\mathcal{P}_3 : 5x - 3y - 3z = -17$,
 c) $\mathcal{P}_1 : 2x - 3y + z = 0$, $\mathcal{P}_2 : 2x - 2y + z = 0$, $\mathcal{P}_3 : 2x - 5y + z = 0$,
 d) $\mathcal{P}_1 : 3x + 4y - 2z = 1$, $\mathcal{P}_2 : 2x - 3y + 2z = 6$, $\mathcal{P}_3 : 2x + 14y - 8z = 5$,
 e) $\mathcal{P}_1 : 2x + 2y - 3z = 1$, $\mathcal{P}_2 : 5x + 2y - 3z = 4$, $\mathcal{P}_3 : 4x - 2y + 3z = 5$,
 f) $\mathcal{P}_1 : 4x - y + 5z = 4$, $\mathcal{P}_2 : 3x - 2y + 4z = -3$, $\mathcal{P}_3 : 2x - y + 3z = 0$.

EJERCICIO 120. *Determine el valor de k para que $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$ sea una recta si*

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_1 &: 3x + ky - 2z = 3 \\ \mathcal{P}_2 &: x + 2y + 3z = 1 \\ \mathcal{P}_3 &: 2x + 2y - 5z = 2.\end{aligned}$$

EJERCICIO 121. *Determine el valor de k para que $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$ sea una recta si*

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_1 &: 3x + 4y - 2z = 1 \\ \mathcal{P}_2 &: 2x - 3y + 2z = k \\ \mathcal{P}_3 &: 2x + 14y - 8z = 5.\end{aligned}$$

EJERCICIO 122. *Demuestre que los planos*

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_1 &: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \mathcal{P}_2 &: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0\end{aligned}$$

son paralelos y distintos si y sólo si hay una constante k tal que $A_1 = kA_2$, $B_1 = kB_2$, $C_1 = kC_2$ pero $D_1 \neq kD_2$.

CAPÍTULO 4

Curvas en el plano

1. Lugares geométricos

Llamaremos **lugar geométrico** en el plano o en el espacio a un conjunto de puntos que está bien determinado por una característica geométrica o algebraica. Una recta es un lugar geométrico ya sea en el plano o en el espacio; un plano es un lugar geométrico en el espacio.

En los capítulos anteriores se daba la ecuación cartesiana o vectorial y determinábamos el conjunto \mathcal{S} que satisfacía tal ecuación. También en el sentido inverso, se definía un lugar geométrico \mathcal{S} y se deducía a partir de las propiedades del lugar una ecuación vectorial o cartesiana.

Diremos que una ecuación es **ecuación de \mathcal{S}** y que \mathcal{S} es **la gráfica** de la ecuación si y sólo si la ecuación es satisfecha por las coordenadas de los puntos de \mathcal{S} . Por lo general se pretende obtener una ecuación *sencilla* o *simplificada* de un lugar geométrico.

EJEMPLO 52. Como primer ejemplo, obtengamos una ecuación para el lugar geométrico \mathcal{S} de los puntos que equidistan de un punto fijo $F = (-1, 2)$ y de la recta $\mathcal{D} : x - y = 1$. Bien, un punto $U = (x, y) \in \mathcal{S}$ si y sólo si

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{f}\| = d(U, \mathcal{D}).$$

Escribiendo esta ecuación en términos de coordenadas tenemos

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} = \frac{|x-y-1|}{\sqrt{2}},$$

elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación

$$2(x+1)^2 + 2(y-2)^2 = (x-y-1)^2,$$

desarrollando los cuadrados y simplificando llegamos a la ecuación

$$x^2 + 2xy + y^2 + 6x - 10y + 9 = 0.$$

La Figura 54 muestra la gráfica del lugar geométrico.

EJEMPLO 53. Ahora el lugar geométrico \mathcal{S} es el de los puntos U tales que el $U = (x, y) \in \mathcal{S}$ si y sólo si el vector que va de $P_1 = (0, 2)$ a U es perpendicular al segmento que une $P_2 = (4, 2)$ con U . Tenemos pues que $U = (x, y) \in \mathcal{S}$ si y sólo si

$$\langle \mathbf{u} - \mathbf{p}_1, \mathbf{u} - \mathbf{p}_2 \rangle = 0,$$

es decir

$$\langle (x, y-2), (x-4, y-2) \rangle = 0.$$

Otra vez realizando álgebra obtenemos que

$$x(x-4) + (y-2)^2 = 0,$$

o lo que es lo mismo

$$x^2 - 4x + (y-2)^2 = 0$$

y nuevamente completando el TCP

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4.$$

En los ejemplos anteriores los pasos algebraicos eran siempre reversibles, es decir, $U \in \mathcal{S}$ si y sólo si las coordenadas satisfacen la ecuación obtenida. Más adelante estudiaremos técnicas para identificar las gráficas de ecuaciones de este tipo.

2. Secciones cónicas

Desde la antigua Grecia se conocía que las curvas que se obtienen de intersectar un plano con el manto de un cono o los mantos de dos conos, que se tocan sólo en sus vértices y tienen sus ejes sobre la misma recta, tienen propiedades que las definen totalmente. Estas curvas son llamadas **secciones cónicas**. En el espacio, pensemos en una recta fija \mathcal{E} que llamaremos eje y en un punto fijo Q en ella. A una segunda recta \mathcal{G} no paralela ni ortogonal a \mathcal{E} que pasa por Q la llamaremos **generatriz**. Designemos con α al ángulo entre estas rectas. Al hacer girar la recta \mathcal{G} sobre el punto Q de tal manera que el ángulo α entre ellas permanezca constante se generan dos conos con vértice en Q . Ahora cortemos con un plano \mathcal{P} con vector normal \mathbf{n} estos conos.

Según sea el ángulo entre el vector normal \mathbf{n} y el eje \mathcal{E} , la curva de intersección será una cónica diferente, teniendo cuatro casos para tal ángulo.

Circunferencia: Cuando el plano \mathcal{P} y el eje \mathcal{E} son ortogonales, o equivalentemente cuando \mathbf{n} y \mathcal{E} son paralelos, la curva de intersección es una **circunferencia**. El plano se intersecta sólo con un manto y se observa de inmediato que la curva se cierra sobre sí misma. Esto se puede observar en el hecho de que cuando el plano es prolongado indefinidamente, *sale* del manto del cono.

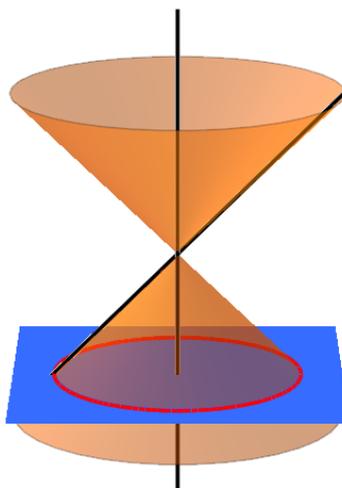


Figura 40

Parábola: Cuando el plano \mathcal{P} y la generatriz \mathcal{G} son paralelos, o equivalentemente cuando \mathbf{n} y \mathcal{G} son ortogonales, la curva de intersección es una **parábola**. El plano

se intersecta sólo con un manto. Ahora por más que se prolongue el plano, éste permanece cortando sólo un del manto del cono.

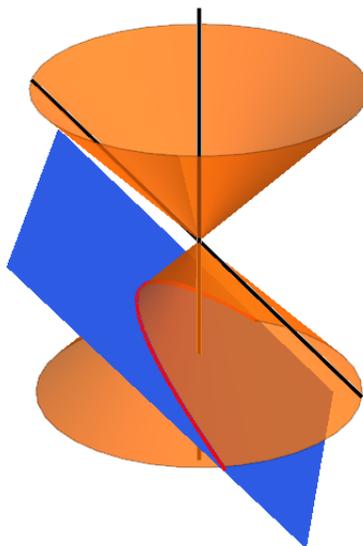


Figura 41

Elipse: Cuando el plano \mathcal{P} y el eje \mathcal{E} son oblicuos pero forman un ángulo mayor que α , el plano corta un solo manto y la curva se denomina **elipse**. Como en el caso de la circunferencia, el plano deja el manto del cono cuando se prolonga de manera indefinida.

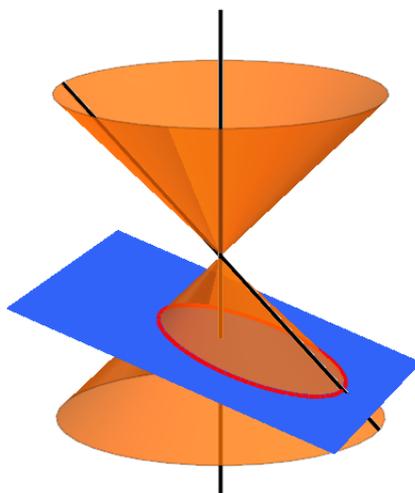


Figura 42

Hipérbola: Cuando el plano \mathcal{P} y el eje \mathcal{E} son oblicuos pero forman un ángulo menor que α o bien son paralelos, con esto último en forma equivalente a que \mathbf{n} y \mathcal{E} son perpendiculares, el plano corta a los dos mantos y la curva se denomina **hipérbola**.

Cuando el plano se extiende de manera indefinida permanece intersectándose con ambos mantos.

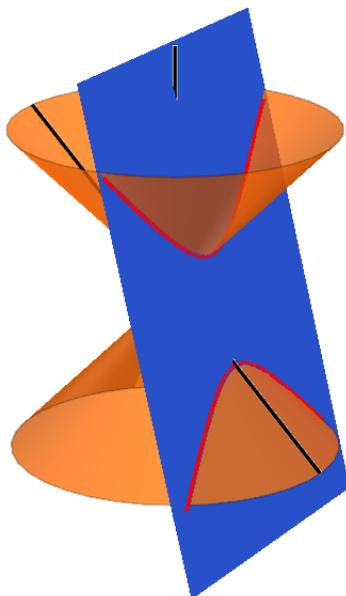


Figura 43

OBSERVACIÓN 13. *Las propiedades que emplearemos más adelante para definir cada una de estas curvas pueden deducirse sin el uso de álgebra y apoyándose en las Figuras 40 a 43 pero ello corresponde a un curso de Geometría sin el adjetivo de Analítica. En tal curso también se podrían probar las afirmaciones hechas respecto a si el plano sale o no del manto del cono. En este libro partiremos de ciertas propiedades de las secciones cónicas y a partir de ellas obtener algebraicamente ecuaciones que las determinen tal como se hizo con los lugares geométricos.*

2.1. Circunferencia. De alguna manera puede considerarse la circunferencia como la más elemental de las secciones cónicas.

DEFINICIÓN 17. *Dado un punto $C = (h, k)$, definimos la **circunferencia de radio r y centro en C** como el conjunto en \mathbb{R}^2*

$$\mathcal{C} = \{(x, y) : \|(h, k) - (x, y)\| = r\}.$$

Es decir, son los puntos que distan r del punto C . Tenemos que $P = (x, y) \in \mathcal{C}$ si y sólo si

$$(2.1) \quad (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2.$$

Al desarrollar los cuadrados llevamos la ecuación a la forma

$$(2.2) \quad x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde, desde luego, $D = -2h$, $E = -2k$ y $F = h^2 + k^2 - r^2$. La ecuación (2.1) la denominamos **ecuación cartesiana ordinaria** mientras que la ecuación (2.2) es la **ecuación general de la circunferencia**.

4. Curvas en el plano

A partir de la ecuación general $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, completando los trinomios cuadrados perfectos, observamos que la ecuación ordinaria es

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F.$$

Así pues, el radio r estará dado por

$$r = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$$

cuando y únicamente cuando $D^2 + E^2 - 4F > 0$. Si $D^2 + E^2 - 4F = 0$ se trata del lugar geométrico que consta del único punto $\left(\frac{D}{2}, \frac{E}{2}\right)$ y corresponde a un plano perpendicular al eje del cono que pasa por el vértice del mismo. Si $4F - D^2 - E^2 > 0$, se trata de *números imaginarios*.

EJEMPLO 54. Sean $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ una circunferencia y $\mathcal{L} : Ax + By + C = 0$ una recta. Para encontrar $\mathcal{C} \cap \mathcal{L}$ despejamos una variable en la ecuación de la recta, digamos $y = -\frac{C+Ax}{B}$, donde desde luego $B \neq 0$. Sustituimos esta expresión en la ecuación de la circunferencia

$$x^2 + \left(\frac{C + Ax}{B}\right)^2 + Dx - E\frac{C + Ax}{B} + F = 0.$$

Al desarrollar los productos y reagrupando términos llegamos a la ecuación de segundo grado

$$\left(1 + \frac{A^2}{B^2}\right)x^2 + \left(\frac{2AC}{B} + D - \frac{AE}{B}\right)x + \left(\frac{C^2}{B^2} - \frac{CE}{B} + F\right) = 0.$$

Al resolverla podemos encontrar dos raíces, una sola raíz o no encontrar raíces reales. Así pues, geoméricamente tenemos que la recta corta a la circunferencia en dos puntos, en un único punto o la recta es ajena a la circunferencia.

DEFINICIÓN 18. Si una recta \mathcal{L} intersecta en un solo punto P a una circunferencia \mathcal{C} se dice que \mathcal{L} es **recta tangente** a \mathcal{C} en P y en tal caso a P se le llama punto de tangencia. Si \mathcal{L} y \mathcal{C} se intersectan en dos puntos diremos que \mathcal{L} es **recta secante** a \mathcal{C} . El segmento limitado por dos puntos en \mathcal{C} se denomina **cuerda**. La cuerda de mayor longitud es el **diámetro** de la circunferencia.

En Geometría Euclidiana se demuestra que una recta es tangente a una circunferencia si y sólo si se intersecta en un punto y el radio con extremo en dicho punto es ortogonal a la recta. Moise E., en *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint* realiza una prueba que se apoya en el hecho de que el segmento con sólo uno de sus extremos en una recta tiene longitud mínima cuando la recta y el segmento son ortogonales.

TEOREMA 9. Sea \mathcal{C} una circunferencia con centro en \mathbf{c} y \mathcal{L} una recta tal que se intersecta con \mathcal{C} en el punto P . Entonces $\mathbf{n} = \mathbf{p} - \mathbf{c}$ es un vector normal a \mathcal{L} si y sólo si \mathcal{L} es tangente a \mathcal{C} en P .

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la ecuación vectorial para la recta

$$\mathcal{L} : P + t\mathbf{v}$$

donde \mathbf{v} es cualquier vector de dirección para \mathcal{L} . Para el valor de $t_1 = 0$ tenemos que el punto está en \mathcal{C} . Veremos que el hecho de que $t_1 = 0$ sea el único valor que satisfaga esta condición equivale a que $\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle = 0$. Sea pues $Q \in \mathcal{L} \cap \mathcal{C}$. Entonces Q cumple que $Q = P + t\mathbf{v}$ para

algún $t \in \mathbb{R}$ y $\|\mathbf{q} - \mathbf{c}\| = r$. Al sustituir la expresión de Q y elevando al cuadrado tenemos que

$$\begin{aligned} r^2 &= \|\mathbf{q} - \mathbf{c}\|^2 \\ &= \|\mathbf{p} + t\mathbf{v} - \mathbf{c}\|^2 \\ &= \langle \mathbf{p} + t\mathbf{v} - \mathbf{c}, \mathbf{p} + t\mathbf{v} - \mathbf{c} \rangle \\ &= \|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{c}\|^2 + 2t(\langle \mathbf{p}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{c}, \mathbf{v} \rangle) + t^2 \|\mathbf{v}\|^2 - 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{c} \rangle. \end{aligned}$$

La anterior es una ecuación cuadrática en t cuyo término independiente es cero, es decir

$$\|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{c}\|^2 - 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{c} \rangle - r^2 = 0$$

(obsérvese que esto es la Ley de los cosenos) y así, para encontrar el otro punto de intersección se resuelve

$$t^2 \|\mathbf{v}\|^2 + 2t\langle \mathbf{p} - \mathbf{c}, \mathbf{v} \rangle = 0$$

cuyas raíces son cero y

$$t_2 = -\frac{2\langle \mathbf{p} - \mathbf{c}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2}.$$

Ahora es inmediato que $t_1 = t_2 = 0$ equivale a $\langle \mathbf{p} - \mathbf{c}, \mathbf{v} \rangle = 0$. □

Se dice que una circunferencia está determinada por tres condiciones:

- Las dos coordenadas h y k del centro y el radio r .
- Tres puntos en ella. Esto era de esperarse ya que en la ecuación general (2.2) aparecen tres incógnitas.

EJEMPLO 55. Sea \mathcal{C} la circunferencia con centro en $C = (6, 2)$ y que es tangente a la recta $\mathcal{L} : 3x + 4y = 51$. Entonces resta calcular el radio, el cual es $d(C, \mathcal{L})$, así que

$$r = \frac{|3(6) + 4(2) - 51|}{5} = 5$$

y la ecuación ordinaria de la circunferencia es

$$(x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 25$$

mientras que su ecuación general es

$$x^2 + y^2 - 12x - 4y + 15 = 0.$$

EJEMPLO 56. Sea $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 8x + 6y + 5 = 0$ una circunferencia y \mathcal{L} la recta tangente a \mathcal{C} en $P = (-2, 1)$. Para encontrar una ecuación cartesiana de \mathcal{L} , encontramos primero el centro de \mathcal{C} . Completamos los trinomios cuadrados perfectos para llevar la ecuación general a la ecuación cartesiana

$$\begin{aligned} (x^2 + 8x + 16) + (y^2 + 6y + 9) &= -5 + 16 + 9 \\ (x + 4)^2 + (y + 3)^2 &= 20. \end{aligned}$$

Se trata, pues, de la circunferencia con centro en $C = (-4, -3)$ y radio $\sqrt{20}$. Ahora bien, $\mathbf{n} = \mathbf{p} - \mathbf{c} = (2, 4)$ será un vector normal de \mathcal{L} . Como $\langle \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = 0$, la recta pasa por el origen. Así pues

$$x + 2y = 0$$

es una ecuación cartesiana de \mathcal{L} .

4. Curvas en el plano

EJEMPLO 57. Una circunferencia tiene su centro en la recta $x + 3y + 4 = 0$ y pasa por los puntos $P_1 = (-8, 0)$ y $P_2 = (-4, 4)$. Deseamos encontrar la ecuación ordinaria de la circunferencia. Sabemos que las coordenadas del centro $C = (h, k)$ satisfacen $h + 3k + 4 = 0$, es decir $h = -(3k + 4)$. Esto reduce de tres a dos datos que necesitamos para determinar la circunferencia. Sustituyendo la relación entre h y k en la ecuación en su forma ordinaria resulta

$$(x + 3k + 4)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

y empleamos los puntos P_1 y P_2 para obtener dos ecuaciones en las incógnitas k y r . Luego

$$\begin{aligned}(-4 + 3k)^2 + k^2 &= r^2 \\ 9k^2 + (4 - k)^2 &= r^2.\end{aligned}$$

Igualando los lados izquierdos de estas ecuaciones, desarrollando los cuadrados y simplificando obtenemos que $k = 0$. Así que $h = -4$ por lo que $C = (-4, 0)$ es el centro y $r = \|\mathbf{p}_1 - \mathbf{c}\| = \|\mathbf{p}_2 - \mathbf{c}\| = 4$ es el radio buscado. Concluimos que

$$(x + 4)^2 + y^2 = 16$$

es la ecuación ordinaria buscada.

Alternativamente pudimos haber obtenido la recta que consiste en los puntos que equidistan de P_1 y P_2 , la cual tiene ecuación cartesiana $x + y + 4 = 0$ y encontrar que $C = (-4, 0)$ es el punto de intersección con la recta que contiene al centro.

EJEMPLO 58. Una circunferencia pasa por los puntos $P_1 = (-9, 2)$, $P_2 = (-8, -2)$ y $P_3 = (-4, 2)$. Si los sustituimos en la ecuación general resulta en el sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas

$$\begin{aligned}-9D + 2E + F &= -85 \\ -8D - 2E + F &= -68 \\ -4D + 2E + F &= -20.\end{aligned}$$

Llevando la matriz aumentada a su forma RREF encontramos que $D = 13$, $E = -1$ y $F = 34$, por lo que

$$x^2 + y^2 + 13x - y + 34 = 0$$

es la ecuación general buscada. Llevándola a su forma ordinaria tenemos que

$$\left(x + \frac{13}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{17}{2},$$

es decir, $C = \left(-\frac{13}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y $r^2 = \frac{17}{2}$.

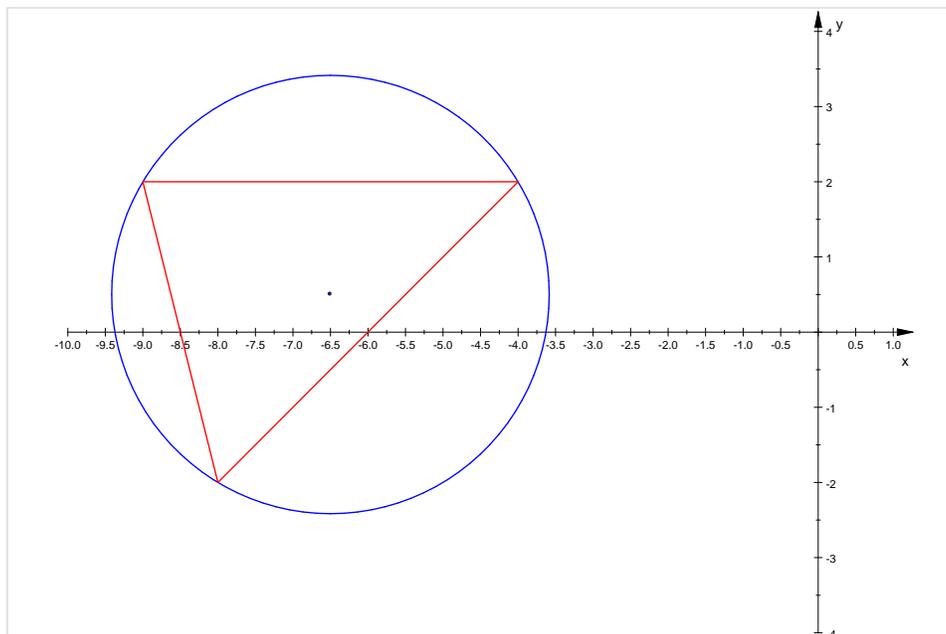


Figura 44

Una solución alternativa del Ejemplo 58 es encontrar la intersección de las mediatrices del triángulo con vértices en los tres puntos como centro de la circunferencia y como el radio la distancia de cualquier vértice al punto de intersección (ver el Ejercicio 140).

Concluimos con la circunferencia con un ejemplo que incluye lo que llamaremos una *familia de circunferencias*. Sean

$$\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$$

$$\mathcal{C}_2 : x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0$$

las ecuaciones generales de dos circunferencias. Sean ahora α y $\beta \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\alpha(x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1) + \beta(x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2) = 0$$

es a su vez la ecuación general de una tercer circunferencia \mathcal{C} siempre que $\alpha + \beta \neq 0$, de lo contrario, se trata de una recta, pues es el lugar geométrico con ecuación

$$(\alpha + \beta)x^2 + (\alpha + \beta)y^2 + (\alpha D_1 + \beta D_2)x + (\alpha E_1 + \beta E_2)y + (\alpha F_1 + \beta F_2) = 0.$$

EJEMPLO 59. Dadas las circunferencias cuyas ecuaciones ordinarias son

$$\mathcal{C}_1 : (x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 7$$

$$\mathcal{C}_2 : (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 6$$

y sus respectivas ecuaciones generales son

$$\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 + 6x - 2y + 3 = 0$$

$$\mathcal{C}_2 : x^2 + y^2 + 2x - 4y - 1 = 0$$

encontramos que si eliminamos los términos cuadráticos en ambas ecuaciones, la intersección estará en la recta $\mathcal{L} : 2x + y + 2 = 0$. Sustituyendo, por ejemplo, $y = -(2x + 2)$ en la ecuación de \mathcal{C}_1 tenemos que

$$x^2 + (2x + 2)^2 + 6x + 2(2x + 2) + 3 = 0$$

o bien

$$5x^2 + 18x + 11 = 0$$

Resolviéndola llegamos a que

$$x_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{26}}{5}$$

son las raíces. Esto es, las circunferencias se intersectan en dos puntos

$$P_1 = \left(\frac{-9 + \sqrt{26}}{5}, \frac{8 - 2\sqrt{26}}{5} \right)$$

$$P_2 = \left(\frac{-9 - \sqrt{26}}{5}, \frac{8 + 2\sqrt{26}}{5} \right).$$

Ahora bien, con α y $\beta \in \mathbb{R}$, la ecuación

$$\alpha(x^2 + y^2 + 6x - 2y + 3) + \beta(x^2 + y^2 + 2x - 4y - 1) = 0$$

nos da una familia de circunferencias que pasan por P_1 y P_2 . Entonces un tercer punto $Q = (x_0, y_0)$ nos determina valores **no** únicos para α y β . Supongamos que deseamos la circunferencia perteneciente a esta familia que pase por $Q = (-2, -3)$. Al sustituir estas coordenadas en la ecuación de la familia nos da $\alpha + 2\beta = 0$ o bien $\alpha = -2\beta$. Por simplicidad elegimos $\beta = 1$ y por ende $\alpha = -2$. Luego

$$x^2 + y^2 + 10x - 7 = 0$$

es la ecuación general de tal circunferencia y

$$(x + 5)^2 + y^2 - 18 = 0$$

su ecuación cartesiana ordinaria.

Similarmente calculamos la ecuación general de la circunferencia de esta familia que pasa por el punto $R = (1, 0)$, la cual se obtiene cuando $\beta = -5\alpha$. Con $\alpha = 1$ y $\beta = -5$ obtenemos

$$2x^2 + 2y^2 + 2x - 9y - 4 = 0$$

y su ecuación ordinaria es

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{4}\right)^2 = \frac{117}{16}.$$

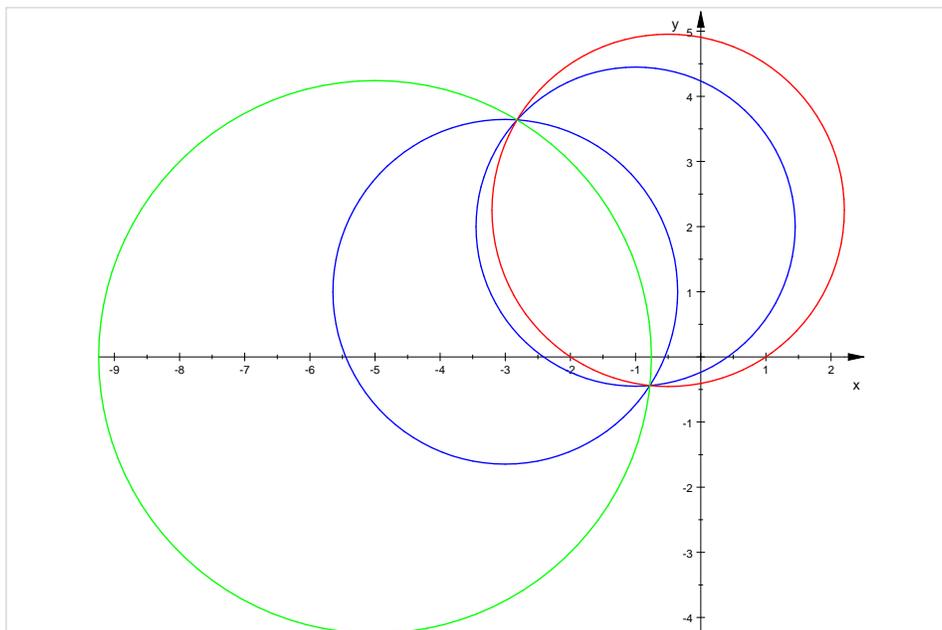


Figura 45

2.2. Parábola. Comenzamos con la definición del lugar geométrico llamado parábola.

DEFINICIÓN 19. Sea \mathcal{D} una recta en el plano y F un punto que no está en \mathcal{D} . Definimos la **parábola** como el lugar geométrico \mathcal{P} de los puntos que equidistan de F y \mathcal{D} . Es decir

$$\mathcal{P} = \{P : d(P, F) = d(P, \mathcal{D})\}.$$

Al punto F se le llama **foco** y la recta \mathcal{D} **directriz**. La recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco se denomina **eje de la parábola**.

Comencemos con la directriz paralela a uno de los ejes coordenados. Llamemos **vértice** de la parábola al punto medio entre F y \mathcal{D} y sea éste $V = (h, k)$. Denotemos con $p > 0$ al valor común $d(V, F)$ y $d(V, \mathcal{D})$ de tal suerte que $d(F, \mathcal{D}) = 2p$. Si la directriz es paralela al eje X , tenemos que $\mathcal{D} : y = k \pm p$ y $F = (h, k \mp p)$; si lo es al eje Y , entonces $\mathcal{D} : x = h \pm p$ y $F = (h \mp p, k)$. Consideremos el caso con \mathcal{D} vertical; el caso para \mathcal{D} horizontal es similar.

Bien, resulta que $U \in \mathcal{P} = \{P : d(P, F) = d(P, \mathcal{D})\}$ si y sólo si

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{f}\| = d(U, \mathcal{D})$$

o de manera equivalente

$$(x - (h \mp p))^2 + (y - k)^2 = (x - (h \pm p))^2.$$

Desarrollando los binomios al cuadrado observamos que

$$x^2 - 2x(h \mp p) + (h \mp p)^2 + (y - k)^2 = x^2 - 2x(h \pm p) + (h \pm p)^2.$$

Eliminando x^2 , h^2 , p^2 y $-2xh$ para enseguida reagrupar términos

$$(2.3) \quad \begin{aligned} (y - k)^2 &= \mp 4xp \pm 4hp \\ &= \mp 4p(x - h). \end{aligned}$$

De manera similar se obtiene que si \mathcal{D} es horizontal,

$$(2.4) \quad (x - h)^2 = \mp 4p(y - k).$$

Resumiendo tenemos 4 casos para la parábola con su directriz paralela a uno de los ejes coordenados:

- $\mathcal{D} : x = h + p$ y $F = (h - p, k)$, ecuación $(y - k)^2 = -4p(x - h)$. *Ramas* de la parábola abren hacia el eje $-x$;

- $\mathcal{D} : x = h - p$ y $F = (h + p, k)$, ecuación $(y - k)^2 = 4p(x - h)$. *Ramas* de la parábola abren hacia el eje $+x$;

- $\mathcal{D} : y = k + p$ y $F = (h, k - p)$, ecuación $(x - h)^2 = -4p(y - k)$. *Ramas* de la parábola abren hacia el eje $-y$;

- $\mathcal{D} : y = k - p$ y $F = (h, k + p)$, ecuación $(x - h)^2 = 4p(y - k)$. *Ramas* de la parábola abren hacia el eje $+y$.

Desarrollando el binomio al cuadrado en la ecuación (2.3) obtenemos una expresión de la forma

$$(2.5) \quad y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde $D = \pm 4p$, $E = -2k$ y $F = k^2 \mp 4ph$. De manera similar, la ecuación (2.4) nos da la ecuación

$$(2.6) \quad x^2 + Dx + Ey + F = 0$$

pero ahora $D = -2h$, $E = \pm 4p$ y $F = h^2 \mp 4pk$.

Las ecuaciones (2.3) y (2.4) reciben el nombre de **ecuación cartesiana ordinaria** mientras que las ecuaciones (2.5) y (2.6) se llaman ambas **ecuación general de la parábola**. Al igual que en la circunferencia, para determinar una parábola se necesitan tres condiciones para calcular las tres incógnitas, ya sean h , k y p o bien D , E y F .

OBSERVACIÓN 14. *Si en la ecuación (2.5) ocurriese que $D = 0$, ésta se reduce a $y^2 + Ey + F = 0$ y el lugar geométrico consiste en dos rectas paralelas horizontales, una recta vertical o el conjunto vacío. Una observación similar se puede hacer para la ecuación (2.6) en el caso de que $E = 0$.*

EJEMPLO 60. *Una parábola tiene foco en $F = (2, 4)$ y directriz $\mathcal{D} : y = -1$. Así que $p = \frac{5}{2}$ y $V = (2, \frac{3}{2})$. Se trata de una parábola con ramas abriendo hacia el eje $+y$ cuya ecuación ordinaria es*

$$(x - 2)^2 = 10 \left(y - \frac{3}{2} \right)$$

mientras que su ecuación general es

$$x^2 - 4x - 10y + 19 = 0.$$

EJEMPLO 61. *Una parábola tiene ecuación $y^2 + 12x + 2y - 35 = 0$. Llevándola a su forma ordinaria encontramos que ésta es*

$$(y + 1)^2 = -12(x - 3).$$

Se trata pues de una parábola con vértice en $V = (3, -1)$, $d(F, V) = p = 3$, foco en $F = (0, -1)$, directriz $\mathcal{D} : x = 6$ y ramas que abren hacia el eje $-x$.

EJEMPLO 62. *Una parábola con directriz horizontal tiene su vértice en $V = (-1, 1)$ y pasa por el punto $P = (-3, 2)$. Entonces en la ecuación ordinaria $(x + 1)^2 = 4p(y - 1)$ sustituimos el punto P para encontrar que $p = 1$. Luego, la ecuación cartesiana ordinaria es $(x + 1)^2 = 4(y - 1)$ y la ecuación general correspondiente es $x^2 + 2x - 4y + 5 = 0$. En el Ejercicio 90 calculamos la ecuación de la familia de rectas que pasan por $P = (-3, 2)$ con*

pendiente α la cual resultó ser $\alpha x - y + (3\alpha + 2) = 0$. Para decidir los valores de α tales que la recta se intersecta con la parábola únicamente en P , sustituimos $y = \alpha x + (3\alpha + 2)$ en la ecuación general de la parábola para obtener una ecuación cuadrática

$$x^2 + (2 - 4\alpha)x - 4(3\alpha + 2) + 5 = 0.$$

Resolviendo esta ecuación resulta que

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \left[(4\alpha - 2) \pm \sqrt{(4\alpha - 2)^2 + 16(3\alpha + 2) - 20} \right]$$

y para que haya un único punto de intersección es necesario y suficiente que

$$(4\alpha - 2)^2 + 16(3\alpha + 2) - 20 = 0$$

o bien $(\alpha + 1)^2 = 0$. Así pues, con $\alpha = -1$ tenemos que la recta $x + y + 1 = 0$ toca a la parábola únicamente en el punto $P = (-3, 2)$.

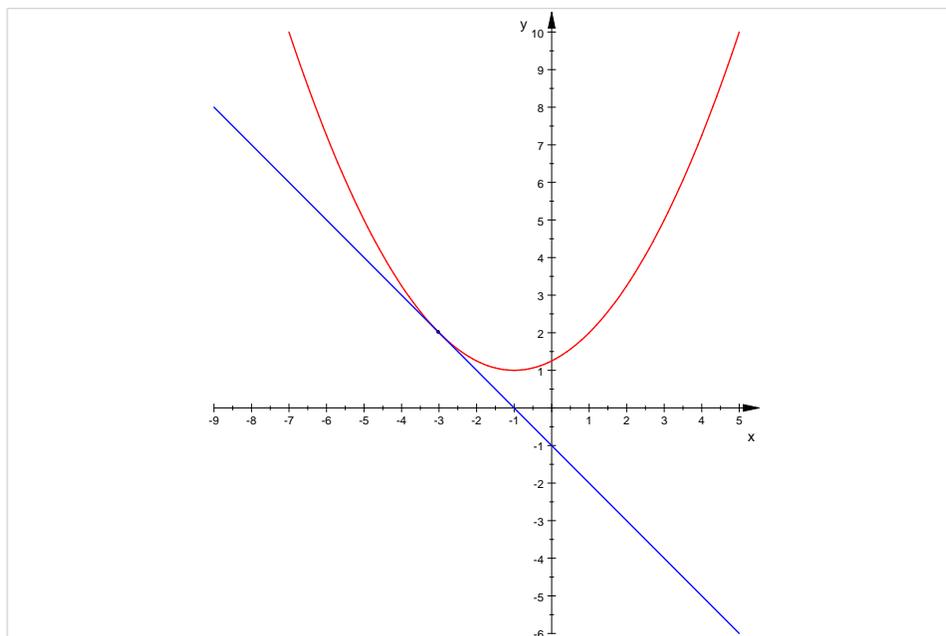


Figura 46

Podemos generalizar la situación anterior a cualquier parábola. Asumiremos que la parábola tiene ecuación ordinaria $4p(y - k) = (x - h)^2$. Supongamos que el punto $P = (x_1, y_1)$ pertenece a la parábola, lo que equivale a que $4p(y_1 - k) = (x_1 - h)^2$. Buscaremos el valor de α para que la recta $\mathcal{L} : y = \alpha x - \alpha x_1 + y_1$, que pasa por P y tiene pendiente α , sea una recta tangente a la parábola. Ello equivale a que al sustituir la ecuación de \mathcal{L} en la ecuación de la parábola, la ecuación cuadrática tenga una sola raíz, es decir

$$(x - h)^2 = 4p[\alpha x - \alpha x_1 + (y_1 - k)]$$

o desarrollando los productos y reagrupando términos

$$x^2 - [4p\alpha + 2h]x + [4p\alpha x_1 - 4p(y_1 - k) + h^2] = 0,$$

tenga discriminante nulo. Así pues, \mathcal{L} será tangente a la parábola si y sólo si

$$[4p\alpha + 2h]^2 = 4[4p\alpha x_1 - 4p(y_1 - k) + h^2].$$

Esto nos conduce a una ecuación cuadrática en α , la cual, después de multiplicar por $\frac{1}{16p}$, es

$$(2.7) \quad p\alpha^2 - (x_1 - h)\alpha + (y_1 - k) = 0.$$

Ahora bien, el discriminante de esta nueva ecuación es

$$(x_1 - h)^2 - 4p(y_1 - k)$$

que igualarlo a cero equivale a que P pertenezca a la parábola, o sea $4p(y_1 - k) = (x_1 - h)^2$. Así que (2.7) es en realidad un trinomio cuadrado perfecto, a saber

$$\left(\alpha - \frac{x_1 - h}{2p}\right)^2 = 0.$$

Un análisis similar nos muestra que si la parábola tiene ecuación $-4p(y - k) = (x - h)^2$ obtenemos que \mathcal{L} será tangente a la parábola si y sólo si

$$\left(\alpha + \frac{x_1 - h}{2p}\right)^2 = 0.$$

Hemos establecido el siguiente resultado.

TEOREMA 10. *Supongamos que $P = (x_1, y_1)$ pertenece a la parábola con ecuación ordinaria $(x - h)^2 = \pm 4p(y - k)$. Para que la recta \mathcal{L} que pasa por P sea tangente a la parábola es necesario y suficiente que tenga pendiente $\alpha = \pm \frac{x_1 - h}{2p}$.*

OBSERVACIÓN 15. *Quizá el proceso anterior resultó un poco extenso y tedioso, pero ello se debe a que no hemos construido herramientas de cálculo. Con ellas, el tratamiento de las rectas tangentes se simplifica significativamente. Algo que vale la pena recalcar es que un vector de dirección de estas rectas es $\mathbf{d} = (\pm 2p, x_1 - h)$.*

Lo que sigue son algunos segmentos o rectas relacionadas con la parábola. Pueden hacerse analogías con los segmentos mencionados en la circunferencia.

DEFINICIÓN 20. *Si una recta \mathcal{L} no paralela al eje intersecta en un solo punto P a una parábola, se dice que \mathcal{L} es **recta tangente** a la parábola en P y en tal caso a P se le llama punto de tangencia. Si \mathcal{L} y la parábola se intersectan en dos puntos diremos que \mathcal{L} es **recta secante**. El segmento limitado por dos puntos en la parábola se denomina **cuerda**. Si una cuerda pasa por el foco, la llamaremos **cuerda focal**. La cuerda focal perpendicular al eje es el **lado recto** de una parábola. Para un punto P en la parábola, la distancia al foco se denomina **radio focal**.*

EJEMPLO 63. *Deseamos calcular el radio focal en una parábola con ecuación ordinaria de la forma $\pm 4p(y - k) = (x - h)^2$; el foco es $F = (h, k \pm p)$ y para cualquier punto $P = (x_1, y_1)$ en la parábola tenemos que $y_1 \geq k$ si la parábola abre hacia el eje $+x$ o $y_1 \leq k$ si lo hace hacia el eje $-x$. Luego, en el primer caso tenemos $(y_1 - k) \geq 0$ mientras que en el segundo $-(y_1 - k) \geq 0$. Llamemos $\mathbf{v} = \mathbf{p} - \mathbf{f}$ al vector cuya norma es el radio focal buscado. Tenemos*

pues que $\mathbf{v} = (x_1 - h, (y_1 - k) \mp p)$. Calculando su norma resulta

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\| &= \sqrt{(x_1 - h)^2 + ((y_1 - k) \mp p)^2} \\ &= \sqrt{\pm 4p(y_1 - k) + (y_1 - k)^2 \mp 2p(y_1 - k) + p^2} \\ &= \sqrt{(y_1 - k)^2 \pm 2p(y_1 - k) + p^2} \\ &= \sqrt{((y_1 - k) \pm p)^2} \\ &= |(y_1 - k) \pm p| \end{aligned}$$

Ahora bien, para el caso $4p(y - k) = (x - h)^2$ se tiene que $y_1 - k \geq 0$ y

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\| &= |(y_1 - k) + p| \\ &= (y_1 - k) + p. \end{aligned}$$

Para el otro caso $-(y_1 - k) \geq 0$ y así

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\| &= |(y_1 - k) - p| \\ &= -((y_1 - k) - p) \\ &= -(y_1 - k) + p. \end{aligned}$$

El radio focal de la parábola con ecuación $\pm 4p(y - k) = (x - h)^2$ es $\pm (y_1 - k) + p$. Con esto es muy fácil calcular la longitud del lado recto (ver el Ejercicio 156).

Las parábolas tienen una importante propiedad que relaciona las rectas tangentes, el eje y los radios focales. Esta relación dice que la recta tangente forma ángulos iguales con los radios focales respecto al punto de tangencia y las rectas paralelas al eje que pasan por tal punto de tangencia.

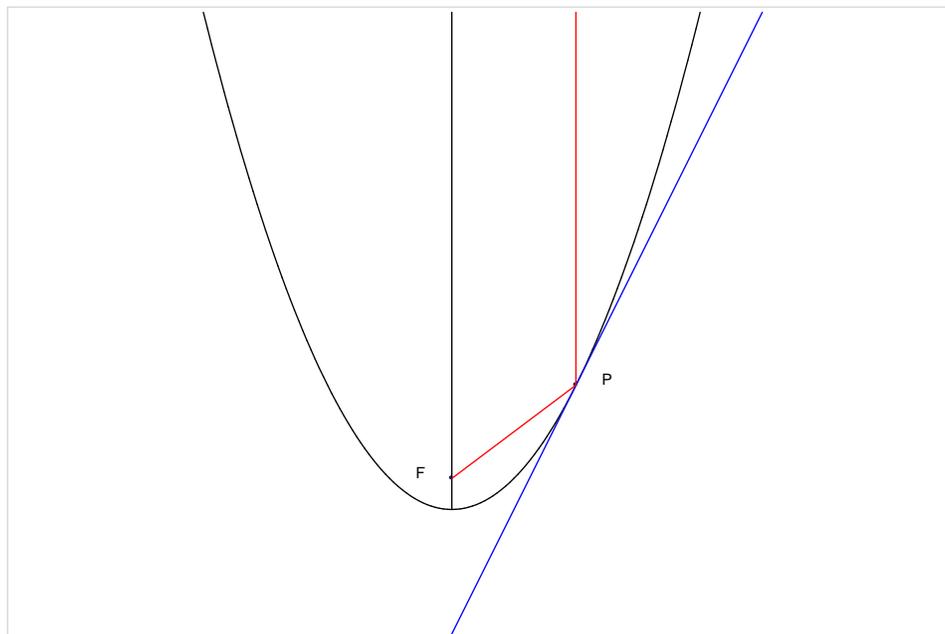


Figura 47

TEOREMA 11. *Sea $P = (x_1, y_1)$ un punto en una parábola. Sean \mathcal{L}_1 una recta paralela al eje de la parábola y \mathcal{L}_2 una recta que pasa por el foco F . Suponga que las rectas \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 se intersectan en P . Entonces la recta tangente a la parábola en P es una bisectriz de las rectas \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 .*

DEMOSTRACIÓN. La prueba se presenta para las parábolas con eje paralelo al eje Y . Llamemos \mathbf{n} al vector normal de la recta \mathcal{L}_2 que pasa por F y P . Para la parábola con ramas abriendo hacia el eje $+x$, $\mathbf{v} = (x_1 - h, (y_1 - k) - p)$ es un vector de dirección de \mathcal{L}_2 , luego resulta que $\mathbf{n} = \mathbf{v}_p$, por lo que

$$\mathbf{n} = (-(y_1 - k) + p, x_1 - h)$$

y ya sabemos que $\|\mathbf{n}\| = (y_1 - k) + p$. La recta paralela al eje de la parábola tiene por ecuación $x - x_1 = 0$. Con esto podemos calcular las ecuaciones de las rectas bisectrices. Empleando la fórmula de distancia de un punto a una recta obtenemos

$$|x - x_1| = \frac{|(-(y_1 - k) + p)x + (x_1 - h)y + C|}{(y_1 - k) + p}$$

lo que nos lleva a las rectas

$$\mathcal{M}_1 : ((y_1 - k) + p)(x - x_1) = (-(y_1 - k) + p)x + (x_1 - h)y + C$$

y

$$\mathcal{M}_2 : -((y_1 - k) + p)(x - x_1) = (-(y_1 - k) + p)x + (x_1 - h)y + C.$$

Obtengamos un vector de dirección para \mathcal{M}_1 . La ecuación cartesiana es

$$2(y_1 - k)x - (x_1 - h)y + C = 0$$

para alguna constante C . Un vector de dirección es pues

$$((x_1 - h), 2(y_1 - k)).$$

Pero este vector, al multiplicarlo por el escalar $\frac{2p}{x_1 - h}$, resulta que es paralelo a $\mathbf{d} = (2p, x_1 - h)$, el cual es un vector de dirección de la recta tangente a la parábola en P .

De manera análoga se establece para una parábola con ramas abriendo hacia el eje $-x$ que un vector de dirección para la recta que bisecta \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 es precisamente $\mathbf{d} = (-2p, x_1 - h)$. \square

OBSERVACIÓN 16. *La recta \mathcal{M}_2 se denomina recta ortogonal a la parábola en el punto P .*

2.3. Elipse. La definición del lugar geométrico que llamaremos elipse incluye dos puntos fijos.

DEFINICIÓN 21. *Dados dos puntos fijos F_1 y F_2 con punto medio $C = (h, k)$, la **elipse** es el lugar geométrico \mathcal{E} de los puntos cuyas distancias a los puntos F_1 y F_2 siempre suman una constante mayor que la distancia $\|F_2 - F_1\|$. A F_1 y F_2 los denominaremos **focos de la elipse** y a C le asignaremos el nombre de **centro de la elipse**.*

Para obtener la ecuación de este lugar geométrico, designemos $c = \|F_2 - C\| = \|F_1 - C\|$ de tal suerte que $\|F_2 - F_1\| = 2c$. Para un $P \in \mathcal{E}$, resulta que $d(P, F_1) + d(P, F_2) > 2c$, en consecuencia los puntos en el segmento que une los focos están excluidos. La recta que pasa

por los focos contiene puntos en la elipse. Sean éstos V_1 y V_2 . Como hicimos con la parábola, consideremos primeramente los focos como

$$F_1 = (h - c, k) \quad \text{y} \quad F_2 = (h + c, k).$$

Entonces

$$d(V_1, F_1) + d(V_1, F_2) = d(V_2, F_1) + d(V_2, F_2).$$

Ahora bien, debido a que estos segmentos son horizontales, es tarea sencilla deducir que

$$d(V_1, F_1) = d(V_1, C) - c,$$

$$d(V_1, F_2) = d(V_1, C) + c,$$

$$d(V_2, F_1) = d(V_2, C) + c,$$

$$d(V_2, F_2) = d(V_2, C) - c.$$

Con esto encontramos que la suma de las distancias es la constante $2d(V_1, C) = 2d(V_2, C)$. Designemos con a al valor común $d(V_1, C) = d(V_2, C)$. Así pues, $a > c$ y además $P \in \mathcal{E}$ si y sólo si

$$(2.8) \quad d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a.$$

En la Figura 48 se muestran algunos elementos de una elipse.

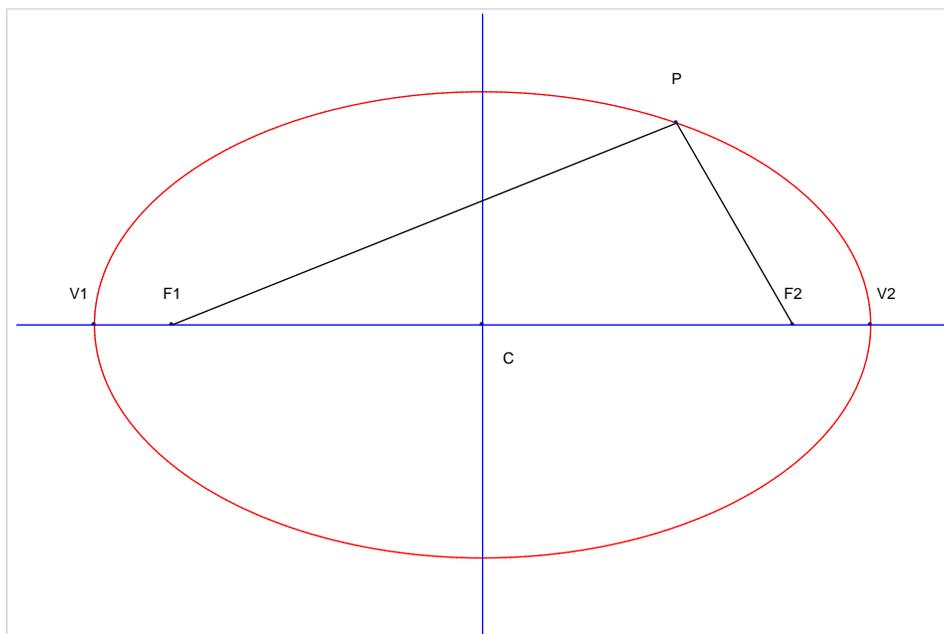


Figura 48

Los puntos $V_1 = (h - a, k)$ y $V_2 = (h + a, k)$ serán llamados vértices. Los focos son los puntos $F_1 = (h - c, k)$ y $F_2 = (h + c, k)$. Procedamos a deducir la ecuación de la elipse. Un punto $P = (x, y)$ está en la elipse \mathcal{E} si y sólo si

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a,$$

es decir

$$\sqrt{((x - h) + c)^2 + (y - k)^2} + \sqrt{((x - h) - c)^2 + (y - k)^2} = 2a$$

o lo que es lo mismo

$$\sqrt{((x-h)+c)^2 + (y-k)^2} = 2a - \sqrt{((x-h)-c)^2 + (y-k)^2}.$$

Elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación manteniendo siempre $(x-h)$ y $(y-k)$ obtenemos

$$((x-h)+c)^2 + (y-k)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{((x-h)-c)^2 + (y-k)^2} + ((x-h)-c)^2 + (y-k)^2.$$

Simplificando

$$((x-h)+c)^2 - ((x-h)-c)^2 - 4a^2 = -4a\sqrt{((x-h)-c)^2 + (y-k)^2}.$$

Desarrollando los binomios al cuadrado, simplificando nuevamente y multiplicando por $\frac{1}{4}$ llegamos a

$$(2.9) \quad (x-h)c - a^2 = -a\sqrt{((x-h)-c)^2 + (y-k)^2}$$

para volver a elevar al cuadrado ambos lados y así tener que

$$(x-h)^2 c^2 - 2(x-h)a^2 c + a^4 = a^2 [(x-h)^2 - 2(x-h)c + c^2 + (y-k)^2].$$

Dejando de un lado únicamente constantes resulta que

$$(x-h)^2 (a^2 - c^2) + a^2 (y-k)^2 = a^4 - a^2 c^2.$$

Ahora hagamos $b^2 = a^2 - c^2$ o equivalentemente $a^2 = b^2 + c^2$. Con ello podemos escribir

$$(2.10) \quad b^2 (x-h)^2 + a^2 (y-k)^2 = a^2 b^2$$

para finalmente obtener

$$(2.11) \quad \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

que llamaremos **ecuación cartesiana ordinaria** de la elipse.

De manera similar, si los focos son los puntos $F_1 = (h, k - c)$ y $F_2 = (h, k + c)$, la ecuación que obtenemos es

$$(2.12) \quad a^2 (x-h)^2 + b^2 (y-k)^2 = a^2 b^2$$

o bien

$$(2.13) \quad \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

y los vértices de esta elipse son los puntos $V_1 = (h, k - a)$ y $V_2 = (h, k + a)$.

Al desarrollar los cuadrados en (2.10) o en (2.12) obtenemos una ecuación de la forma

$$(2.14) \quad Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde $AC > 0$, la cual será llamada **ecuación general de la elipse**.

EJEMPLO 64. Una elipse tiene por ecuación general

$$4x^2 + 2y^2 - 3x + 2y + F = 0.$$

Completando los trinomios cuadrados perfectos tenemos que

$$4 \left(x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{9}{64} \right) + 2 \left(y^2 + y + \frac{1}{4} \right) = \frac{9}{16} + \frac{1}{2} - F.$$

Precisamos que $\frac{9}{16} + \frac{1}{2} - F > 0$ para que el lugar geométrico sea distinto del vacío. Así pues, la ecuación representará una elipse si y sólo si $F < \frac{17}{16}$; el caso $F = \frac{17}{16}$ produce únicamente el punto $C = \left(\frac{3}{8}, -\frac{1}{2}\right)$. Asignando el valor $F = -4$ la ecuación se puede escribir como

$$\frac{64}{81} \left(x - \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{32}{81} \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 1.$$

Con esta ecuación observamos que el centro es el punto $C = \left(\frac{3}{8}, -\frac{1}{2}\right)$, $a^2 = \frac{81}{32}$ y $b^2 = \frac{81}{64}$ por lo que $a = \frac{9}{4\sqrt{2}}$ y $b = \frac{9}{8}$. Se trata de una elipse con sus vértices en los puntos $V_1 = \left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{2} - \frac{9}{4\sqrt{2}}\right)$ y $V_2 = \left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{2} + \frac{9}{4\sqrt{2}}\right)$. También tenemos que $c^2 = \frac{81}{32} - \frac{81}{64} = \frac{81}{64}$ por lo que $c = \frac{9}{8}$ y los focos son los puntos $F_1 = \left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{2} - \frac{9}{8}\right) = \left(\frac{3}{4}, -\frac{13}{8}\right)$ y $F_2 = \left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{2} + \frac{9}{8}\right) = \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{8}\right)$. La gráfica se deja al estudiante.

EJEMPLO 65. Con las ecuaciones de la elipse 2.11 y 2.14 se deducen las igualdades

$$A = b^2, C = a^2, D = -2b^2h, E = -2a^2k, F = b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2.$$

Enseguida se establece que

$$h = -\frac{D}{2A}, k = -\frac{E}{2C}.$$

Es decir, llevamos 2.14 a la forma

$$A \left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + C \left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F.$$

Al designar

$$M = \frac{CD^2 + AE^2 - 4ACF}{4AC}$$

tenemos que de acuerdo con 2.13 $a^2 = \frac{M}{C}$ y $b^2 = \frac{M}{A}$ siempre que $M \neq 0$. Nótese que debe ser $AC > 0$, $MC > 0$ y $MA > 0$ para que la ecuación corresponda a una elipse. El número

$$(2.15) \quad \Delta = 4ACF - CD^2 - AE^2$$

nos dice que si $AC > 0$ y $A\Delta < 0$, se trata de una elipse, o si es el caso de que $A = C$, de una circunferencia. Cuando $\Delta = 0$, la cónica se degenera a un punto. Si $AC > 0$ y $A\Delta > 0$, es el conjunto vacío.

A continuación presentamos algunos segmentos notables en la elipse.

DEFINICIÓN 22. En una elipse, el segmento que une los vértices se llama **eje mayor**, el que une los focos se denomina **eje focal**. El segmento perpendicular al eje mayor (y por ende también será ortogonal al eje focal) con extremos en la elipse y punto medio en el centro C es el **eje menor**. Cualquier segmento con extremos en la elipse se denomina **cuerda**. Si la cuerda contiene un foco, se le llama **cuerda focal**. La cuerda focal ortogonal al eje mayor es el **lado recto**. Para un punto P en la elipse, la distancia al foco se denomina **radio focal**. Una cuerda que pasa por C se llama **diámetro**.

EJEMPLO 66. La longitud del lado recto de una elipse

$$\mathcal{E} : \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

es la distancia entre los puntos $P_1 = (h + c, y_1)$ y $P_2 = (h + c, y_2)$ donde

$$\begin{aligned}(y_1 - k)^2 &= b^2 \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) \\ &= \frac{b^4}{a^2},\end{aligned}$$

por lo que $y_{1,2} = k \pm \frac{b^2}{a}$ y con ello se ve fácilmente que la longitud del lado recto es $2\frac{b^2}{a}$.

De acuerdo con la Definición 22, una elipse tiene dos radios focales por cada punto en ella. Es útil mencionar que los segmentos del centro a un vértice y del centro a un foco se llaman **semi-eje mayor** y **semi-eje focal** respectivamente y sus longitudes son a y c . Con ello resulta que la longitud del **semi-eje menor** es b .

DEFINICIÓN 23. Si una recta \mathcal{L} intersecta en un solo punto P a una elipse, se dice que \mathcal{L} es **recta tangente** a la elipse en P y en tal caso a P se le llama punto de tangencia. Si una recta \mathcal{L} y una elipse se intersectan en dos puntos diremos que \mathcal{L} es **recta secante** a la elipse.

Podemos determinar la pendiente α de la recta $\mathcal{L} : y = \alpha x - \alpha x_1 + y_1$ para que ésta tenga un único punto de intersección con la elipse $\mathcal{E} : b^2(x - h)^2 + a^2(y - k)^2 = a^2b^2$. Para la elipse con ecuación $a^2(x - h)^2 + b^2(y - k)^2 = a^2b^2$ el proceso es análogo. Para tal objetivo es útil tener presente las siguientes ecuaciones equivalentes para la elipse

$$(2.16) \quad \begin{aligned}b^4(x - h)^2 &= a^2b^4 - a^2b^2(y - k)^2 \\ a^4(y - k)^2 &= a^4b^2 - a^2b^2(x - h)^2.\end{aligned}$$

Como se hizo con la parábola, después de la sustitución de y por $\alpha x - \alpha x_1 + y_1$, obtendremos una ecuación cuadrática con discriminante $B^2 - 4AC$. Para que haya una única raíz es necesario y suficiente que $\frac{1}{4}B^2 - AC = 0$. Esta última ecuación nos dará el valor de α .

TEOREMA 12. La recta $\mathcal{L} : y = \alpha x - \alpha x_1 + y_1$ es tangente a la elipse $\mathcal{E} : b^2(x - h)^2 + a^2(y - k)^2 = a^2b^2$ en el punto $P = (x_1, y_1)$ si y sólo si un vector normal a \mathcal{L} es

$$\mathbf{n} = (b^2(x_1 - h), a^2(y_1 - k)).$$

De manera equivalente, \mathcal{L} es paralela al vector

$$\mathbf{v} = (a^2(y_1 - k), -b^2(x_1 - h)).$$

Es decir, la pendiente es

$$(2.17) \quad \alpha = -\frac{b^2(x_1 - h)}{a^2(y_1 - k)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sustituyendo y por $\alpha x - \alpha x_1 + y_1$ en la ecuación de \mathcal{E} tenemos que

$$b^2(x - h)^2 + a^2(\alpha x - \alpha x_1 + (y_1 - k))^2 - a^2b^2 = 0.$$

Esta ecuación es, en efecto, una ecuación cuadrática en x . Desarrollando los productos, tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= (b^2 + a^2\alpha^2)x^2 + \\ &\quad (-2b^2h - 2a^2\alpha^2x_1 + 2a^2\alpha(y_1 - k))x + \\ &\quad (b^2h^2 + a^2\alpha^2x_1^2 + a^2(y_1 - k)^2 - 2a^2\alpha x_1(y_1 - k) - a^2b^2) \\ &= Ax^2 + Bx + C. \end{aligned}$$

Obtengamos ahora la expresión $\frac{1}{4}B^2 - AC$

$$\begin{vmatrix} b^4h^2 & +a^4\alpha^4x_1^2 & +a^4\alpha^2(y_1 - k)^2 & +2a^2b^2\alpha^2x_1h \\ -b^4h^2 & -2a^2b^2\alpha h(y_1 - k) & a^2b^4 & -2a^4\alpha^3x_1(y_1 - k) \\ -a^2b^2(y_1 - k)^2 & +2a^2b^2\alpha x_1(y_1 - k) & -a^4\alpha^2(y_1 - k)^2 & -a^2b^2\alpha^2x_1^2 \\ & -a^4\alpha^4x_1^2 & & -a^2b^2\alpha^2h^2 \\ & & & +2a^4\alpha^3x_1(y_1 - k) \\ & & & +a^4b^2\alpha^2. \end{vmatrix}$$

Sumando por columnas encontramos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}B^2 - AC &= -a^2b^2(y_1 - k)^2 + 2a^2b^2\alpha(x_1 - h)(y_1 - k) + \\ &\quad a^2b^4 + \alpha^2(a^4b^2 - a^2b^2(x_1^2 - 2x_1h + h^2)) \\ &= (a^2b^4 - a^2b^2(y_1 - k)^2) + \\ &\quad 2a^2b^2\alpha(x_1 - h)(y_1 - k) + \\ &\quad \alpha^2(a^4b^2 - a^2b^2(x_1 - h)^2). \end{aligned}$$

Empleando ahora las ecuaciones (2.16), llegamos a que

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}B^2 - AC &= b^4(x_1 - h)^2 + \\ &\quad 2a^2b^2\alpha(x_1 - h)(y_1 - k) + \\ &\quad \alpha^2a^4(y_1 - k)^2 \\ &= (b^2(x_1 - h) + \alpha a^2(y_1 - k))^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

y esto ocurre si y sólo si se verifica (2.17) □

EJEMPLO 67. El punto $P\left(\frac{3+3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, \sqrt{2} - 2\right)$ está en la elipse $\mathcal{E} : \frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$. La recta tangente a la elipse en P tiene pendiente $-\frac{4(3/\sqrt{2})}{9(\sqrt{2})} = -\frac{2}{3}$ y en consecuencia tiene por ecuación

$$\begin{aligned} y &= -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}\left(\frac{3+3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) + (\sqrt{2} - 2) \\ &= -\frac{2}{3}x + 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

O bien

$$2x + 3y = 6\sqrt{2}.$$

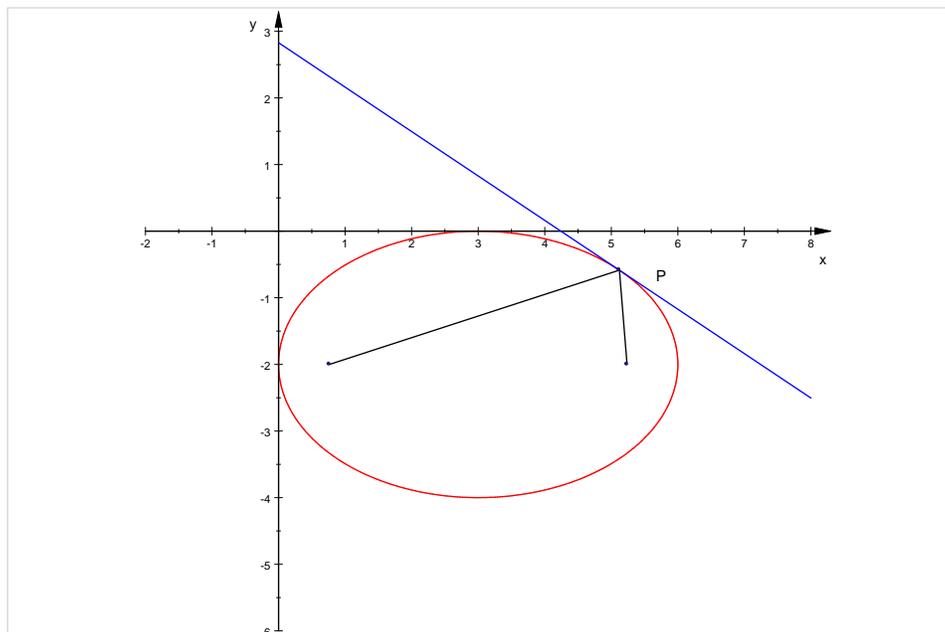


Figura 49

En la Figura 49 podemos observar que la recta tangente a la elipse en P es una bisectriz de las rectas que pasan por el punto de tangencia y los focos (ver el Ejercicio 182).

2.4. Hipérbola. La hipérbola es quizá la menos intuitiva de las cónicas. El lugar geométrico incluye, como en la elipse, dos puntos fijos llamados focos.

DEFINICIÓN 24. *Dados dos puntos fijos F_1 y F_2 con punto medio $C = (h, k)$, la **hipérbola** es el lugar geométrico \mathcal{H} de los puntos cuyo valor absoluto de la diferencia de las distancias a los puntos F_1 y F_2 siempre es una constante menor que la distancia $\|F_2 - F_1\|$. A F_1 y F_2 los denominaremos **focos de la hipérbola** y a C le asignaremos el nombre de **centro de la hipérbola**.*

Para obtener la ecuación de este lugar geométrico, procedamos como en la elipse: designemos $c = \|F_2 - C\| = \|F_1 - C\|$, así que nuevamente $\|F_2 - F_1\| = 2c$. Para un $P \in \mathcal{H}$, tenemos que $d(P, F_1) + d(P, F_2) < 2c$, en consecuencia hay puntos en el segmento que une los focos que pertenecen a \mathcal{H} . Sean éstos V_1 y V_2 . Como hicimos con la elipse, asumamos que F_1 y F_2 están sobre un segmento paralelo al eje X y así encontramos que los focos son

$$F_1 = (h - c, k) \quad \text{y} \quad F_2 = (h + c, k).$$

Entonces

$$|d(V_1, F_1) - d(V_1, F_2)| = |d(V_2, F_1) - d(V_2, F_2)|.$$

A diferencia de la elipse, tenemos ahora que se verifican las ecuaciones

$$\begin{aligned} d(V_1, F_1) &= c - d(V_1, C), \\ d(V_1, F_2) &= c + d(V_1, C), \\ d(V_2, F_1) &= c + d(V_2, C), \\ d(V_2, F_2) &= c - d(V_2, C). \end{aligned}$$

y nuevamente, como en la elipse, llegamos a

$$(x-h)^2 c^2 - 2(x-h) a^2 c + a^4 = a^2 [(x-h)^2 - 2(x-h)c + c^2 + (y-k)^2].$$

Ahora, a diferencia de la elipse, reescribimos esta ecuación como

$$(x-h)^2 (c^2 - a^2) - a^2 (y-k)^2 = a^2 c^2 - a^4.$$

Recordemos que ahora $c > a > 0$, por lo que asignamos $b^2 = c^2 - a^2 > 0$, así que la ecuación anterior la escribimos como

$$(2.20) \quad b^2 (x-h)^2 - a^2 (y-k)^2 = a^2 b^2.$$

Dividiendo entre $a^2 b^2$ resulta

$$(2.21) \quad \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

y la llamaremos **ecuación cartesiana ordinaria** de la hipérbola.

Es obvio, como en la elipse, que si los focos son los puntos $F_1 = (h, k - c)$ y $F_2 = (h, k + c)$, obtenemos la ecuación

$$(2.22) \quad b^2 (y-k)^2 - a^2 (x-h)^2 = a^2 b^2$$

y con ella llegamos a la ecuación

$$(2.23) \quad \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1.$$

De manera similar, al desarrollar los cuadrados en (2.20) o en (2.22) obtenemos una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

pero ahora $AC < 0$. Esta ecuación será llamada **ecuación general de la hipérbola**.

EJEMPLO 68. Dada la ecuación $16x^2 - 9y^2 - 32x + 54y - 101 = 0$, completamos los trinomios cuadrados perfectos para llegar a

$$16(x^2 - 2x + 1) - 9(y^2 - 6y + 9) - 101 - 16 + 81 = 0,$$

o de manera equivalente

$$\frac{4(x-1)^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{4} = 1.$$

Se trata pues de una hipérbola con centro en $C = (1, 3)$, $a = \frac{3}{2}$ y $b = 2$.

Notemos que ahora no es necesario que $a > b$; simplemente se acostumbra a designar con a^2 el denominador del término cuadrático con signo positivo y con b^2 el denominador del término cuadrático con signo negativo.

Para efectos de obtener la gráfica de la hipérbola, tracemos un rectángulo de lados paralelos al segmento entre los focos y a su ortogonal de longitudes $2a$ y $2b$ respectivamente con centro en $C = (h, k)$. En los puntos de intersección del segmento que une los focos con los correspondientes lados del rectángulo localizamos los vértices (ver la Figura 50). Enseguida trazamos las rectas que contienen a las diagonales del rectángulo. A estas rectas las denominaremos **asíntotas**. En las regiones delimitadas por estas diagonales que contienen a los vértices trazamos las ramas de las hipérbolas. En la Figura 51 se muestran las hipérbolas con ecuación ordinaria

$$\frac{4(x-1)^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{4} = \pm 1.$$

Para la hipérbola $\mathcal{H} : 16x^2 - 9y^2 - 32x + 54y - 101 = 0$ se indican los vértices.

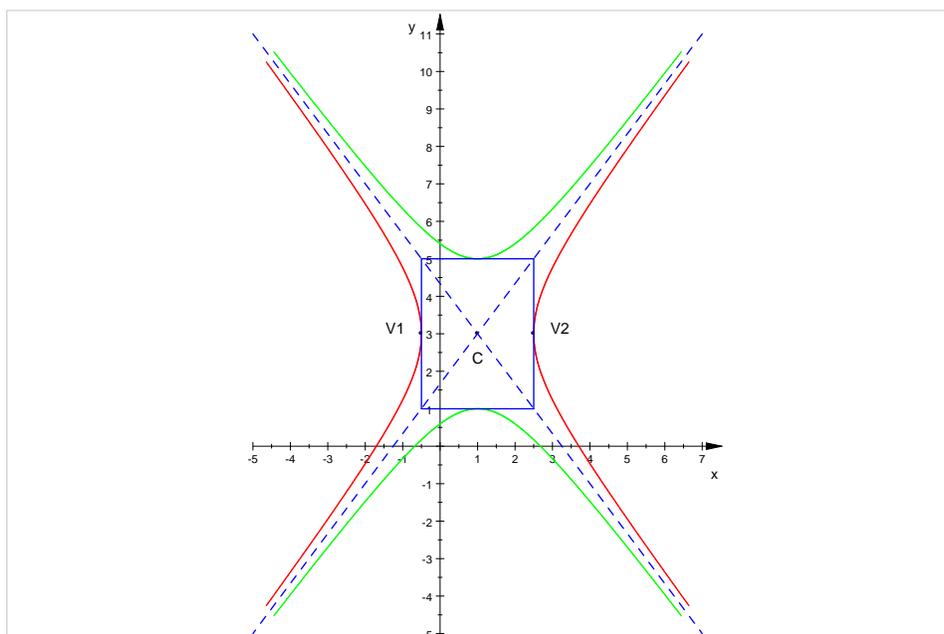


Figura 51

Las hipérbolas con ecuaciones ordinarias

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = \pm 1$$

se dicen **hipérbolas conjugadas**.

Las analogías entre la elipse y la hipérbola incluyen, además de sus ecuaciones, los segmentos notables en ellas. Pero algo que no comparten es que la hipérbola consta de dos ramas, cada una siendo la intersección del plano con cada uno de los conos con mismo vértice y mismo eje.

EJEMPLO 69. En el Ejemplo 68 aparecieron dos rectas diagonales de un cuadrado con centro en $C = (h, k)$ cuyas ecuaciones resultaron ser de la forma

$$(2.24) \quad \mathcal{A} : y - k = \pm \frac{b}{a} (x - h).$$

Bien, resulta que para la hipérbola \mathcal{H} con ecuación (2.20) dado un punto $P = (x_1, y_1) \in \mathcal{H}$ podemos obtener la expresión

$$y_1 - k = \pm \frac{b}{a} \sqrt{(x_1 - h)^2 - a^2}$$

que también puede escribirse como

$$(2.25) \quad y_1 - k = \pm \frac{b}{a} (x_1 - h) \sqrt{1 - \frac{a^2}{(x_1 - h)^2}}$$

para la cual deseamos que $1 - \frac{a^2}{(x_1 - h)^2} \geq 0$. Esto en realidad se verifica siempre que $|x_1 - h| \geq a$. Para esta última es suficiente que x_1 sea muy grande. Estamos particularmente interesados en lo que ocurre entre P y las rectas asintotas cuando x_1 crece sin límite. Para valores de x_1

muy grandes, el radical de (2.25) se aproxima más y más a 1 y tiende a la ecuación (2.24) pero sin que ello llegue nunca a ocurrir, pues ello significaría que $\frac{a^2}{(x_1-h)^2} = 0$, lo cual es imposible.

Otra manera de ver lo anterior es analizando el comportamiento de la distancia de $d(P, \mathcal{A})$. Consideremos solamente la recta con pendiente positiva y un punto en la rama con $x_1 \geq h + a$. Tenemos que $|b(x_1 - h) + a(y_1 - k)| \neq 0$ (¿por qué?) y por ello podemos escribir

$$\begin{aligned} d(P, \mathcal{A}) &= \frac{|bx_1 - ay_1 + ak - bh|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{|b(x_1 - h) - a(y_1 - k)| |b(x_1 - h) + a(y_1 - k)|}{\sqrt{a^2 + b^2} |b(x_1 - h) + a(y_1 - k)|} \\ &= \frac{|b^2(x_1 - h)^2 - a^2(y_1 - k)^2|}{\sqrt{a^2 + b^2} |b(x_1 - h) + a(y_1 - k)|} \\ &= \frac{a^2 b^2}{\sqrt{a^2 + b^2} |b(x_1 - h) + a(y_1 - k)|}. \end{aligned}$$

Cuando el punto P se mueve sobre \mathcal{H} de manera que sus coordenadas crezcan sin límite, nos da como resultado que $d(P, \mathcal{A})$ es cada vez más pequeña sin llegar nunca a cero.

DEFINICIÓN 25. En una hipérbola, el segmento que une los vértices se llama **eje transversal** o **transverso**, el que une los focos se denomina **eje focal**. El segmento perpendicular al eje transversal con longitud $2b$ y punto medio en el centro C es el **eje conjugado**. Cualquier segmento con extremos en cualquier rama de la hipérbola se denomina **cuerda**. Si la cuerda contiene a un foco, se le llama **cuerda focal**. La cuerda focal ortogonal al eje transversal es el **lado recto**. Para un punto P en la hipérbola, la distancia al foco se denomina **radio focal**. Una cuerda que pasa por C se llama **diámetro**.

A diferencia de la elipse, el lugar geométrico de la ecuación general de la hipérbola nunca es el conjunto vacío. Si

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

es tal que $AC < 0$, al completar los trinomios cuadrados perfectos obtenemos,

$$A \left(x + \frac{D}{2A} \right)^2 + C \left(y + \frac{E}{2C} \right)^2 = \frac{CD^2 + AE^2 - 4ACF}{4AC}.$$

Mientras $\Delta = 4ACF - CD^2 - AE^2$ no sea cero, el lugar geométrico será una hipérbola; cuando $\Delta = 0$, la hipérbola se degenera a las rectas que pasan por $C = (h, k)$ con pendientes $\pm \frac{b}{a}$ (ver el Ejercicio 185).

EJEMPLO 70. Una hipérbola \mathcal{H} tiene sus focos en $F_1 = (-7, 3)$ y $F_2 = (-1, 3)$ y su lado recto mide 5. Entonces el centro es $C = (-4, 3)$ y los dos puntos en \mathcal{H} que distan del foco F_1 en $\frac{5}{2}$ son $P = (-7, 3 \pm \frac{5}{2})$. Elijamos $P = (-7, \frac{1}{2})$. Dado que $c = 3$ y $b^2 = c^2 - a^2$, la ecuación cartesiana ordinaria es de la forma

$$\frac{(x + 4)^2}{a^2} - \frac{(y - 3)^2}{9 - a^2} = 1.$$

Sustituyendo las coordenadas de P , obtenemos

$$\frac{9}{a^2} - \frac{\frac{25}{4}}{9 - a^2} = 1$$

y realizando la suma

$$36(9 - a^2) - 25a^2 = 36a^2 - 4a^4$$

nos lleva a una ecuación cuadrática en la incógnita a^2

$$4a^4 - 97a^2 + 324 = 0$$

cuyas soluciones son

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{1}{8} (97 \pm \sqrt{4225}) \\ &= \frac{1}{8} (97 \pm 65). \end{aligned}$$

El valor de $a^2 = \frac{81}{4}$ no nos es útil y debe ser $a^2 = 4$. Entonces la ecuación es

$$\frac{(x+4)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{5} = 1$$

y la respectiva ecuación general es

$$5x^2 - 4y^2 + 40x + 24y + 24 = 0.$$

EJEMPLO 71. Llevando la ecuación

$$16x^2 - 9y^2 + 160x + 90y + F = 0$$

a la forma ordinaria resulta en

$$16(x+5)^2 - 9(y-5)^2 = 175 - F.$$

Con el valor de $F = 31$ nos da

$$\frac{(x+5)^2}{9} - \frac{(y-5)^2}{16} = 1$$

mientras que con $F = 319$

$$\frac{(y-5)^2}{16} - \frac{(x+5)^2}{9} = 1.$$

Ambas hipérbolas están encerradas en las regiones limitadas por las rectas $4x + 3y + 5 = 0$ y $4x - 3y + 35 = 0$. Se trata pues, de dos hipérbolas conjugadas.

Terminemos esta sección con una tabla que resume los posibles casos de la ecuación cuadrática

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde $\Delta = 4ACF - CD^2 - AE^2$.

$AC > 0$	$A\Delta < 0$	$A = C$		Circunferencia
		$A \neq C$		Elipse
	$A\Delta = 0$			Un punto
	$A\Delta > 0$			El conjunto vacío
$AC = 0$	$A \neq 0$	$E \neq 0$		Parábola
		$E = 0$	$4AF - D^2 > 0$	El conjunto vacío
			$4AF - D^2 = 0$	Una recta
			$4AF - D^2 < 0$	Dos rectas paralelas
	$C \neq 0$	$D \neq 0$		Parábola
		$D = 0$	$4CF - E^2 > 0$	El conjunto vacío
			$4CF - E^2 = 0$	Una recta
			$4CF - E^2 < 0$	Dos rectas paralelas
$AC < 0$	$\Delta \neq 0$			Hipérbola
	$\Delta = 0$			Rectas no paralelas

3. Excentricidad

Una manera de definir las cónicas es en términos de una proporción de distancias llamada **excentricidad**.

Consideremos la elipse

$$\mathcal{E} : \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

en la que ya sabemos que $c < a$ y $a^2 = b^2 + c^2$. Tomemos un $P = (x_1, y_1) \in \mathcal{E}$. Debe ser por ello $h - a \leq x_1 \leq h + a$, o lo que es lo mismo $|x_1 - h| \leq a$. Esto a su vez implica que $x_1 - h \leq a < \frac{a^2}{c}$. Respecto al foco $F_2 = (h + c, k)$, el radio focal es $a - \frac{c}{a}(x_1 - h)$ (ver el Ejercicio 178). Retomemos la expresión (2.9) que obtuvimos durante los pasos para llegar a la ecuación de la elipse, a saber

$$(x-h)c - a^2 = -a\sqrt{((x-h)-c)^2 + (y-k)^2}$$

o equivalentemente

$$\sqrt{((x-h)-c)^2 + (y-k)^2} = a - \frac{c}{a}(x-h)$$

y ésta es una manera de deducir una fórmula para uno de los radios focales. Entonces para P tenemos que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p} - \mathbf{f}_2\| &= a - \frac{c}{a}(x_1 - h) \\ &= \frac{c}{a} \left(\frac{a^2}{c} - (x_1 - h) \right). \end{aligned}$$

Pero el factor $\left(\frac{a^2}{c} - (x_1 - h)\right)$ es en realidad la distancia del punto P a una recta perpendicular al eje focal. Es inmediato que tal recta es $x = h + \frac{a^2}{c}$, la cual llamaremos **directriz de la elipse** respecto al foco F_2 y se denotará \mathcal{D}_2 . Con esto tenemos que para $P = (x_1, y_1)$, el cociente de la distancia al foco F_2 entre la distancia a la directriz es constante:

$$\frac{d(P, F_2)}{d(P, \mathcal{D}_2)} = \frac{\|\mathbf{p} - \mathbf{f}_2\|}{d(P, \mathcal{D}_2)} = \frac{c}{a}.$$

De manera similar se obtiene $\mathcal{D}_1 : x = h - \frac{a^2}{c}$ satisface la misma propiedad respecto al foco F_1 , es decir

$$\frac{d(P, F_1)}{d(P, \mathcal{D}_1)} = \frac{\|\mathbf{p} - \mathbf{f}_1\|}{d(P, \mathcal{D}_1)} = \frac{c}{a}.$$

Este cociente es la llamada **excentricidad** de la elipse y se simboliza e . Obsérvese que $0 < e < 1$. Debido a que los pasos para llegar a la expresión de la excentricidad e son reversibles, podemos dar la siguiente definición.

DEFINICIÓN 26. *La elipse es el lugar geométrico de los puntos cuyo cociente de las distancias a un punto fijo llamado foco y una recta que no contiene al foco llamada directriz es una constante e con $0 < e < 1$.*

Se puede dar la siguiente definición de parábola e hipérbola.

DEFINICIÓN 27. *La parábola es el lugar geométrico de los puntos cuyo cociente de las distancias a un punto fijo llamado foco y una recta que no contiene al foco llamada directriz es una constante $e = 1$.*

La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos cuyo cociente de las distancias a un punto fijo llamado foco y una recta que no contiene al foco llamada directriz es una constante e con $1 < e$.

Hagamos un análisis similar al realizado para el caso de la elipse: dada la hipérbola con ecuación

$$\mathcal{H} : \frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

donde ahora $c > a$ y $c^2 = a^2 + b^2$, sea $P = (x_1, y_1) \in \mathcal{H}$ en la rama tal que $a \leq x_1 - h$, en este caso $x_1 - h \geq a > \frac{a^2}{c}$. Ahora retomemos la ecuación (2.19)

$$c(x - h) - a^2 = a\sqrt{((x - h) - c)^2 + (y - k)^2}$$

donde el doble signo se eliminó por que ya elegimos la rama de la hipérbola correspondiente al foco $F_2 = (h + c, k)$. Entonces multiplicando por $\frac{1}{a}$ y factorizando nuevamente $\frac{c}{a}$

$$\frac{c}{a} \left((x - h) - \frac{a^2}{c} \right) = \sqrt{((x - h) - c)^2 + (y - k)^2}.$$

Entonces hemos establecido que

$$\|\mathbf{p} - \mathbf{f}_2\| = \frac{c}{a} \left((x_1 - h) - \frac{a^2}{c} \right)$$

donde nuevamente el factor $\left((x_1 - h) - \frac{a^2}{c} \right)$ es en realidad la distancia del punto P a una recta perpendicular al eje transversal que llamaremos **directriz de la hipérbola**. Las rectas

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 & : x = h - \frac{a^2}{c} \\ \mathcal{D}_2 & : x = h + \frac{a^2}{c} \end{aligned}$$

son las directrices de la hipérbola \mathcal{H} ; la excentricidad es ahora $e = \frac{c}{a} > 1$.

Una propiedad de las directrices de la elipse es análoga a la que goza la directriz de una parábola (ver el Ejercicio 162).

TEOREMA 13. *Sea la elipse*

$$\mathcal{E} : \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

y sean $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ dos puntos en la elipse extremos de una cuerda focal. Entonces las rectas tangentes a \mathcal{E} en $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ se intersectan en una directriz.

DEMOSTRACIÓN. Sin perder generalidad supongamos que la cuerda pasa por el foco $F_2 = (h+c, k)$. Entonces afirmamos que las rectas tangentes se intersectan en un punto con $x_3 = h + \frac{a^2}{c}$. Demostrando esto establecemos que la abscisa del punto de intersección no depende de los puntos de tangencia. Es decir, dicho punto se encuentra siempre en la directriz $\mathcal{D}_2 : x = h + \frac{a^2}{c}$.

La recta que contiene a la cuerda focal tiene por pendiente el valor dado por cualquiera de las expresiones siguientes, iguales todas entre ellas

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - k}{(x_1 - h) - c} = \frac{y_2 - k}{(x_2 - h) - c}.$$

Reescribimos

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

como

$$\frac{(y_2 - k) - (y_1 - k)}{(x_2 - h) - (x_1 - h)}$$

y de la primera de estas igualdades deducimos inmediatamente que

$$\begin{aligned} (y_2 - y_1)(x_1 - h) - (y_2 - y_1)c &= (x_2 - h)(y_1 - k) - (x_1 - h)(y_1 - k) \\ (y_2 - k)(x_1 - h) - (y_1 - k)(x_1 - h) - (y_2 - y_1)c &= (x_2 - h)(y_1 - k) - (x_1 - h)(y_1 - k) \\ (y_2 - k)(x_1 - h) - (y_2 - y_1)c &= (x_2 - h)(y_1 - k) \\ (y_2 - k)(x_1 - h) - (x_2 - h)(y_1 - k) &= (y_2 - y_1)c. \end{aligned}$$

Esto nos dice que las coordenadas de los puntos de tangencia satisfacen

$$(3.1) \quad c = \frac{(x_1 - h)(y_2 - k) - (x_2 - h)(y_1 - k)}{(y_2 - y_1)}.$$

Por otro lado, sabemos que las pendientes de las rectas tangentes están dadas por

$$m_i = -\frac{b^2(x_i - h)}{a^2(y_i - k)}$$

para $i \in \{1, 2\}$. Con ello podemos escribir las rectas tangentes de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &: y - y_1 = -\frac{b^2(x_1 - h)}{a^2(y_1 - k)}(x - x_1) \\ \mathcal{L}_2 &: y - y_2 = -\frac{b^2(x_2 - h)}{a^2(y_2 - k)}(x - x_2) \end{aligned}$$

pero de manera equivalente

$$\mathcal{L}_1 : (y - k) - (y_1 - k) = -\frac{b^2(x_1 - h)}{a^2(y_1 - k)}((x - h) - (x_1 - h))$$

$$\mathcal{L}_2 : (y - k) - (y_2 - k) = -\frac{b^2(x_2 - h)}{a^2(y_2 - k)}((x - h) - (x_2 - h))$$

Encontrar la intersección de estas rectas es resolver el sistema de dos ecuaciones lineales con las incógnitas

$$\begin{aligned} x - h \\ y - k \end{aligned}$$

cuya matriz aumentada es

$$\left[\begin{array}{cc|c} \frac{b^2(x_1-h)}{a^2(y_1-k)} & 1 & \frac{b^2(x_1-h)}{a^2(y_1-k)}(x_1-h) + (y_1-k) \\ \frac{b^2(x_2-h)}{a^2(y_2-k)} & 1 & \frac{b^2(x_2-h)}{a^2(y_2-k)}(x_2-h) + (y_2-k) \end{array} \right].$$

Antes de resolver este sistema debemos simplificar los términos que no son coeficientes de las incógnitas:

$$\begin{aligned} \frac{b^2(x_1-h)^2}{a^2(y_1-k)} + (y_1-k) &= \frac{b^2(x_1-h)^2}{a^2(y_1-k)} + \frac{a^2(y_1-k)^2}{a^2(y_1-k)} \\ &= \frac{b^2(x_1-h)^2 + a^2(y_1-k)^2}{a^2(y_1-k)} \\ &= \frac{a^2b^2}{a^2(y_1-k)} \\ &= \frac{b^2}{(y_1-k)}. \end{aligned}$$

De manera similar encontramos que

$$\frac{b^2(x_2-h)^2}{a^2(y_2-k)} + (y_2-k) = \frac{b^2}{(y_2-k)}.$$

Para aplicar la Regla de Cramer encontramos primero el determinante de la matriz de coeficientes que llamaremos Δ . Realizando los cálculos tenemos que

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} \frac{b^2(x_1-h)}{a^2(y_1-k)} & 1 \\ \frac{b^2(x_2-h)}{a^2(y_2-k)} & 1 \end{bmatrix} &= \frac{b^2}{a^2} \left(\frac{(x_1-h)}{(y_1-k)} - \frac{(x_2-h)}{(y_2-k)} \right) \\ &= \frac{b^2}{a^2} \left(\frac{(x_1-h)(y_2-k) - (x_2-h)(y_1-k)}{(y_1-k)(y_2-k)} \right) \end{aligned}$$

pero por (3.1)

$$\Delta = \frac{b^2c(y_2 - y_1)}{a^2(y_1 - k)(y_2 - k)}.$$

Finalmente calculamos el valor de $x_3 - h$ que viene dado por la expresión

$$\begin{aligned} x_3 - h &= \frac{1}{\Delta} \det \begin{bmatrix} \frac{b^2}{(y_1 - k)} & 1 \\ \frac{b^2}{(y_2 - k)} & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\Delta} \left(\frac{b^2}{(y_1 - k)} - \frac{b^2}{(y_2 - k)} \right) \\ &= \frac{a^2 (y_1 - k) (y_2 - k) - b^2 (y_2 - y_1)}{b^2 c (y_2 - y_1) (y_1 - k) (y_2 - k)} \\ &= \frac{a^2}{c}. \end{aligned}$$

Así que $x_3 = h + \frac{a^2}{c}$. Esto prueba el teorema. □

Ver la Figura 52.

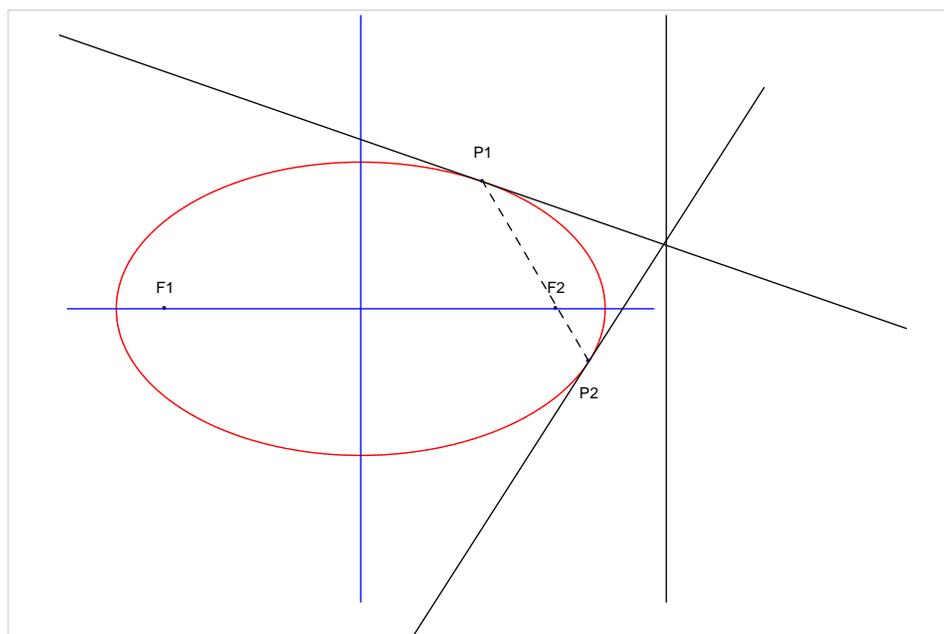


Figura 52

En el Ejercicio 193 se pide probar un resultado análogo para las hipérbolas.

EJEMPLO 72. *Obtenemos la ecuación de una familia de hipérbolas con eje transverso paralelo al eje de las abscisas y concéntricas en $C = (h, k)$ con excentricidad $e > 1$. Con este dato tenemos que $c^2 = e^2 a^2$ y por ende $e^2 a^2 = a^2 + b^2$ así que la ecuación cartesiana ordinaria es de la forma*

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{(e^2 - 1) a^2} = 1.$$

Otra manera de obtener una ecuación para la misma familia es dejando fijo el valor de a y con un parámetro $\rho > 0$ podemos escribir

$$\frac{(x - h)^2}{(\rho a)^2} - \frac{(y - k)^2}{(e^2 - 1) (\rho a)^2} = 1$$

o bien, dado que $b^2 = (e^2 - 1) a^2$

$$(3.2) \quad \frac{(x - h)^2}{(\rho a)^2} - \frac{(y - k)^2}{(\rho b)^2} = 1.$$

De esta última ecuación se tiene que $e = \frac{\rho c}{\rho a} = \frac{c}{a}$ para cualquier $\rho > 0$.

Si $P_1 = (x_1, y_1)$ satisface la ecuación (2.23), entonces el punto

$$P_2 = (\rho x_1 + (1 - \rho) h, \rho y_1 + (1 - \rho) k)$$

satisface la ecuación (3.2) y además pertenece a la recta que pasa por $C = (h, k)$ y $P = (x_1, y_1)$ cuya ecuación es

$$y - k = \frac{y_1 - k}{x_1 - h} (x - h).$$

Después de observar la Figura 53 con dos hipérbolas concéntricas de excentricidad $\frac{5}{3}$, verificar ambas afirmaciones es muy sencillo.

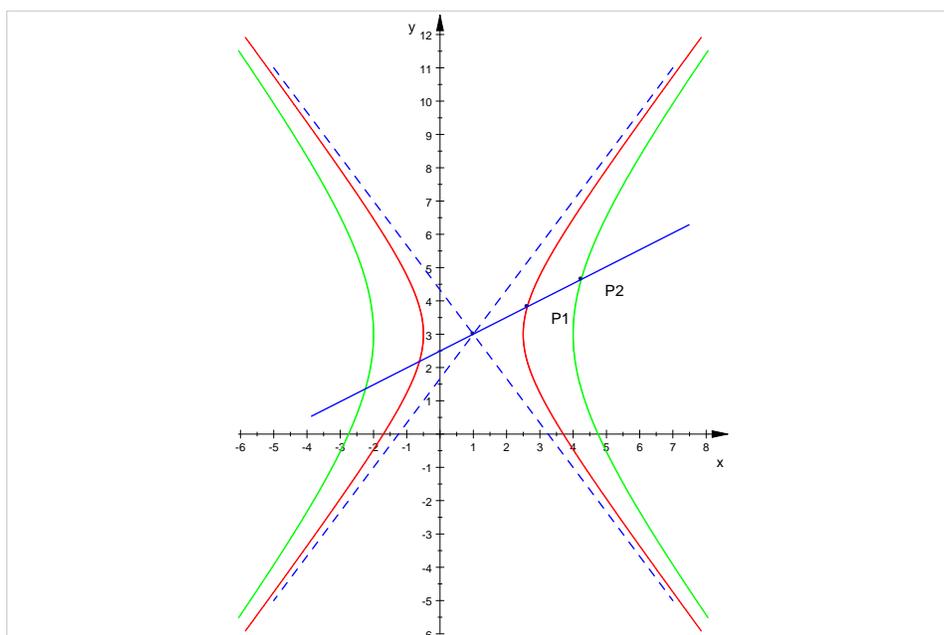


Figura 53

4. Ejercicios

EJERCICIO 123. Obtenga una ecuación para el lugar geométrico \mathcal{S} que consiste en los puntos cuya diferencia de las distancias a los puntos $F_1 = (1, 1)$ y $F_2 = (-1, -1)$ es ± 2 . Es decir

$$\mathcal{S} = \{U = (x, y) : |d(U, F_1) - d(U, F_2)| = 2\}.$$

EJERCICIO 124. Obtenga una ecuación para el lugar geométrico \mathcal{S} que consiste en los puntos cuya suma de las distancias a los puntos $F_1 = (0, 0)$ y $F_2 = (\frac{24}{5}, \frac{32}{5})$ es 10. Es decir

$$\mathcal{S} = \{U = (x, y) : d(U, F_1) + d(U, F_2) = 10\}.$$

EJERCICIO 125. Obtenga una ecuación para el lugar geométrico \mathcal{S} que consiste en los puntos cuya norma es igual al coseno de su ángulo con el eje $+x$.

EJERCICIO 126. *Obtenga una ecuación para el lugar geométrico \mathcal{S} que consiste en los puntos cuya norma es igual al seno de su ángulo con el eje $+x$.*

EJERCICIO 127. *Obtenga una ecuación para el lugar geométrico \mathcal{S} que consiste en los puntos cuya norma es igual a la tangente de su ángulo con el eje $+x$.*

EJERCICIO 128. *Obtenga una ecuación para el lugar geométrico \mathcal{S} que consiste en los puntos cuya norma es igual al seno del triple de su ángulo con el eje $+x$.*

EJERCICIO 129. *Obtenga una ecuación para el lugar geométrico \mathcal{S} que consiste en los puntos cuya norma es igual al coseno del triple de su ángulo con el eje $+x$.*

EJERCICIO 130. *Obtenga una ecuación para el lugar geométrico \mathcal{S} que consiste en los puntos cuya norma sumada a 4 veces el coseno de su ángulo con el eje $+x$ permanece siempre constante e igual a 2.*

EJERCICIO 131. *Obtenga la ecuación ordinaria y la correspondiente ecuación general de la circunferencia \mathcal{C} cuyo centro es $C = (-6, 2)$ y es tangente a la recta $\mathcal{L} : x + 2y + 6 = 0$.*

EJERCICIO 132. *Encuentre la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$ en $P = (5, 5)$.*

EJERCICIO 133. *Obtenga la ecuación ordinaria y la correspondiente ecuación general de la circunferencia \mathcal{C} cuyo centro está sobre la recta $\mathcal{L} : x - 3y + 1 = 0$ y pasa por los puntos $P_1 = (2, -5)$ y $P_2 = (16, 9)$.*

EJERCICIO 134. *Obtenga la ecuación ordinaria y la correspondiente ecuación general de la circunferencia \mathcal{C} cuyo centro está sobre la recta $\mathcal{L} : x + 2y = 8$ y pasa por los puntos $P_1 = (-4, 6)$ y $P_2 = (-2, 8)$.*

EJERCICIO 135. *Obtenga la ecuación ordinaria y la correspondiente ecuación general de la circunferencia \mathcal{C} que es tangente a $\mathcal{L} : 4x - 3y = 27$ en $P = (6, -1)$ y pasa por $Q = (6, 1)$.*

EJERCICIO 136. *Obtenga la ecuación ordinaria y la correspondiente ecuación general de la circunferencia \mathcal{C} que es tangente a $\mathcal{L} : x - y = 2$ en $P = (-1, -3)$ y pasa por $Q = (-11, 7)$.*

EJERCICIO 137. *Obtenga la ecuación ordinaria y la correspondiente ecuación general de la circunferencia \mathcal{C} que pasa por los puntos $P_1 = (5, 9)$, $P_2 = (5, 3)$ y $P_3 = (9, 7)$.*

EJERCICIO 138. *Obtenga la ecuación ordinaria y la correspondiente ecuación general de la circunferencia \mathcal{C} que pasa por los puntos $P_1 = (4, 3)$, $P_2 = (1, 6)$ y $P_3 = (-6, -1)$.*

EJERCICIO 139. *Verifique que el punto de intersección de las mediatrices de los triángulos del Ejercicio 58 equidista de los vértices. Esto da la llamada **circunferencia circunscrita** en un triángulo.*

EJERCICIO 140. *Demuestre que el punto de intersección de las mediatrices de un triángulo equidista de los vértices.*

EJERCICIO 141. *Demuestre que el punto de intersección de las bisectrices de un triángulo equidista de los lados. Concluya que con esta distancia y el punto de intersección se puede construir una circunferencia que es tangente a los tres lados del triángulo. Es la llamada **circunferencia inscrita** en un triángulo.*

EJERCICIO 142. Obtenga la ecuación ordinaria y la correspondiente ecuación general de la circunferencia \mathcal{C} inscrita en el triángulo con vértices $P_1 = \left(\frac{35}{6}, -\frac{13}{3}\right)$, $P_2 = \left(\frac{5}{2}, 4\right)$ y $P_3 = \left(-\frac{25}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

EJERCICIO 143. Obtenga la ecuación ordinaria y la correspondiente ecuación general de la circunferencia \mathcal{C} inscrita en el triángulo con vértices $P_1 = (-5, 8)$, $P_2 = (7, 2)$ y $P_3 = (-13, -8)$.

EJERCICIO 144. Obtenga la ecuación ordinaria y la correspondiente ecuación general de la circunferencia \mathcal{C} inscrita en el triángulo con vértices $P_1 = (-2, 9)$, $P_2 = (-12, 4)$ y $P_3 = (-6, 1)$.

EJERCICIO 145. Obtenga la ecuación ordinaria y la correspondiente ecuación general de la circunferencia \mathcal{C} inscrita en el triángulo con lados sobre las rectas $\mathcal{L}_1 : 4x + 3y = 8$, $\mathcal{L}_2 : 4x - 3y = 0$ y $\mathcal{L}_3 : y = 0$.

EJERCICIO 146. La bisectriz de un ángulo interior se intersecta con las bisectrices de los otros dos ángulos exteriores en un punto común. Pruébalo. Enseguida obtenga la ecuación ordinaria y la correspondiente ecuación general de las tres circunferencias \mathcal{C} que son tangentes a un lado y las prolongaciones de los otros dos lados en el triángulo del Ejercicio 145. Una circunferencia con esta propiedad se denomina **exinscrita**. Su centro es el punto común de la bisectriz del ángulo interior opuesto al lado tangente y las bisectrices de los otros dos ángulos exteriores.

EJERCICIO 147. Obtenga la ecuación ordinaria y la correspondiente ecuación general de la circunferencia \mathcal{C} que pasa por los puntos $P_1 = (2, 1)$ y $P_2 = (6, 3)$ y tiene radio $r = \sqrt{\frac{17}{2}}$ (dos soluciones).

EJERCICIO 148. Obtenga la ecuación ordinaria y la correspondiente ecuación general de la circunferencia \mathcal{C} que pasa por los puntos $P_1 = (3, -1)$ y $P_2 = (6, -1)$ y tiene radio $r = \sqrt{\frac{5}{2}}$ (dos soluciones).

EJERCICIO 149. Sea $Q = (x_1, y_1)$ en la recta \mathcal{L} tangente a la circunferencia $\mathcal{C} : (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ en $P = (x_0, y_0)$. Demuestre que

$$\|\mathbf{q} - \mathbf{p}\| = \sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - r^2}.$$

EJERCICIO 150. Sean

$$\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$$

$$\mathcal{C}_2 : x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0$$

dos circunferencias no **concéntricas**, es decir, los centros satisfacen que $C_1 = (h_1, k_1) \neq C_2 = (h_2, k_2)$ donde además $D_1^2 + E_1^2 - 4F_1 > 0$ y $D_2^2 + E_2^2 - 4F_2 > 0$. Considere ahora la recta

$$\mathcal{L} : (D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + F_1 - F_2 = 0.$$

Demuestre que esta recta está bien definida y que es perpendicular a la recta que pasa por los centros C_1 y C_2 . Esta recta se denomina **eje radical** de C_1 y C_2 . Enseguida demuestre que si C_1 y C_2 se intersectan en dos puntos, el eje radical pasa por ellos. Si C_1 y C_2 son tangentes una de la otra, el eje radical pasa por el punto de tangencia. Si C_1 y C_2 son ajenas, el eje radical no corta a las circunferencias.

EJERCICIO 151. Demuestre que el eje radical de dos circunferencias no concéntricas es el lugar geométrico de los puntos cuyos segmentos tangentes desde estos puntos a las circunferencias tienen iguales longitudes.

EJERCICIO 152. Sean \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 dos circunferencias con centros $C_1 = (0, k)$ y $C_2 = (h, 0)$ y con radios $r_1 = |k|$ y $r_2 = |h|$ con $hk \neq 0$. Demuestre que las circunferencias se intersectan en el origen y en otro punto P . Entonces los ejes coordenados son tangentes a las circunferencias en el origen. Diga cuál eje es tangente a cual circunferencia. Enseguida demuestre que las rectas tangentes \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 en P a \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 respectivamente son ortogonales.

EJERCICIO 153. Determine el vértice $V = (h, k)$, la ecuación de la directriz \mathcal{D} y el foco F de la parábola con ecuación general

$$\begin{aligned} a) x^2 + y - 3x - 3 &= 0; & b) x^2 - 3y + 2x - 8 &= 0, \\ c) x^2 - 12x - 6y &= 0; & d) 4y^2 + 20y + 4x + 5 &= 0, \\ e) 2x + 4y - y^2 + 6 &= 0; & f) 4x^2 + 12x + 4y - 7 &= 0. \end{aligned}$$

EJERCICIO 154. Calcule la ecuación cartesiana y la ecuación general de las parábolas con las siguientes características:

1. Tiene su vértice en $V = (-3, 2)$ y su directriz en la recta $\mathcal{D} : x = 0$.
2. Tiene su vértice en $V = (0, 2)$ y su foco en el origen.
3. Tiene su vértice en $V = (-3, 0)$ y su foco en el origen.
4. Tiene su vértice en $V = (3, 3)$ y pasa por el punto $P = (1, 4)$ (dos soluciones).
5. Tiene su vértice en $V = (-2, \frac{1}{2})$ y pasa por el punto $P = (1, 1)$ (dos soluciones).
6. Pasa por los puntos $P_1 = (-6, -4)$, $P_2 = (-4, -1)$ y $P_3 = (4, -9)$ y su eje es vertical.

EJERCICIO 155. Para las parábolas de los Ejercicios 153 y 154 calcule la longitud del lado recto.

EJERCICIO 156. Obtenga una fórmula para el radio focal de la parábola con eje horizontal. Enseguida demuestre que el lado recto de cualquier parábola es $4p$.

EJERCICIO 157. Hallar la ecuación cartesiana y general de la circunferencia que pasa por el vértice y los extremos del lado recto de la parábola $x^2 + 4x + 4y + 4 = 0$.

EJERCICIO 158. Calcule las ecuaciones vectoriales y cartesianas de las rectas tangentes en los puntos extremos del lado recto de la parábola $\pm 4p(y - k) = (x - h)^2$.

EJERCICIO 159. Calcule las ecuaciones vectoriales y cartesianas de las rectas tangentes en los puntos extremos del lado recto de la parábola $\pm 4p(x - h) = (y - k)^2$.

EJERCICIO 160. Encuentre los valores de β para que la recta $x + 2y + \beta = 0$ corte a la parábola $y^2 - 2x + 6y + 9 = 0$ en dos puntos, en un punto y finalmente no contenga puntos de la parábola.

EJERCICIO 161. Demuestre que las rectas que pasan por los extremos del lado recto y por el punto de intersección de la directriz y el eje de la parábola son ortogonales entre sí.

EJERCICIO 162. Sean P_1 y P_2 extremos de una cuerda focal de una parábola con ecuación $\pm 4p(y - k) = (x - h)^2$ y sean \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 las respectivas rectas tangentes a la parábola en los puntos dados. Demuestre que estas rectas son ortogonales. Enseguida encuentre el lugar geométrico del punto de intersección.

EJERCICIO 163. Demuestre que una circunferencia que pasa por el foco F de una parábola es tangente a la directriz \mathcal{D} si y sólo si el centro C pertenece a la parábola.

EJERCICIO 164. Con la parábola del Ejemplo 62, calcule el valor de α para que la recta interseque a la parábola también en el vértice.

EJERCICIO 165. La parábola tiene su vértice en $V = (-1, 1)$, pasa por $P = (-3, 2)$ y su directriz es vertical (ver el Ejemplo 62). Calcule las ecuaciones cartesianas ordinaria y general de la parábola. Enseguida calcule el valor de α para que la recta $\alpha x - y + (3\alpha + 2) = 0$ interseque a la parábola únicamente en P . Finalmente calcule α para que la recta corte a la parábola también en el vértice.

EJERCICIO 166. Calcule una ecuación para el lugar geométrico del centro de una circunferencia tangente a la recta $y = y_0$ y a la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ (dos soluciones).

EJERCICIO 167. Demuestre que toda circunferencia que tiene como diámetro una cuerda focal de una parábola es tangente a la directriz. Enseguida suponga que la parábola tiene por ecuación $\pm 4p(y - k) = (x - h)^2$ y demuestre que para el lugar geométrico del centro de estas circunferencias la ecuación es

$$\pm 2p(y - (k \pm p)) = (x - h)^2.$$

EJERCICIO 168. Sean \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 dos rectas ortogonales que se intersectan en el vértice de la parábola y que no son paralelas al eje. Sean P_1 y P_2 los otros puntos de intersección de \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 con la parábola respectivamente. Demuestre que la cuerda de P_1 a P_2 corta al eje de la parábola en el punto que dista $4p$ del vértice.

EJERCICIO 169. Calcule la ecuación cartesiana y la ecuación general de las elipses con las siguientes características:

1. Tiene vértices en $V_1 = (-3, 2)$ y $V_2 = (-3, -6)$ y un foco es $F_1 = (-3, 1)$.
2. Los focos son los puntos $F_1 = (0, 5)$ y $F_2 = (6, 5)$ y la longitud de su lado recto es 9.
3. Los focos son los puntos $F_1 = (-1, 3)$ y $F_2 = (3, 3)$ y la longitud de su lado recto es $\frac{32}{3}$.
4. Tiene su centro en $C = (1, 3)$, foco $F_1 = (1, 5)$ y $V_2 = (1, -3)$.
5. Tiene su centro en $C = (-1, 4)$, un foco en $F_1 = (-4, 4)$ y pasa por $P = (-1, 8)$.
6. Tiene su centro en $C = (-\frac{2}{5}, -1)$, pasa por $P = (2, 2)$ y un vértice es $V_1 = (-\frac{2}{5}, 4)$.

EJERCICIO 170. Determine el lugar geométrico de las siguientes ecuaciones:

1. $4x^2 + y^2 + 8x - 2y - 4 = 0$.
2. $x^2 + 3y^2 - 8x + 12y + 25 = 0$.
3. $4x^2 + 2y^2 + 4x - 4y - 25 = 0$.
4. $x^2 + 2y^2 + 2x - 2y + \frac{3}{2} = 0$.
5. $5x^2 + 4y^2 - 10x + 8y - 11 = 0$.
6. $9x^2 + 25y^2 + 18x - 50y - 866 = 0$.

EJERCICIO 171. Calcule $\Delta = 4ACF - CD^2 - AE^2$ y $A\Delta$ para cada una de las ecuaciones del Ejercicio 170.

EJERCICIO 172. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a la elipse

$$\mathcal{E} : 3x^2 + 4y^2 - 18x - 40y + 19 = 0$$

una en el punto $P = (0, \frac{1}{2})$ y la otra con tangencia en $Q = (6, \frac{19}{2})$.

EJERCICIO 173. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a la elipse

$$\mathcal{E} : \frac{4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{19} + \frac{8\left(y - \frac{3}{2}\right)^2}{19} = 1$$

en $P = (0, 0)$, en $Q = (0, 3)$, en $R = (1, 0)$ y en $S = (1, 3)$.

EJERCICIO 174. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a la elipse

$$\mathcal{E} : 2x^2 + y^2 + 2x - 3y - 2 = 0$$

que pasan por el punto $P = (2, 7)$.

EJERCICIO 175. Dada la elipse

$$\mathcal{E} : x^2 + 3y^2 + 3x - 4y + 3 = 0$$

determine los conjuntos de valores de k para que la recta $\mathcal{L} : 5x + 2y + k = 0$ sea ajena, tangente y secante a la elipse.

EJERCICIO 176. Sean las circunferencias concéntricas $\mathcal{C}_1 : (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ y $\mathcal{C}_2 : (x - h)^2 + (y - k)^2 = R^2$ con $r < R$. Sea \mathcal{L} una recta que pasa por $C = (h, k)$. Llamemos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ a los puntos de intersección de \mathcal{L} con las circunferencias, de tal manera que P_1 está en el segmento que une C con P_2 . Encuentre las ecuaciones de los lugares geométricos de los puntos $Q = (x_2, y_1)$ y de $R = (x_1, y_2)$.

EJERCICIO 177. Demuestre que el lugar geométrico de los puntos de la forma $(a \cos t, b \sin t)$ con $ab \neq 0$, $a \neq b$ y $t \in \mathbb{R}$ es una elipse.

EJERCICIO 178. Demuestre que si el punto $P = (x_1, y_1)$ está en la elipse

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1,$$

entonces los radios focales son $a \pm \frac{c}{a}(x_1 - h)$. Con el valor adecuado para x_1 obtenga la longitud del lado recto.

EJERCICIO 179. Encuentre la ecuación de la elipse (familia de elipses) con centro en $C = (1, 2)$, eje focal horizontal y tal que $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$.

EJERCICIO 180. Encuentre la ecuación de la elipse (familia de elipses) con centro en $C = (3, -1)$, eje focal vertical y tal que $\frac{c}{a} = \frac{3}{5}$.

EJERCICIO 181. Demuestre que dos rectas distintas tangentes a una elipse son paralelas si y sólo si los puntos de tangencia son extremos de un diámetro.

EJERCICIO 182. Demuestre que la recta tangente a una elipse en P es bisectriz de las rectas \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 que pasan por P y por los focos F_1 y F_2 .

EJERCICIO 183. Calcule la ecuación cartesiana y la ecuación general de las hipérbolas con las siguientes características:

1. Tiene vértices en $V_1 = (-3, 2)$ y $V_2 = (-3, -6)$ y un foco es $F_1 = (-3, 3)$.
2. Los focos son los puntos $F_1 = (0, 5)$ y $F_2 = (6, 5)$ y la longitud de su lado recto es 5.
3. Los focos son los puntos $F_1 = (-1, 3)$ y $F_2 = (3, 3)$ y la longitud de su lado recto es 6.
4. Tiene su centro en $C = (1, 3)$, un vértice en $V_2 = (1, 5)$ y un foco en $F_1 = (1, -3)$.
5. Tiene su centro en $C = (-1, 4)$, un foco en $F_1 = (-4, 4)$ y pasa por $P = (4, 8)$.

6. Tiene su centro en $C = (-2, -1)$, pasa por $P = (1, 6)$ y un foco en $F_1 = (-6, -1)$.

EJERCICIO 184. Determine el lugar geométrico de las siguientes ecuaciones:

1. $9x^2 - 4y^2 + 18x + 20y + 20 = 0$.
2. $4x^2 - y^2 - 8x - 4y - 16 = 0$.
3. $16x^2 - 9y^2 - 128x - 36y + 220 = 0$.
4. $9x^2 - 4y^2 - 72x - 16y + 153 = 0$.
5. $x^2 - 45y^2 + 2x - 8 = 0$.
6. $2x^2 - y^2 + 4x + 8y - 22 = 0$.

EJERCICIO 185. Establezca que si $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ es tal que $AC < 0$ y $\Delta = 4ACF - CD^2 - AE^2 = 0$, entonces el lugar geométrico se reduce a las dos rectas llamadas asíntotas. Ver el Ejemplo 69.

EJERCICIO 186. Demuestre que el lugar geométrico de los puntos de la forma $(a \sec t, b \tan t)$ con $ab \neq 0$ y $t \in \mathbb{R}$ es una rama de una hipérbola.

EJERCICIO 187. Considere el determinante

$$\det \begin{bmatrix} x^2 & y^2 & 1 \\ x_1^2 & y_1^2 & 1 \\ x_2^2 & y_2^2 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Demuestre que:

1. si $x_2^2 > x_1^2$ y $y_1^2 > y_2^2$, el determinante es la ecuación de una elipse o circunferencia que pasa por los puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$.
2. si $x_1^2 > x_2^2$ y $y_1^2 > y_2^2$, el determinante es la ecuación de una hipérbola que pasa por los puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ o dos rectas no paralelas que pasan por el origen

EJERCICIO 188. Demuestre que si el punto $P = (x_1, y_1)$ está en la hipérbola

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1,$$

entonces los radios focales son $\left| \frac{c}{a}(x_1 - h) \pm a \right|$. Con el valor adecuado para x_1 obtenga la longitud del lado recto.

EJERCICIO 189. Si en la hipérbola con ecuación cartesiana ordinaria $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ ocurre que $a = b$, la hipérbola recibe el nombre de equilátera o rectangular. Sea \mathcal{H} una hipérbola rectangular y $P \in \mathcal{H}$. Demuestre que el producto de los radios focales es igual al cuadrado de la distancia de P al centro.

EJERCICIO 190. Demuestre que dos rectas distintas tangentes a una hipérbola son paralelas si y sólo si los puntos de tangencia son extremos de un diámetro.

EJERCICIO 191. Demuestre que en cualquier hipérbola $\mathcal{H} : \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, para $P \in \mathcal{H}$, el producto de las distancias de P a las asíntotas es $\left(\frac{ab}{c}\right)^2$.

EJERCICIO 192. En la hipérbola $\mathcal{H} : \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ considere el foco $F_2 = (h + c, k)$ y la recta paralela al eje conjugado $\mathcal{D} : x = h + \frac{a^2}{c}$. Encuentre la intersección de la asíntota $\mathcal{A} : bx - ay = bh - ak$ con \mathcal{D} . Enseguida demuestre que la recta \mathcal{L} determinada por este punto y F_2 es ortogonal a la asíntota \mathcal{A} .

EJERCICIO 193. Sea la hipérbola

$$\mathcal{H} : \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

y sean $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ dos puntos en la hipérbola extremos de una cuerda focal. Entonces las rectas tangentes a \mathcal{H} en $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ se intersectan en una directriz.

EJERCICIO 194. Sea $\rho > 0$. Considere la familia de elipses concéntricas

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = \rho^2$$

donde $a > b$. Demuestre que todas tienen la misma excentricidad. Suponga ahora que $P_1 = (x_1, y_1)$ está en la elipse correspondiente a $\rho_1 = 1$. Demuestre que el punto

$$P_2 = (\rho x_1 + (1-\rho)h, \rho y_1 + (1-\rho)k)$$

satisface la ecuación de la elipse correspondiente a ρ y si además $\rho \neq 1$, el punto P_2 pertenece a la recta que pasa por $C = (h, k)$ y $P = (x_1, y_1)$.

EJERCICIO 195. Sean \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 hipérbolas conjugadas con excentricidades e_1 y e_2 respectivamente. Demuestre que

$$\frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2} = 1.$$

EJERCICIO 196. En este ejercicio se estudian las llamadas **cónicas homofocales** que constituyen una familia de cónicas todas ellas con los mismos focos F_1 y F_2 . Considere la ecuación

$$\frac{(x-h)^2}{a^2-r} - \frac{(y-k)^2}{b^2+r} = 1$$

donde $a > b$. Demuestre que si $-b^2 < r < a^2$, entonces la ecuación corresponde a una familia de hipérbolas con eje focal paralelo al eje X . De manera similar, si $r < -b^2$, se trata de una familia de elipses. Enseguida pruebe que sin importar el valor de r en cualquiera de estos intervalos, los focos siempre son los mismos. Finalmente suponga que $-b^2 < r_1 < a^2$ y $r_2 < -b^2$. Demuestre que hay un P en la intersección de las cónicas para r_1 y r_2 y que las tangentes a éstas en P son ortogonales. Esto además nos dice que las familias de cónicas para $-b^2 < r < a^2$ y las cónicas para $r < -b^2$ son ortogonales entre sí.

CAPÍTULO 5

Sistemas de coordenadas

Durante el Capítulo 4 se desarrollaron las ecuaciones de las cónicas siempre con referencia al punto $C = (h, k)$. Ello sólo implicó que los cálculos se realizaran respecto a los términos $(x - h)$ y $(y - k)$ lo cual fue un costo bajo para obtener esta generalidad. Realmente realizar los cálculos con cónicas centradas en el origen no simplifica significativamente los cálculos. Se menciona esto ahora porque lo que se hizo fue tomar un sistema de coordenadas *trasladado* de tal manera que el origen fuese el punto $C = (h, k)$. En este capítulo estudiaremos lo que se denomina **rotación de ejes** y también las conocidas como **coordenadas polares**.

1. Rotación de ejes

En la Sección 5 del Capítulo 1 se presentó el concepto de vector unitario en la Definición 10 en la página 23 dado por (5.1). Los vectores definidos en esta ecuación son los vectores canónicos $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$ rotados un ángulo θ y con ellos obtenemos dos rectas ortogonales que llamaremos ejes X' y Y' . Como cualquier vector $\mathbf{v} = (x, y)$ se puede expresar de la forma $\mathbf{v} = \alpha\hat{\mathbf{u}} + \beta\hat{\mathbf{u}}_p$, ahora usaremos la notación $\mathbf{v} = (x', y')$ donde ya es sabido que $x' = \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{u}} \rangle$ y $y' = \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{u}}_p \rangle$. Si escribimos estas igualdades como un sistema de ecuaciones

$$(1.1) \quad \begin{aligned} x' &= \cos \theta x + \sin \theta y \\ y' &= -\sin \theta x + \cos \theta y. \end{aligned}$$

Dependiendo de cuáles son las incógnitas y cuáles son los datos emplearemos el sistema equivalente

$$(1.2) \quad \begin{aligned} x &= \cos \theta x' - \sin \theta y' \\ y &= \sin \theta x' + \cos \theta y'. \end{aligned}$$

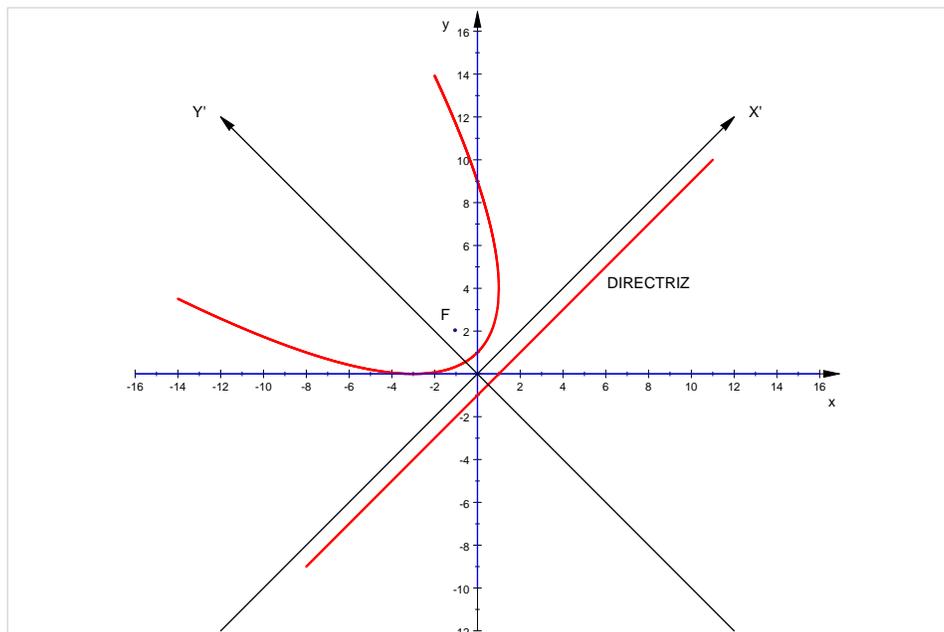


Figura 54

EJEMPLO 73. En el Ejemplo 52 obtuvimos la ecuación

$$x^2 + 2xy + y^2 + 6x - 10y + 9 = 0$$

que corresponde a una parábola cuya directriz forma un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ con el eje $+x$; esto sugiere que giremos este mismo eje tal ángulo para así obtener una parábola con directriz paralela a uno de los ejes coordenados que en esta situación será el eje X' . La Figura 54 muestra la parábola con ejes X' y Y' . De acuerdo con las ecuaciones (1.1), el cambio al nuevo sistema es

$$(1.3) \quad \begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \\ y' &= -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \end{aligned}$$

y el foco F en el nuevo sistema coordenado es el punto $F = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$. Para obtener la ecuación del lugar geométrico en el sistema, que llamaremos X' - Y' , sustituimos el sistema equivalente (1.2), a saber

$$(1.4) \quad \begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' \end{aligned}$$

en la ecuación de la parábola:

$$\begin{aligned}
 0 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)^2 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)^2 + \\
 & 6\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right) - 10\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right) + 9 \\
 &= (x')^2\left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}\right) + (y')^2\left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}\right) + (x')(y')(-1 + 1) + \\
 & x'(3\sqrt{2} - 5\sqrt{2}) + y'(-3\sqrt{2} - 5\sqrt{2}) + 9 \\
 &= 2(x')^2 - 2\sqrt{2}x' - 8\sqrt{2}y' + 9.
 \end{aligned}$$

Llevando la ecuación a su forma ordinaria tenemos que

$$4\sqrt{2}\left(y' - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(x' - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

Se trata pues de una parábola con vértice en el sistema $X'-Y'$ en el punto $V = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, con $p = \sqrt{2}$ y foco en $F = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$, éste último ya se había calculado. En el sistema original, de acuerdo con (1.4) el vértice es el punto $V = (0, 1)$.

En el Ejemplo 73 pudimos determinar un θ adecuado para eliminar el término en xy debido a que conocíamos la dirección de la directriz. En general, dada una ecuación cuadrática de la forma

$$(1.5) \quad Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

para encontrar este valor adecuado, sustituimos las ecuaciones (1.2) en (1.5) para obtener

$$\begin{aligned}
 0 &= A(\cos\theta x' - \sin\theta y')^2 + B(\cos\theta x' - \sin\theta y')(\sin\theta x' + \cos\theta y') + C(\sin\theta x' + \cos\theta y')^2 + \\
 & D(\cos\theta x' - \sin\theta y') + E(\sin\theta x' + \cos\theta y') + F.
 \end{aligned}$$

Desarrollando los productos y reagrupando

$$\begin{aligned}
 0 &= (A\cos^2\theta + B\cos\theta\sin\theta + C\sin^2\theta)(x')^2 + \\
 & ((C - A)2\cos\theta\sin\theta + B(\cos^2\theta - \sin^2\theta))(x')(y') + \\
 & (A\sin^2\theta - B\cos\theta\sin\theta + C\cos^2\theta)(y')^2 + \\
 & (D\cos\theta + E\sin\theta)x' + \\
 & (E\cos\theta - D\sin\theta)y' + \\
 & F.
 \end{aligned}$$

Entonces en el sistema $X'-Y'$ la ecuación tiene los coeficientes

$$\begin{aligned}
 (1.6) \quad A' &= A \cos^2 \theta + B \cos \theta \sin \theta + C \sin^2 \theta \\
 B' &= (C - A) 2 \cos \theta \sin \theta + B (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\
 C' &= A \sin^2 \theta - B \cos \theta \sin \theta + C \cos^2 \theta \\
 D' &= D \cos \theta + E \sin \theta \\
 E' &= E \cos \theta - D \sin \theta \\
 F' &= F
 \end{aligned}$$

donde merece notar que $B \neq 0$ y lo que buscamos es un θ tal que $B' = 0$. Bien, como

$$B' = (C - A) \sin 2\theta + B \cos 2\theta,$$

en caso de que $A \neq C$, tenemos que

$$(1.7) \quad \tan 2\theta = \frac{B}{A - C}$$

mientras que si $A = C$, se reduce a que $\cos 2\theta = 0$ y el valor de $\theta = \frac{\pi}{4}$ es adecuado.

EJEMPLO 74. *Dada la ecuación*

$$(1.8) \quad x^2 + \sqrt{3}xy + 2y^2 - 3\sqrt{3}x + y + 1 = 0$$

calculamos inmediatamente en virtud de (1.7) que

$$\tan 2\theta = -\sqrt{3}$$

por lo que $2\theta = -\frac{\pi}{3}$ y así $\theta = -\frac{\pi}{6}$; por ello $\cos(-\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$ y debemos sustituir en (1.2) para obtener

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y' \\
 y &= -\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'
 \end{aligned}$$

y al reemplazar estas fórmulas en la ecuación cuadrática

$$\begin{aligned}
 0 &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'\right)^2 + \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'\right) \left(-\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right) + 2 \left(-\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right)^2 - \\
 &\quad 3\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'\right) + \left(-\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right) + 1 \\
 &= (x')^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) + (x')(y') \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\right) + (y')^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{2}\right) + \\
 &\quad (x') \left(-\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right) + (y') \sqrt{3} \left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right) + 1 \\
 &= \frac{1}{2}(x')^2 + \frac{5}{2}(y')^2 - 5x' - \sqrt{3}y' + 1
 \end{aligned}$$

o bien

$$(x')^2 + 5(y')^2 - 10x' - 2\sqrt{3}y' + 2 = 0.$$

Con el término en xy eliminado ahora es tarea sencilla ver que se trata de la elipse con ecuación ordinaria

$$(x' - 5)^2 + 5 \left(y' - \frac{\sqrt{3}}{5} \right)^2 = \frac{118}{5}.$$

El centro en el sistema $X'-Y'$ es el punto $C = \left(5, \frac{\sqrt{3}}{5} \right)$ que llevado al sistema original es el punto $C = \left(\sqrt{3}\frac{13}{5}, -\frac{11}{5} \right)$. Con ello ya podemos decir que la longitud del semieje mayor es $a = \frac{\sqrt{118}}{\sqrt{5}}$ y la del semieje menor es $b = \frac{\sqrt{118}}{5}$. En la Figura 55 se muestra la cónica correspondiente a la ecuación (1.8).

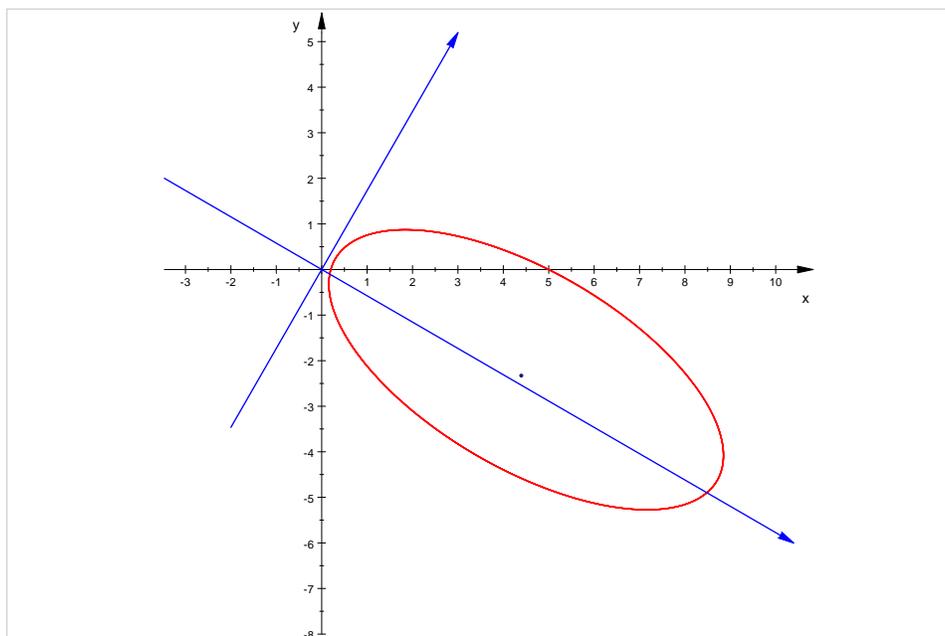


Figura 55

OBSERVACIÓN 17. En el Ejemplo 74 primeramente calculamos un ángulo doble tal que su tangente resultó ser $-\sqrt{3}$ y con ello pudimos obtener los vectores unitarios ortogonales.

$$\hat{\mathbf{u}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right),$$

$$\hat{\mathbf{u}}_p = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Este ángulo doble pudo haberse tomado como $\frac{2\pi}{3}$ así que el θ adecuado pudo ser de $\frac{\pi}{3}$. Con este valor, la ecuación ordinaria de la elipse en el plano $X'-Y'$ sería

$$5 \left(x' - \frac{\sqrt{3}}{5} \right)^2 + (y' + 5)^2 = \frac{118}{5},$$

es decir, ahora el centro sería $C = \left(\frac{\sqrt{3}}{5}, -5 \right)$. No obstante, en el sistema de coordenadas original el centro seguiría siendo $C = \left(\sqrt{3}\frac{13}{5}, -\frac{11}{5} \right)$, pues ahora los vectores ortogonales

unitarios son

$$\hat{\mathbf{u}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

$$\hat{\mathbf{u}}_p = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

No daremos a cualquiera de estas dos posibilidades preferencia alguna puesto que en realidad deseamos las coordenadas de los puntos clave de la cónica, como centro, focos o vértices en el sistema coordenado original, aunque vale la pena aclarar que se acostumbra a tomar el eje X' de tal suerte que el vector unitario $\hat{\mathbf{u}}$ se encuentre en el cuadrante I del sistema coordenado original.

OBSERVACIÓN 18. Otra observación pertinente es que de la fórmula $\tan 2\theta = \frac{B}{A-C}$ podemos definir

$$\sin 2\theta = \frac{B}{\sqrt{B^2+(A-C)^2}} \quad \text{y} \quad \cos 2\theta = \frac{A-C}{\sqrt{B^2+(A-C)^2}},$$

y de acuerdo con la identidad $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ deducir las fórmulas

$$\cos \theta = \pm \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} \quad \text{y} \quad \sin \theta = \pm \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}.$$

Como se dijo, haremos caso omiso de cual signo tomar en las raíces, aunque si consideramos $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$, entonces $0 < 2\theta < \frac{\pi}{2}$ y $\tan 2\theta > 0$. Pero si $\frac{\pi}{2} < 2\theta < \pi$, se tiene que $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$. En ambos casos, $\cos \theta > 0$ y $\sin \theta > 0$. Entonces siempre podemos tomar al eje X' paralelo al $\hat{\mathbf{u}}$ en el cuadrante I. Si el ángulo θ de $\hat{\mathbf{u}}$ satisface $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$, estamos en el caso $\tan 2\theta > 0$, mientras que si $\tan 2\theta < 0$, el ángulo θ de $\hat{\mathbf{u}}$ satisface $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

EJEMPLO 75. La Tabla mostrada en la página 115 se dan las secciones cónicas según sea el producto de los coeficientes de x^2 y de y^2 . Cuando aparece el término xy esta tabla ya no es aplicable. Sea

$$4x^2 + 24xy + 11y^2 = 20$$

la ecuación de un lugar geométrico. En este ejemplo $AC > 0$. Sin embargo, de acuerdo con la Observación 18 tenemos que $\cos 2\theta = -\frac{7}{25}$ y por ende, si elegimos $\hat{\mathbf{u}}$ en el cuadrante I,

$$\hat{\mathbf{u}} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right).$$

Sustituyendo las ecuaciones

$$x = \frac{3x' - 4y'}{5}$$

$$y = \frac{4x' + 3y'}{5}$$

en la cuadrática obtenemos que

$$\begin{aligned}
 20 &= 4 \left(\frac{3x' - 4y'}{5} \right)^2 + 24 \left(\frac{3x' - 4y'}{5} \right) \left(\frac{4x' + 3y'}{5} \right) + 11 \left(\frac{4x' + 3y'}{5} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{25} (x')^2 (36 + 288 + 176) + \\
 &\quad \frac{1}{25} (x') (y') (-96 - 168 + 264) + \\
 &\quad \frac{1}{25} (y')^2 (64 - 288 + 99) \\
 &= 20 (x')^2 - 5 (y')^2.
 \end{aligned}$$

Así vemos que se trata de la hipérbola con ecuación ordinaria

$$(x')^2 - \frac{(y')^2}{4} = 1.$$

El número que nos indica qué tipo de sección cónica es el lugar geométrico de la ecuación (1.5) es el llamado **discriminante de la ecuación**: $B^2 - 4AC$. El siguiente resultado nos dice que este valor es invariante bajo rotaciones.

TEOREMA 14. *Para cualquier valor de θ , los coeficientes en (1.6) satisfacen*

$$(B')^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC.$$

DEMOSTRACIÓN. La prueba es muy sencilla. Simplemente consiste en desarrollar

$$(B')^2 - 4A'C'$$

y asociar los términos en $\cos^2 \theta \sin^2 \theta$, en $\cos^3 \theta \sin \theta$, en $\cos \theta \sin^3 \theta$, en $\cos^4 \theta$ y en $\sin^4 \theta$. Los términos que contienen exponentes cúbicos se anularán.

$$\begin{aligned}
 (B')^2 - 4A'C' &= ((C - A) 2 \cos \theta \sin \theta + B \cos^2 \theta - B \sin^2 \theta)^2 - \\
 &\quad 4 (A \cos^2 \theta + B \cos \theta \sin \theta + C \sin^2 \theta) (A \sin^2 \theta - B \cos \theta \sin \theta + C \cos^2 \theta) \\
 &= (4(C - A)^2 - 2B^2 - 4A^2 + 4B^2 - 4C^2) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \\
 &\quad (4B(C - A) + 4AB - 4BC) \cos^3 \theta \sin \theta + \\
 &\quad (-4B(C - A) - 4AB + 4BC) \cos \theta \sin^3 \theta + \\
 &\quad (B^2 - 4AC) \cos^4 \theta + (B^2 - 4AC) \sin^4 \theta \\
 &= 2(B^2 - 4AC) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + (B^2 - 4AC) (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \\
 &= (B^2 - 4AC) (\cos^4 \theta + 2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \sin^4 \theta) \\
 &= (B^2 - 4AC) (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^2 \\
 &= (B^2 - 4AC).
 \end{aligned}$$

□

En particular, para el θ que hace $B' = 0$ nos da que

$$-4A'C' = B^2 - 4AC.$$

Esto nos permite decidir el tipo de cónica de la ecuación (1.5) según el signo del discriminante:

$$\begin{aligned} B^2 - 4AC < 0 & \quad \text{Elíptico.} \\ B^2 - 4AC = 0 & \quad \text{Parabólico.} \\ B^2 - 4AC > 0 & \quad \text{Hiperbólico.} \end{aligned}$$

EJEMPLO 76. Según su discriminante, tenemos para las siguientes ecuaciones que:

1. $2x^2 - xy + y^2 + 3y + 1 = 0$ es de tipo elíptico pues $B^2 - 4AC = (-1)^2 - 4(2)(1) < 0$;
2. $3x^2 - 4xy + y^2 - 2x + y - 2 = 0$ es de tipo hiperbólico pues $B^2 - 4AC = (-4)^2 - 4(3)(1) > 0$;
3. $x^2 + 2xy + y^2 - 3x + y = 1$ es de tipo parabólico pues $B^2 - 4AC = (2)^2 - 4(1)(1) = 0$.

2. Coordenadas polares

En los capítulos anteriores hemos tratado, aunque con diferentes sistemas de referencia, siempre con las llamadas coordenadas rectangulares del plano las cuales identificamos como (x, y) o con (x, y, z) . En esta sección trataremos con otro sistema de coordenadas en el plano que resultan ser muy útiles cuando se tratan temas más avanzados de geometría o bien en física.

En la Sección 3 del Capítulo 1 ya hablamos de la magnitud de un vector $\mathbf{u} = (x, y)$. Haremos ahora la convención de denotar a este número como r , es decir

$$(2.1) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

y le llamaremos, norma o magnitud de \mathbf{u} . Es importante recordar que $r \geq 0$. Por otro lado, el ángulo θ que forma \mathbf{u} con el eje $+x$ suele denominarse argumento. Siguiendo con las convenciones en la Sección 3 del Capítulo 1, los ángulos medidos en sentido de las manecillas serán negativos mientras que los medidos en sentido contrario de las manecillas serán positivos. También tomaremos los valores de θ ya sea $0 \leq \theta < 2\pi$ o bien $-\pi < \theta \leq \pi$; así este θ es el único que satisface

$$(2.2) \quad \begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta. \end{aligned}$$

Con estos valores, dado cualquier par ordenado (x, y) le corresponde un único par (r, θ) . Recíprocamente, dado el par ordenado (r, θ) hay un único par (x, y) y estos pares ordenados están relacionados por (2.1) y (2.2).

DEFINICIÓN 28. Dado un punto P en el plano, sus coordenadas polares son el par ordenado (r, θ) que satisface (2.1) y (2.2).

Llamaremos **polo** al origen y lo denotaremos con \mathcal{O} . Del mismo modo, a la semirrecta que corresponde al eje $+x$ la llamaremos **eje polar**. Para localizar un punto dadas sus coordenadas polares (r, θ) , medimos el ángulo θ y con r la distancia de \mathcal{O} a P determinamos el punto. En la Figura 13 se muestra esta situación para varios casos. El ángulo θ también puede estar dado en grados, en cuyo caso se tendrá $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ o bien $-180^\circ < \theta \leq 180^\circ$. El polo es el único punto que puede ser representado en coordenadas polares por infinitos pares ordenados $(0, \theta)$.

EJEMPLO 77. En los siguientes casos se muestra un punto en un sistema de coordenadas y enseguida su contraparte en el otro sistema de coordenadas:

1. En coordenadas rectangulares $P = (-3, 4)$ y en coordenadas polares $P = (5, 2.2143)$ o bien $(5, 126.87^\circ)$;

5. Sistemas de coordenadas

2. En coordenadas rectangulares $P = (-1, -\sqrt{3})$ y en coordenadas polares $P = (2, \frac{4}{3}\pi)$ o bien $(2, 240^\circ)$;
3. El mismo punto $P = (-1, -\sqrt{3})$ en coordenadas polares también puede ser $P = (2, -\frac{2}{3}\pi)$ o bien $(2, -120^\circ)$;
4. En coordenadas polares $P = (4, \frac{1}{4}\pi)$ y en coordenadas rectangulares $P = (\sqrt{8}, \sqrt{8})$;
5. En coordenadas polares $P = (5, \frac{1}{2}\pi)$ y en coordenadas rectangulares $P = (0, 5)$

En la Figura 56 se muestra lo que en lo sucesivo nos referiremos como el **plano polar**

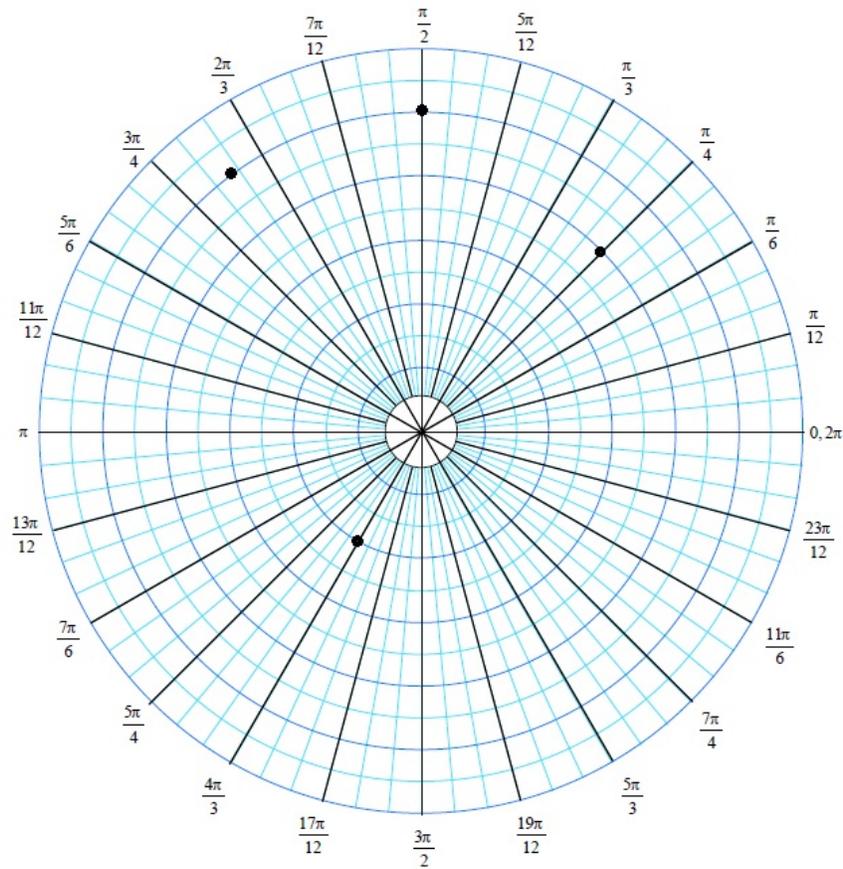


Figura 56

y se señalan los puntos del Ejemplo 77.

Debido a que es costumbre que en coordenadas polares el valor de r sea dependiente de θ y teniendo presentes las identidades trigonométricas

$$\begin{aligned}\cos(\theta \pm \pi) &= -\cos \theta \\ \sin(\theta \pm \pi) &= -\sin \theta\end{aligned}$$

es conveniente acordar dar significado a pares ordenados de la forma $(-r, \theta)$ donde $r > 0$. Por ejemplo, si en coordenadas polares tenemos el punto $P = (-3, \frac{1}{3}\pi)$, aplicando las ecuaciones

(2.2) tenemos que

$$\begin{aligned}x &= (-3) \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = 3 \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) \\y &= (-3) \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = 3 \sin\left(\frac{4}{3}\pi\right).\end{aligned}$$

Vectorialmente lo que esto significa es que los pares ordenados (r, θ) y $(-r, \theta)$ corresponden a vectores que son inverso aditivo uno del otro, y como ya es sabido, entre ellos hay un ángulo de π o bien de 180° .

3. Gráficas en coordenadas polares

Para obtener la gráfica de un lugar geométrico en coordenadas polares lo más usual es indicar r como una expresión dependiente de θ , es decir, $r = f(\theta)$. A esta última expresión le llamaremos la **ecuación polar** del lugar geométrico. Debemos tener cuidado en los puntos que aparentemente no satisfacen la ecuación polar y que, sin embargo, sí pertenecen al lugar geométrico. Por ejemplo, el punto en coordenadas polares $(-3, \frac{1}{3}\pi)$ no satisface la ecuación polar $r = 3$, que es simplemente la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$. Sin embargo, el punto sí pertenece a la circunferencia, pues en realidad el punto puede representarse como $(3, \frac{4}{3}\pi)$, pues ambas representaciones en polares nos llevan al punto $(-\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2})$.

Resulta muy útil observar el comportamiento de las gráficas de \sin y \cos para diversas expresiones sencillas en θ , como 2θ , 3θ , $\frac{1}{2}\theta$, $\frac{1}{3}\theta$, etc., todas ellas a partir de las gráficas de $\sin \theta$ y $\cos \theta$. Cuando esbozemos la gráfica del lugar geométrico de una ecuación polar, aparecerán con frecuencia expresiones en términos de senos y cosenos de múltiplos de θ . En la siguiente tabla mostramos algunos valores elementales de $\cos \theta$, $\cos 2\theta$ y $\cos \frac{1}{3}\theta$:

θ	0	$\frac{1}{2}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\cos \theta$	1	0	-1	0	1
$\cos 2\theta$	1	-1	1	-1	1
$\cos \frac{1}{3}\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$

De manera similar tenemos que para $\theta = \frac{5}{6}\pi$ se verifica que $\sin \theta = \frac{1}{2}$, $\sin 2\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. El valor de $\sin \frac{5}{18}\pi$ no es tan común, pero es aproximadamente 0,766 04. En grados es $\frac{5}{18}\pi = 50^\circ$.

Las gráficas de algunas funciones trigonométricas se muestran a continuación:

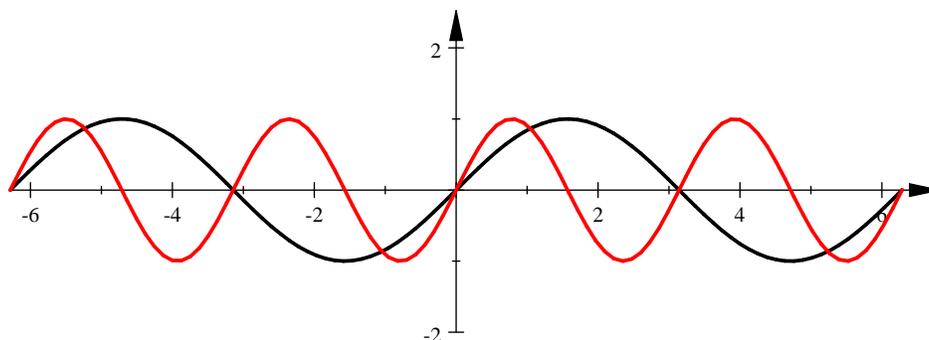


Figura 57

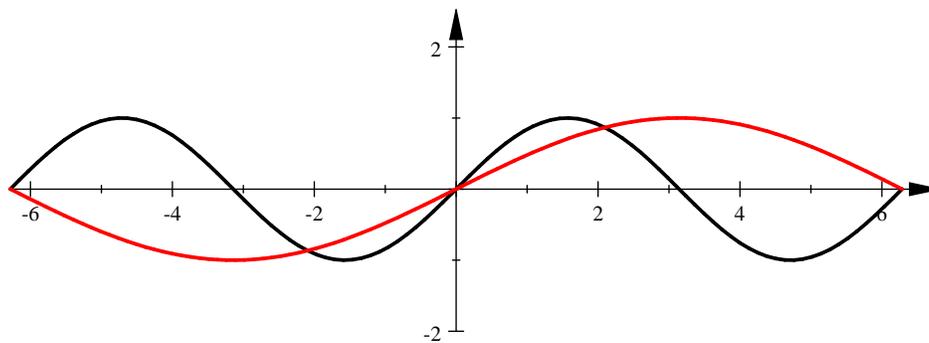


Figura 58

En las Figuras 57 y 58 se exhiben en ambas la gráfica de la función $\sin \theta$: en la primera de ellas se acompaña con la gráfica de $\sin 2\theta$ mientras que en la segunda con $\sin \frac{1}{2}\theta$. Cuando θ varía de 0 hasta 2π tenemos que $\sin \theta$ completa un ciclo mientras que $\sin 2\theta$ completa dos ciclos. Por otro lado, podemos observar que cuando $\sin \theta$ completa un ciclo en el mismo intervalo para θ , la función $\sin \frac{1}{2}\theta$ sólo realiza medio ciclo. Además observamos que todas estas funciones varían tomando valores desde -1 hasta 1 . En este mismo tenor podemos comparar las gráficas de $\sin \theta$ y $2 \sin 3\theta$, que se muestran en la Figura 59.

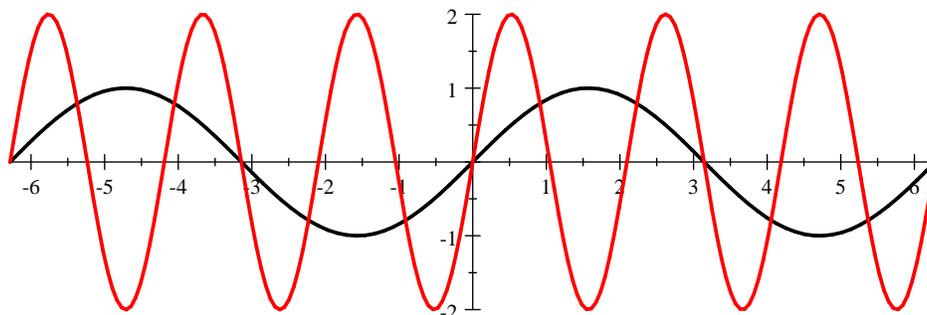


Figura 59

Análisis similares se pueden hacer con la función $\cos \theta$.

EJEMPLO 78. *Comencemos con la ecuación polar $r = a \cos \theta$ con $a > 0$ fijo. Tenemos que los puntos $(a, 0)$ y $(0, \frac{1}{2}\pi)$ satisfacen la ecuación. Entonces el polo \mathcal{O} pertenece a la gráfica. Debido a que $\cos \theta = \cos(-\theta)$, la gráfica es simétrica respecto al eje polar. Si tenemos presente que para $\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ obtenemos que $\cos \theta < 0$, la ecuación polar nos dice que los puntos para este rango de valores de θ serán los inversos aditivos y así la gráfica no contiene puntos en los cuadrante II y III. En este mismo análisis, si $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$, entonces $0 < \theta - \pi < \frac{1}{2}\pi$ y esto nos dice que los puntos para este rango son los mismos que si fuese $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$, así que los podemos omitir. Ocurre lo mismo para los puntos de la gráfica para $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$, estos puntos son los mismos que cuando $\frac{1}{2}\pi < \theta < \pi$. De lo anterior, cada punto de la gráfica queda determinado si hacemos que $0 < \theta < \pi$ y esto debido a propiedad periódica de coseno, esto es, $\cos(\theta + 2\pi) = \cos \theta$. Esbozando algunos puntos observamos que cuando θ varía de 0 a $\frac{1}{2}\pi$, el valor de r disminuye de a hasta 0. La simetría respecto al eje polar nos permite reflejar la gráfica.*

Ahora bien, realizando cálculos sencillos observamos que las siguientes ecuaciones son equivalentes:

$$\begin{aligned} r &= a \cos \theta \\ r^2 &= ar \cos \theta \\ x^2 + y^2 &= ax \\ \left(x - \frac{1}{2}a\right)^2 + y^2 &= \frac{1}{4}a^2. \end{aligned}$$

Se trata pues de la circunferencia de radio $\frac{1}{2}a$ y centro en $(\frac{1}{2}a, 0)$. Ahora son ejemplos sencillos verificar que la ecuación $r = a \sin \theta$ corresponde a la circunferencia $x^2 + (y - \frac{1}{2}a)^2 = \frac{1}{4}a^2$. También tenemos el caso $a < 0$, que corresponden respectivamente a las circunferencias con centros en los otros semiejes coordenados.

EJEMPLO 79. Podría pensarse que llevar la ecuación polar a su equivalente rectangular nos daría información sobre la gráfica. Desafortunadamente esto es viable en la minoría de los casos. Y es esta peculiaridad la que hace de las coordenadas polares una herramienta muy útil. Sea ahora la ecuación polar $r^2 = 4 \sin 2\theta$. Tenemos que las siguientes ecuaciones son equivalentes a nuestra ecuación polar

$$\begin{aligned} r^2 &= 4(2 \cos \theta \sin \theta) \\ r^4 &= 8r \cos \theta r \sin^2 \theta \\ (x^2 + y^2)^2 &= 8xy. \end{aligned}$$

Esta ecuación rectangular definitivamente no es fácil de graficar pero en ella podemos observar que si las coordenadas (x, y) satisfacen la ecuación, entonces también así lo hacen $(-x, -y)$. Esto significa que la gráfica es simétrica respecto al origen. Sin embargo, al sustituir $(-x, y)$ o $(x, -y)$ la ecuación se altera y así aseguramos que la gráfica no es simétrica respecto a cualquiera de los ejes coordenados.

Retomaremos esta ecuación después de algunas recomendaciones de gran utilidad para el esbozo de gráficas en coordenadas polares. Las recomendaciones se enlistan a continuación:

- Encontrar puntos claves como las intersecciones con los ejes X y Y . Para ello encontraremos los valores de r correspondientes a los valores $\theta = 0, \frac{1}{2}\pi, \pi$ y $\frac{3}{2}\pi$.
- Estudiar la simetría de la gráfica apoyándonos en la ecuación rectangular equivalente o haciendo uso de los Ejercicios 206 al 209. Hay tres referentes de simetría: respecto al eje X , al eje Y y respecto al origen o polo.

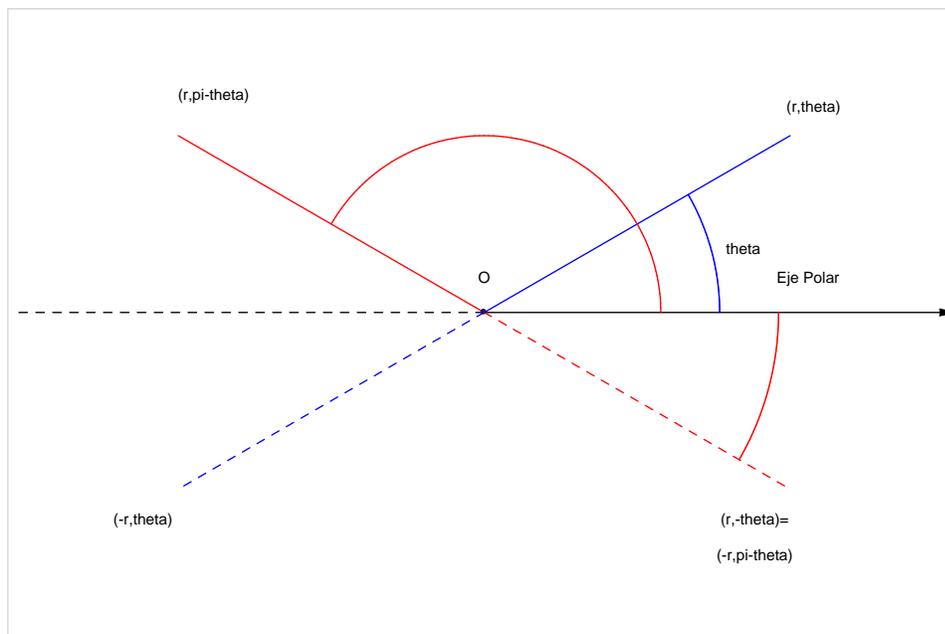


Figura 60

Con base en la Figura 60 podemos proporcionar criterios para determinar si la gráfica de una ecuación polar es simétrica:

Simetría respecto al	La ecuación no se altera	La ecuación rectangular es invariante
Eje X	si sustituimos θ por $-\theta$ o θ por $\pi - \theta$ y r por $-r$	si sustituimos x por $-x$.
Eje Y	si sustituimos θ por $\pi - \theta$ o θ por $-\theta$ y r por $-r$	si sustituimos y por $-y$.
Polo	si sustituimos θ por $\pi + \theta$ o bien r por $-r$	si sustituimos (x, y) por $(-x, -y)$.

Desde luego que todos estos criterios son consecuencia de identidades trigonométricas elementales.

- c) Se trazan algunos puntos usando valores comunes de θ y finalmente se esboza la gráfica.

EJEMPLO 80. En el Ejemplo 78 se dio la ecuación polar $r = a \cos \theta$, y es inmediato que esta ecuación no se altera al sustituir θ por $-\theta$; asimismo la ecuación rectangular es invariante al cambiar x por $-x$. De hecho, la gráfica es simétrica respecto al eje X , como ya se sabía.

EJEMPLO 81. Retomemos el Ejemplo 79. De la ecuación $r^2 = 4 \sin 2\theta$ se deduce que los valores de θ que producen puntos en la gráfica son aquellos para los cuales $\sin 2\theta \geq 0$. Apoyándonos en la Figura 57 notamos que esto último se cumple cuando $0 \leq 2\theta \leq \pi$, $2\pi \leq 2\theta \leq 3\pi$, etc. Esto equivale a $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$, $\pi \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi$. La propiedad periódica de la función seno nos da más intervalos, pero con estos serán suficientes. Así pues, cuando $\frac{1}{2}\pi < \theta < \pi$ o $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ la ecuación no produce puntos en la gráfica, pues $\sin 2\theta < 0$. Con ello ya sabemos que la gráfica sólo ocupa los cuadrantes I y III. Ahora bien, de acuerdo con la tabla en la recomendación (b), sustituir r por $-r$ o bien debido a que

$$\begin{aligned} \sin 2(\pi + \theta) &= \sin(2\pi + 2\theta) \\ &= \sin 2\theta \end{aligned}$$

se deduce que la gráfica es simétrica respecto al origen. Cualquier otra sustitución de las indicadas en esta misma tabla altera la ecuación. Las mismas conclusiones se obtienen si analizamos la ecuación rectangular. Calculando algunos valores de r podemos obtener unos pocos puntos de la gráfica:

θ	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$
r	0	$2\sqrt{3}$	4	$2\sqrt{3}$	0	4

Podemos también notar que conforme θ crece de 0 hasta $\frac{1}{4}\pi$, el valor de r aumenta de 0 hasta el máximo que es 4 (ver Figura 61a). Cuando θ crece de $\frac{1}{4}\pi$ hasta $\frac{1}{2}\pi$ ahora r decrece de 4 hasta 0 (ver Figura 61b). El polo \mathcal{O} pertenece a la gráfica.

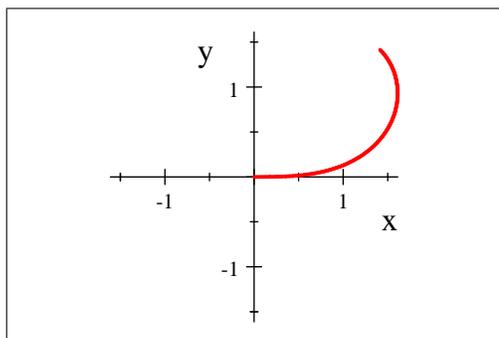


Figura 61a

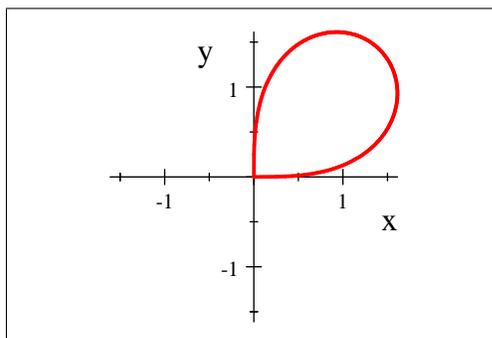


Figura 61b

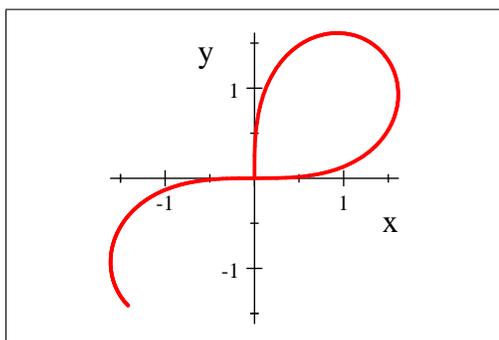


Figura 61c

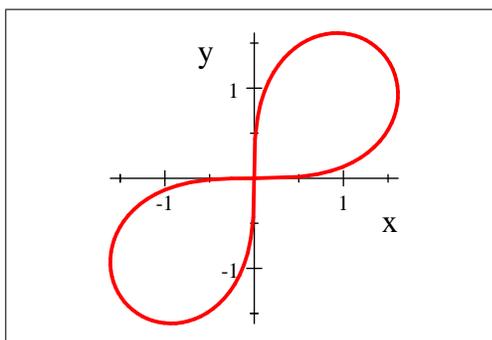


Figura 61d

Las Figuras 61 c y d muestran cómo se desenvuelve el lugar geométrico cuando θ recorre los valores de π hasta $\frac{3}{2}\pi$ al aplicar la simetría respecto al polo. Esta curva en particular se le denomina **lemniscata**.

EJEMPLO 82. Dada la ecuación polar $r = \cos 3\theta$ podemos apoyarnos en la Figura 59 pero teniendo en cuenta que la gráfica $\cos 3\theta$ está recorrida a la derecha. La Figura 62 nos exhibe el comportamiento desde $-\frac{1}{6}\pi$ hasta 2π . Debido a que $\cos(-3\theta) = \cos(3\theta)$, la gráfica es simétrica respecto al eje X. Se puede establecer que no hay simetría ni respecto al polo ni al eje Y. Obtenemos $r = 1$ cuando $3\theta = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \text{etc.}$, es decir, para $\theta = 0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, 2\pi, \text{etc.}$ Del mismo modo $r = -1$ para los valores de $\theta = \frac{1}{3}\pi, \pi, \frac{5}{3}\pi, \text{etc.}$ y $r = 0$ cuando $\theta = \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{5}{6}\pi, \text{etc.}$ La gráfica a la que llegaremos suele denominarse Rosa de tres hojas. Cada media hoja es recorrido por el punto (r, θ) por cada intervalo de longitud $\frac{1}{6}\pi$. Una vez que θ ha tomado los valores desde 0 hasta π , el punto ha recorrido las tres hojas de la gráfica. Después de este valor, el punto se mueve de manera cíclica sobre la gráfica. En las Figuras 63 de la a hasta la d podemos ver cómo se comporta el punto (r, θ) conforme θ aumenta desde 0 hasta llegar a π .

En la Figura 63a se grafican los puntos para $0 \leq \theta \leq \frac{1}{6}\pi$, que corresponden a la semihoja del cuadrante I. Los valores de θ con $\frac{1}{6}\pi \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$ hacen $\cos 3\theta < 0$ y se muestran los puntos en la Figura 63b; se tratan de los puntos de la hoja del cuadrante III. En la Figura 63c ya aparecen los puntos con $\frac{1}{2}\pi \leq \theta \leq \frac{5}{6}\pi$ y ahí $\cos 3\theta > 0$ por ello los puntos son los de la hoja en el cuadrante II. Para $\frac{5}{6}\pi \leq \theta \leq \pi$ tenemos nuevamente que $\cos 3\theta < 0$ y es la última semihoja de la gráfica. Los valores absolutos máximos de r se alcanzan cuando $\theta = 0, \frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi$ y se cicla cuando $\theta = \pi$. En los casos de $\theta = \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi$ y $\frac{5}{6}\pi$ se verifica que $r = 0$, es decir, durante el recorrido $0 \leq \theta \leq \pi$ el polo es visitado tres veces. Ahora bien, llevando la ecuación

polar a una equivalente rectangular tenemos que

$$\begin{aligned} r &= \cos 3\theta \\ r &= 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \\ r^4 &= 4r^3 \cos^3 \theta - r^2 r \cos \theta \\ (x^2 + y^2)^2 &= 4x^3 - (x^2 + y^2)x. \end{aligned}$$

Simplificando un poco

$$(x^2 + y^2)^2 = 3x^3 - xy^2.$$

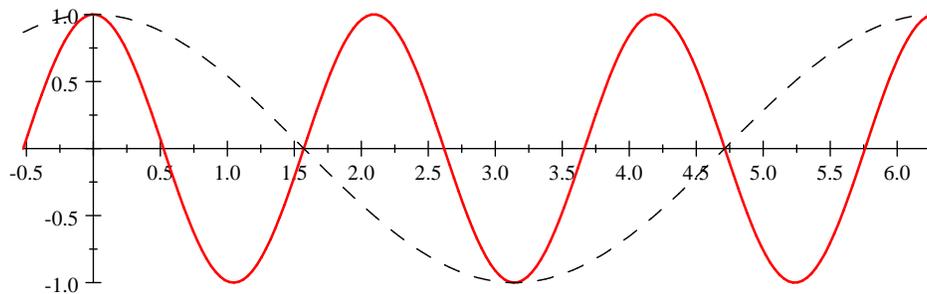


Figura 62

Es un error pensar que la ecuación polar $r = \cos 2\theta$ es una rosa de dos hojas. En realidad es una rosa de cuatro hojas. En general, $r = \cos n\theta$ o $\sin n\theta$ tienen por lugar geométrico rosas

de n hojas si n es impar y de $2n$ hojas si n es par (ver los Ejercicios 220 y 221).

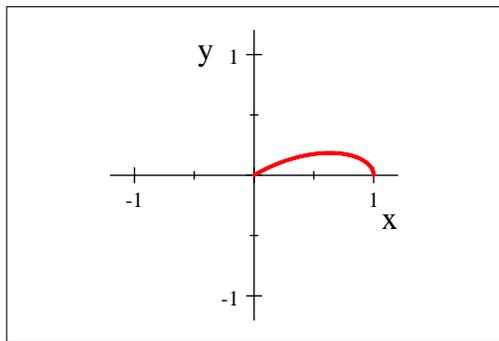


Figura 63a

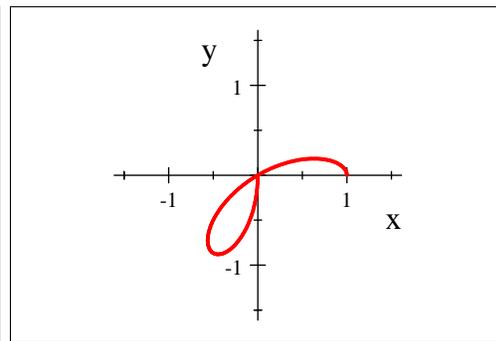


Figura 63b

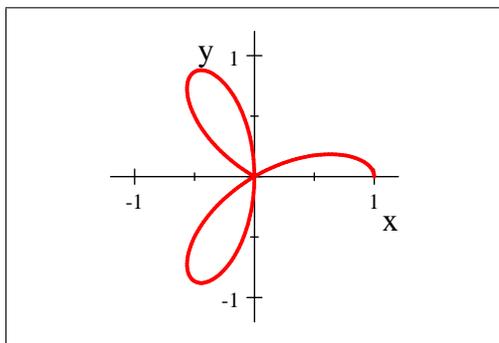


Figura 63c

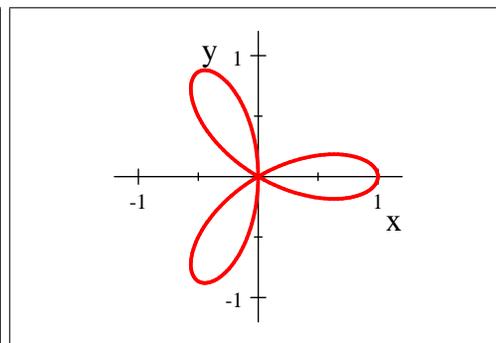


Figura 63d

EJEMPLO 83. La curva descrita por la ecuación polar $r = b + a \cos \theta$ o $r = b + a \sin \theta$ donde a y b son reales positivos recibe su nombre según sea $b = a$, o $b \neq a$. Si $a \neq b$, la curva suele llamarse **caracol** pero si $a = b$ se le denomina **cardioide**. Las formas de las curvas dan una buena razón para estos nombres.

La curva se puede inferir comenzando con la ya conocida ecuación $r = a \cos \theta$, que corresponde a $b = 0$ y es la circunferencia $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}a^2$. Ahora, si $0 < b < a$, entonces hay valores de θ tales que $r = 0$, a saber, los dos que satisfacen $0 < \theta < 2\pi$ y $\cos \theta = -\frac{b}{a}$. Se muestra en la Figura 64 el caso $a = 4$ y $b = 2$, donde los valores $\theta = \frac{2}{3}\pi$ y $\frac{4}{3}\pi$ hacen que $r = 0$. El valor de r es máximo cuando $\theta = 0$ y es $r = 6$. Si $\theta = \pi$, resulta que $r = -2$, de hecho, si $\frac{2}{3}\pi < \theta < \frac{4}{3}\pi$, entonces $2 + 4 \cos \theta < 0$ y aunque los ángulos corresponden a los cuadrantes II y III, el punto realmente está en los cuadrantes IV y I.

Si estamos en el caso $a = b$, entonces $r = 0$ únicamente cuando $\theta = \pi$ y el valor máximo de r es cuando $\theta = 0$. La Figura 65 exhibe el cardioide $r = 4 + 4 \cos \theta$. Conforme b aumentó hasta igualar el valor de a , el bucle interior se hizo más pequeño y se redujo al polo como $\mathcal{O} = (0, \pi)$.

El caso $b > a$ suele llamarse caracol sin bucle o **limaçon**. Se muestran los casos $b = 5$ y $b = 8$, ambos con $a = 4$. La curva con $b = 5$ presenta una hendidura mientras que con $b = 8$ se trata de una curva **convexa** (ver la Figura 66).

Los valores de r para las cuatro ecuaciones quedan representados por las gráficas contra θ en la Figura 67; se trata de la gráfica de $4 \cos \theta$, que oscila desde -4 hasta 4 , recorrida verticalmente b unidades.

Es sencillo ver que una ecuación rectangular de este lugar geométrico es

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = b^2 (x^2 + y^2)$$

y que $r = b + a \cos \theta$ es simétrica respecto al eje X mientras que $r = b + a \sin \theta$ lo es respecto al eje Y . Desde luego que estas curvas están definidas simplemente pidiendo que $ab \neq 0$, pero su ubicación respecto a los ejes o el polo se ve modificada para $b < 0$ o $a < 0$.

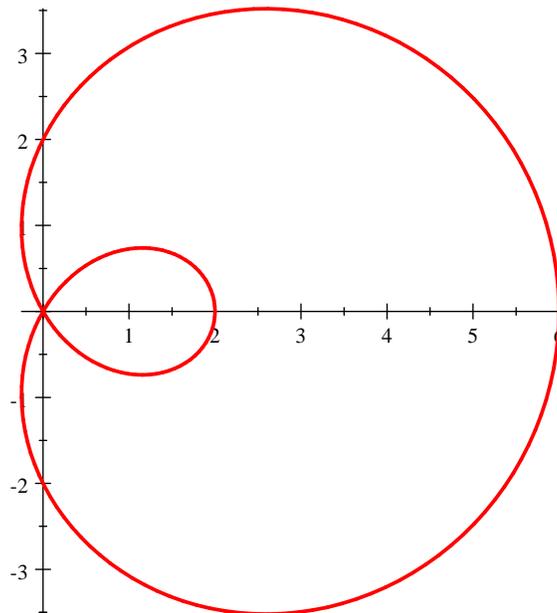


Figura 64

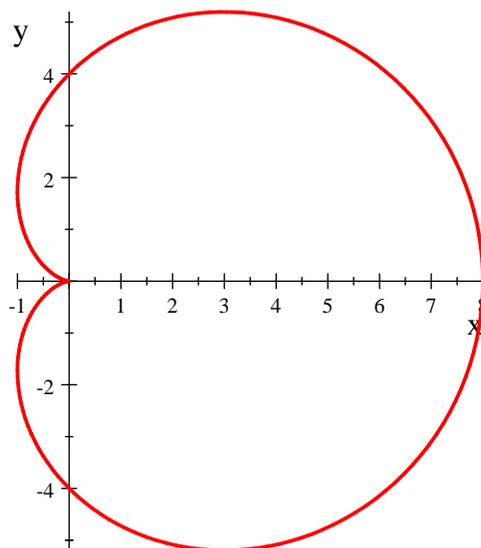


Figura 65

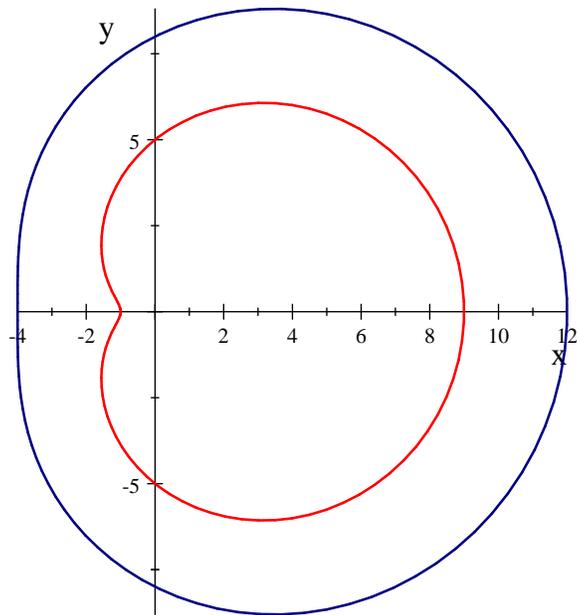


Figura 66

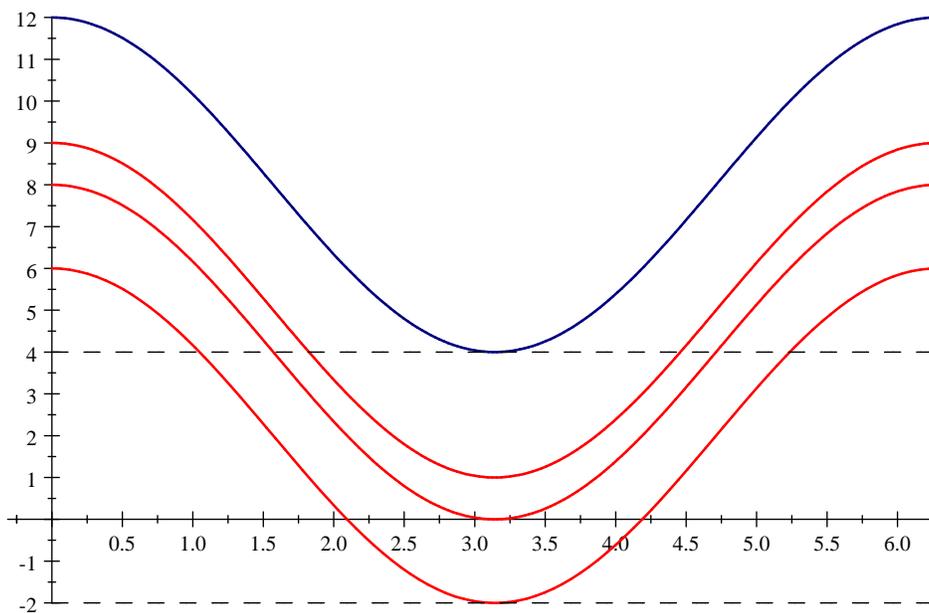


Figura 67

OBSERVACIÓN 19. *El Ejemplo 83 muestra que el hecho de que un punto (x, y) tenga más de una representación en coordenadas polares, aún cuando $0 \leq \theta < 2\pi$, por ejemplo ocurre que (r, θ) y $(-r, \theta + \pi)$ son el mismo par ordenado (x, y) , nos indica que al encontrar la intersección de dos lugares geométricos por medio de sus ecuaciones polares debemos tener especial cuidado. La ecuación polar $2 + 4\cos\theta$ contiene en su gráfica al punto $(-2, \pi)$ que también es representado por el par $(2, 0)$ pero el segundo par no satisface la ecuación polar. Del mismo modo, el primer punto no satisface la ecuación polar $r = 2$ mientras que el segundo sí lo hace. En coordenadas rectangulares ambos puntos son $(2, 0)$ y satisfacen las*

ecuaciones rectangulares equivalentes a las ecuaciones polares:

$$(x^2 + y^2 - 4x)^2 = 4(x^2 + y^2)$$

para el caracol con bucle y

$$x^2 + y^2 = 4$$

para la circunferencia de radio 2.

Sin embargo, el Ejemplo 84 muestra que hay ecuaciones polares cuyos puntos de intersección ocurren para valores $\theta_1 \neq \theta_2$ y $\theta_1 \neq \theta_2 + \pi$.

EJEMPLO 84. Las ecuaciones polares $r_1 = 1 + \cos \theta$ y $r_2 = 1 + \sin \theta$ representan a dos cardioides que se intersectan en tres puntos:

$$P_1 = \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2}, \frac{1}{4}\pi \right) \text{ y } P_2 = \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2}, \frac{5}{4}\pi \right),$$

que corresponden a los valores de θ tales que $\cos \theta = \sin \theta$. El tercer punto es el polo: $\mathcal{O} = (0, \pi)$ para r_1 y $\mathcal{O} = (0, \frac{3}{2}\pi)$ para r_2 . En coordenadas rectangulares ambos pares se transforman en el origen.

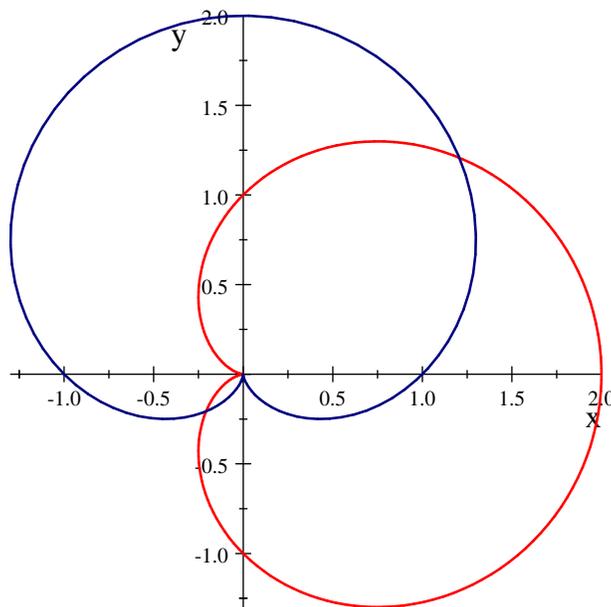


Figura 68

EJEMPLO 85. Este ejemplo será útil para resolver el Ejercicio 236. Consideremos las ecuaciones polares

$$r_1 \cos \theta = -\frac{27}{7} \text{ y } r_2 = \frac{18}{8 + 6 \cos \theta}$$

Encontrar la intersección de sus lugares geométricos es encontrar los valores de θ que hacen $r_1 = r_2$; el polo no pertenece a ambos lugares. Entonces igualando

$$-\frac{27}{7 \cos \theta} = \frac{18}{8 + 6 \cos \theta}$$

148

y reagrupando términos calculamos fácilmente que

$$\cos \theta = -\frac{3}{4}.$$

Así que $\theta = \pm 2.41886$. Los puntos son, en coordenadas polares

$$P_1 = \left(\frac{36}{7}, 2.41886 \right) \text{ y } P_2 = \left(\frac{36}{7}, -2.41886 \right).$$

Llevando las ecuaciones polares a equivalentes rectangulares obtenemos $x = -\frac{27}{7}$ para la primera y $7x^2 + 16y^2 + 54x - 81 = 0$ para la segunda y resulta que es una elipse con centro con coordenadas rectangulares en $C = \left(-\frac{27}{7}, 0\right)$ y uno de sus focos en el polo. Se puede ver ahora que los puntos encontrados son los extremos del eje menor, que el semieje mayor es $\frac{36}{7}$, el semieje focal es $\frac{27}{7}$ y que $\frac{3}{4}$ es la excentricidad de la elipse. Reescribiendo la segunda ecuación polar en la forma

$$r_2 = \frac{3\left(\frac{3}{4}\right)}{1 + \frac{3}{4}\cos\theta}$$

nos da además la información de que la recta $x = 3$ es la directriz asociada al foco localizado en el polo.

4. Las secciones cónicas en coordenadas polares

Transformar la ecuación cuadrática

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

a su forma polar no es difícil sino laborioso, pues se reduce a resolver la ecuación en segundo grado

$$r^2 (A \cos^2 \theta + C \sin^2 \theta) + r (D \cos \theta + E \sin \theta) + F = 0.$$

Sin embargo, las secciones cónicas con uno de sus focos, o su foco en el caso de la parábola, localizado en el polo \mathcal{O} tienen una ecuación polar particularmente sencilla. Una sección cónica se define, como ya se dijo en la Sección 3 del Capítulo 4 en las Definiciones 26 y 27, por medio de su excentricidad.

Considérese pues el polo \mathcal{O} como un foco de una cónica y una recta $\mathcal{D} : x = -p$ o en coordenadas polares $r \cos \theta = -p$, donde $p > 0$. La recta será una directriz de la cónica. Sea pues $P = (x, y)$ un punto cualquiera en la curva, por lo que se cumple que

$$e = \frac{d(\mathcal{O}, P)}{d(\mathcal{D}, P)}.$$

Ahora bien, como pretendemos encontrar $r = f(\theta)$, debemos asignar $d(\mathcal{O}, p) = |f(\theta)| = |r|$ pues puede ocurrir que $f(\theta) < 0$. Debido a que $x = r \cos \theta$ se sigue que $d(\mathcal{D}, P) = |p + r \cos \theta|$. Entonces tenemos que

$$e = \left| \frac{r}{p + r \cos \theta} \right|$$

(ver la Figura 69).

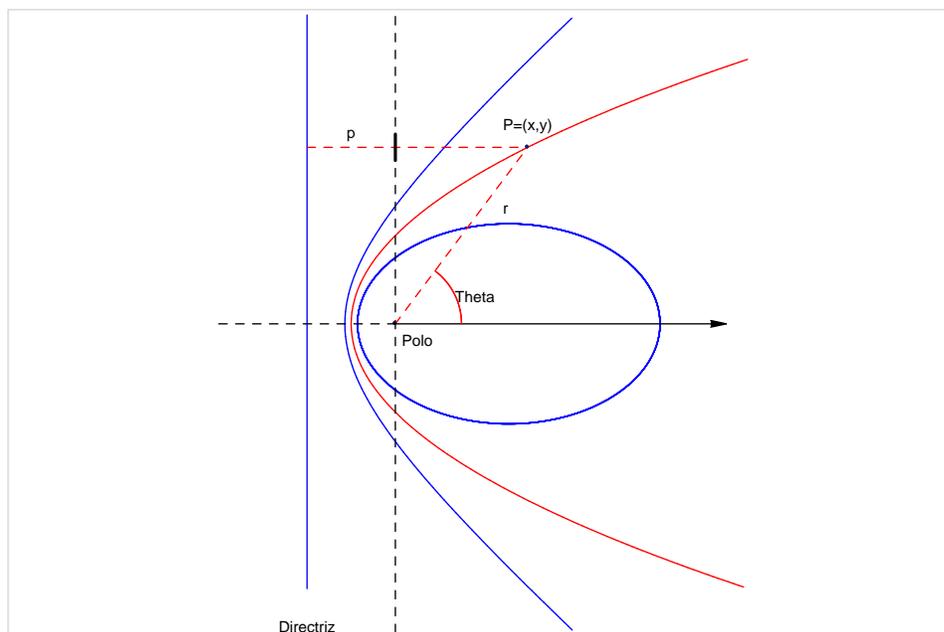


Figura 69

Por lo que podemos escribir

$$r = \pm (ep + er \cos \theta),$$

pero se puede demostrar que $r = -(ep + er \cos \theta)$ y $r = ep + er \cos \theta$ representan el mismo conjunto de puntos (ver el Ejercicio 230). Por ello elegiremos para este lugar geométrico la ecuación polar

$$(4.1) \quad r = \frac{ep}{1 - e \cos \theta}$$

La ecuación (4.1) la denominaremos **ecuación polar ordinaria** de la sección cónica con excentricidad e , foco en el polo \mathcal{O} y directriz la recta $r \cos \theta + p = 0$.

EJEMPLO 86. Para la ecuación polar

$$(4.2) \quad r = \frac{3}{2 - 3 \cos \theta}$$

realizamos la modificación

$$r = \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{3}{2} \cos \theta}$$

y notamos que se trata de la hipérbola con directriz $\mathcal{D} : x = -1$ con excentricidad $e = \frac{3}{2}$. Reacomodando términos de la ecuación inicial fácilmente llegamos a

$$2r = 3 + 3r \cos \theta$$

o bien

$$4r^2 = 9 + 18r \cos \theta + 9r^2 \cos^2 \theta$$

que en coordenadas rectangulares es

$$5x^2 - 4y^2 + 18x + 9 = 0.$$

Es útil hacer ver que los valores de $\theta_1 = 0,84107$ y $\theta_2 = 2\pi - 0,84107$ anulan el denominador en (4.2). Los valores de $m_1 = \tan \theta_1$ y $m_2 = \tan \theta_2$ son las pendientes de las rectas asíntotas

que además suman cero. Los vértices de la hipérbola son los puntos $V_2 = (-3, 0)$ y $V_1 = (\frac{3}{5}, \pi)$ por lo que el centro es, en coordenadas rectangulares, $C = (\frac{9}{5}, 0)$.

EJEMPLO 87. Suponiendo que

$$r = \frac{a}{b - d \sin \theta}$$

resulta que en coordenadas rectangulares

$$b^2 x^2 + (b^2 - d^2) y^2 - 2ady - a^2 = 0$$

donde según sea $b^2 > d^2$, $b^2 < d^2$ o $b^2 = d^2$ se tratará de una elipse, una hipérbola o parábola respectivamente. Para el caso

$$r = \frac{4}{3 + 2 \sin \theta} = \frac{(2) \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3} \sin \theta}$$

resulta que es la elipse

$$9x^2 + 5y^2 + 16y - 16 = 0.$$

Notemos que el denominador en la ecuación polar de la elipse nunca se anula; esto es una señal de que se trata de una curva cerrada (ver la Figura 70). El valor mínimo de $f(\theta)$ es de $r = \frac{4}{5}$ cuando $\theta = \frac{1}{2}\pi$ y máximo de $r = 4$ para $\theta = \frac{3}{2}\pi$. Es una elipse simétrica respecto al eje Y por lo que su eje focal es paralelo al eje Y (el centro (h, k) no es el polo). Tiene excentricidad $e = \frac{2}{3}$ y una directriz en la recta $r \sin \theta = 2$ o bien $\mathcal{D} : y = 2$ (ver el Ejercicio 232).

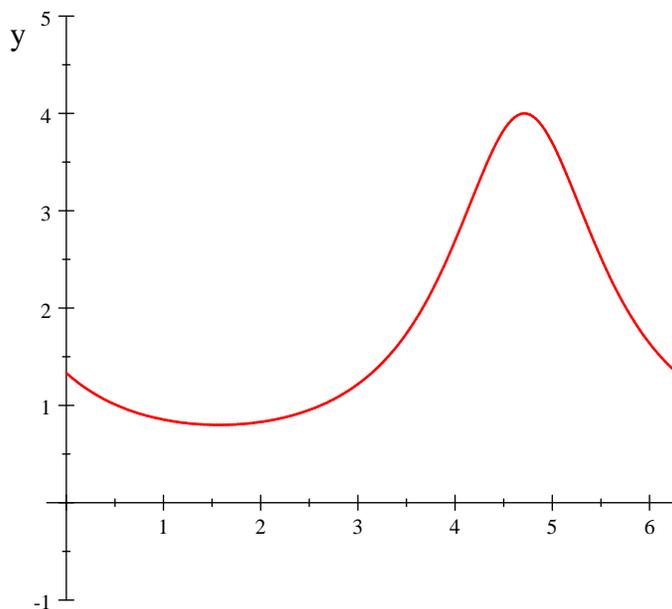


Figura 70

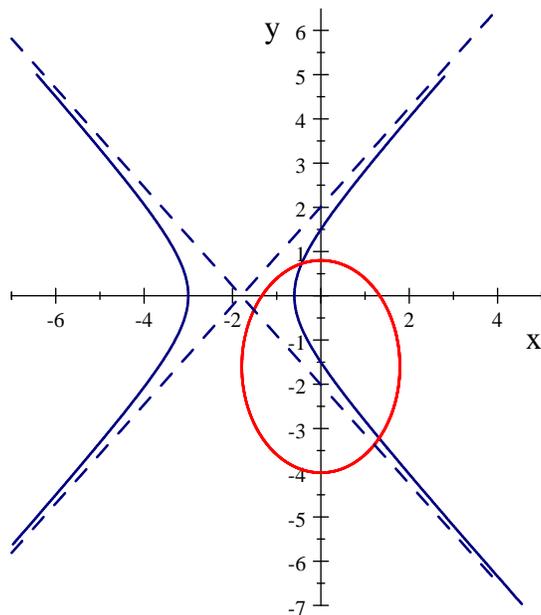


Figura 71

La Figura 71 muestra las gráficas de los Ejemplos 86 y 87.

5. Ejercicios

EJERCICIO 197. *Transforme las ecuaciones*

$$x^2 + 2xy + y^2 - 3x + y = 1$$

y

$$x^2 - 2xy + y^2 - 3x = 0$$

en una ecuación en las variables x' y y' empleando $\theta = \frac{\pi}{4}$.

EJERCICIO 198. *Transforme las ecuaciones*

$$8x^2 - 4xy + 5y^2 - 36 = 0$$

y

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 36 = 0$$

en ecuaciones en las variables x' y y' empleando $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ y $\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

EJERCICIO 199. *Transforme las ecuaciones*

$$11x^2 - 24xy + 4y^2 + 30x + 40y - 45 = 0$$

y

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 - 20x + 15y - 10 = 0$$

en ecuaciones en las variables x' y y' empleando $\cos \theta = \frac{3}{5}$ y $\sin \theta = \frac{4}{5}$.

EJERCICIO 200. *Demuestre que si los puntos $S = (x_1, y_1)$ y $T = (x_2, y_2)$ en el sistema X - Y se relacionan con los puntos $S' = (x'_1, y'_1)$ y $T' = (x'_2, y'_2)$ en el sistema X' - Y' por medio de las ecuaciones (1.1) o equivalentemente (1.2), entonces*

$$\|\mathbf{t} - \mathbf{s}\| = \|\mathbf{t}' - \mathbf{s}'\|$$

e interprete geoméricamente este hecho.

EJERCICIO 201. Sean $S = (x_1, y_1)$, $T = (x_2, y_2)$ y $U = (x_3, y_3)$ tres puntos en el sistema $X-Y$ que se relacionan con los puntos $S' = (x'_1, y'_1)$, $T' = (x'_2, y'_2)$ y $U' = (x'_3, y'_3)$ en el sistema $X'-Y'$ por medio de las ecuaciones (1.1) o equivalentemente (1.2). Demuestre que

$$\frac{\langle (\mathbf{t} - \mathbf{s}), (\mathbf{u} - \mathbf{s}) \rangle}{\|\mathbf{t} - \mathbf{s}\| \|\mathbf{u} - \mathbf{s}\|} = \frac{\langle (\mathbf{t}' - \mathbf{s}'), (\mathbf{u}' - \mathbf{s}') \rangle}{\|\mathbf{t}' - \mathbf{s}'\| \|\mathbf{u}' - \mathbf{s}'\|}$$

e interprete geoméricamente este hecho.

EJERCICIO 202. Para cada una de las siguientes ecuaciones calcule un valor de θ tal que el empleo de las ecuaciones (1.2) elimine el término $x'y'$. Enseguida obtenga en ambos sistemas las coordenadas del (de los) vértice(s), del (de los) foco(s) y, si corresponde, del centro:

1. $x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 4y + 5 = 0$,
2. $2x^2 - 5xy + 2y^2 - 7x + 8y - 32 = 0$,
3. $2x^2 + \sqrt{3}xy + 5y^2 + x - 3y - 8 = 0$,
4. $3xy - \sqrt{3}y^2 + 7x - 4y + 10 = 0$,
5. $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 38x - 34y + 71 = 0$,
6. $3x^2 + \sqrt{48}xy - y^2 - 15 = 0$.

EJERCICIO 203. Demuestre que la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ es invariante bajo la transformación de las ecuaciones (1.2). Explique qué sucede con la ecuación $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ cuando se transforma con las ecuaciones (1.2).

EJERCICIO 204. Demuestre que en la ecuación (1.5), la parte

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2$$

es un trinomio cuadrado perfecto si y sólo si (1.5) es de tipo parabólico. Ayuda: cuando suponga que (1.5) es de tipo parabólico, llévela al caso $A > 0$ multiplicándola por -1 de ser necesario.

EJERCICIO 205. Para los siguientes puntos en coordenadas rectangulares encuentre dos valores θ_1 y θ_2 tales que $0 \leq \theta_1, \theta_2 < 2\pi$ que representen cada punto de las formas (r, θ_1) y $(-r, \theta_2)$:

$$\begin{array}{lll} a) (4, -4\sqrt{3}), & b) (-2, 2), & c) (-\sqrt{5}, \sqrt{15}), \\ d) (6, -\sqrt{12}), & e) (-\sqrt{75}, -5), & f) (\sqrt{7}, \sqrt{7}). \end{array}$$

EJERCICIO 206. Si $S = (x, y)$ es tal que en coordenadas polares se escribe $S = (r, \theta)$, escriba en coordenadas rectangulares el punto $T = (r, \pi - \theta)$.

EJERCICIO 207. Si $S = (x, y)$ es tal que en coordenadas polares se escribe $S = (r, \theta)$, escriba en coordenadas rectangulares el punto $T = (-r, \pi - \theta)$.

EJERCICIO 208. Si $S = (x, y)$ es tal que en coordenadas polares se escribe $S = (r, \theta)$, escriba en coordenadas rectangulares el punto $T = (r, -\theta)$.

EJERCICIO 209. Si $S = (x, y)$ es tal que en coordenadas polares se escribe $S = (r, \theta)$, escriba en coordenadas rectangulares el punto $T = (-r, -\theta)$.

EJERCICIO 210. Si $S = (x, y)$ es tal que en coordenadas polares se escribe $S = (r, \theta)$, escriba en coordenadas polares $T = (-y, x)$.

EJERCICIO 211. Si $S = (x, y)$ es tal que en coordenadas polares se escribe $S = (r, \theta)$, escriba en coordenadas rectangulares el punto $T = (r, \frac{1}{2}\pi - \theta)$.

EJERCICIO 212. Si $S = (x, y)$ es tal que en coordenadas polares se escribe $S = (r, \theta)$, escriba en coordenadas rectangulares los puntos $T = (r, \theta + \frac{1}{2}\pi)$ y $Q = (r, \theta - \frac{1}{2}\pi)$.

EJERCICIO 213. Sean en coordenadas polares $S = (r_1, \theta_1)$ y $T = (r_2, \theta_2)$ y $d = \|\mathbf{s} - \mathbf{t}\|$. Demuestre que

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1).$$

EJERCICIO 214. Aplique el Ejercicio 213 para establecer que si en coordenadas polares $C = (r_1, \theta_1)$, la circunferencia de centro en C y radio R tiene una ecuación polar

$$r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos(\theta - \theta_1) = R^2.$$

EJERCICIO 215. Estudie las gráficas de $\cos \frac{1}{3}\theta$ en el intervalo de valores $-6\pi \leq \theta \leq 6\pi$ y de $\cos 2\theta$ en el intervalo de valores $-2\pi \leq \theta \leq 2\pi$. Identifique el número de ciclos de cada gráfica en el intervalo $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Así mismo, determine los valores de θ en los respectivos intervalos para los cuales cada gráfica alcanza los valores de 1, -1 y 0.

EJERCICIO 216. Grafique el lugar geométrico de la ecuación polar $r^2 = 3 \cos 2\theta$. Obtenga una ecuación rectangular equivalente.

EJERCICIO 217. Estudie las gráficas de $\cos 4\theta$ y de $\sin 4\theta$ en el intervalo de valores $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Identifique el número de ciclos de la gráfica y determine los valores de θ en los que cada gráfica alcanza los valores de 1, -1 y 0.

EJERCICIO 218. Grafique el lugar geométrico de la ecuación polar $r^2 = 2 \sin 4\theta$. Obtenga una ecuación rectangular equivalente.

EJERCICIO 219. Grafique el lugar geométrico de la ecuación polar $r^2 = 2 \cos 4\theta$. Obtenga una ecuación rectangular equivalente.

EJERCICIO 220. Grafique el lugar geométrico de la ecuación polar $r = 3 \cos 2\theta$. Es llamada rosa de cuatro hojas y es simétrica respecto a los tres referentes. Enseguida grafique el lugar geométrico de la ecuación polar $r = 4 \sin 2\theta$. Obtenga ecuaciones rectangulares equivalentes.

EJERCICIO 221. Grafique el lugar geométrico de la ecuación polar $r = \frac{3}{2} \sin 3\theta$. Se le llama rosa de tres hojas y es simétrica respecto al eje Y . Ver el Ejemplo 82. Obtenga una ecuación rectangular equivalente.

EJERCICIO 222. Grafique el lugar geométrico de las ecuaciones polares $r = a \sec \theta$ y $r = a \csc \theta$ con $a \neq 0$.

EJERCICIO 223. Grafique el lugar geométrico de las ecuaciones polares $r = a \sin(\theta - \frac{1}{6}\pi)$ y $r = a \sin(\theta - \frac{1}{3}\pi)$ con $a > 0$. Obtenga ecuaciones rectangulares equivalentes.

EJERCICIO 224. Encuentre todos los puntos en coordenadas polares (r, θ) con $0 \leq \theta \leq 2\pi$ que satisfagan simultáneamente las ecuaciones polares $r_1 = 2$ y $r_2 = 4 \cos 2\theta$.

EJERCICIO 225. Encuentre todos los puntos en coordenadas polares (r, θ) con $0 \leq \theta \leq 2\pi$ que satisfagan simultáneamente las ecuaciones polares $r_1 = 2$ y $r_2 = 4 \sin 2\theta$.

EJERCICIO 226. Encuentre todos los puntos en coordenadas polares (r, θ) con $0 \leq \theta \leq 2\pi$ que satisfagan simultáneamente las ecuaciones polares $r_1 = 2$ y $r_2 = 4 + 2 \sin 2\theta$.

EJERCICIO 227. Encuentre todos los puntos en coordenadas polares (r, θ) con $0 \leq \theta \leq 2\pi$ que satisfagan simultáneamente las ecuaciones polares $r_1 = 2$ y $r_2 = 2 + 4 \sin 2\theta$.

EJERCICIO 228. Encuentre todos los puntos en coordenadas polares (r, θ) con $0 \leq \theta \leq 2\pi$ que satisfagan simultáneamente las ecuaciones polares $r_1 = 2 \csc \theta$ y $r_2 = 2 + 4 \sin 2\theta$.

EJERCICIO 229. Encuentre todos los puntos en coordenadas polares (r, θ) con $0 \leq \theta \leq 2\pi$ que satisfagan simultáneamente las ecuaciones polares $r_1 = 3 \csc \theta$ y $r_2 = 4 + 4 \sin 2\theta$.

EJERCICIO 230. Demuestre que las ecuaciones polares

$$r = \frac{ep}{1 - r \cos \theta}$$

y

$$r = \frac{-ep}{1 + r \cos \theta}$$

representan el mismo lugar geométrico en virtud de que (r, θ) y $(-r, \theta + \pi)$ son el mismo punto en coordenadas rectangulares.

EJERCICIO 231. Razone como se hizo con la Figura 69 para deducir que la ecuación polar

$$r = \frac{ep}{1 + e \cos \theta}$$

con $p > 0$ representa una cónica con excentricidad e , un foco en el polo (si hubiese dos de ellos) y la directriz que corresponde a tal foco es la recta $\mathcal{D} : y = p$

EJERCICIO 232. Razone como se hizo con la Figura 69 y el Ejercicio 231 para deducir que la ecuación polar

$$r = \frac{ep}{1 \pm e \sin \theta}$$

con $p > 0$ representa una cónica con excentricidad e , un foco en el polo (si hubiese dos de ellos) y la directriz que corresponde a tal foco es la recta $\mathcal{D} : y = \pm p$.

EJERCICIO 233. Para cada una de las siguientes ecuaciones polares identifique la cónica, obtenga la ecuación cartesiana equivalente, localice la directriz asociada al foco situado en el polo y finalmente grafique la curva:

$$a)r = \frac{1}{1 - \cos \theta}, \quad b)r = \frac{4}{1 - \cos \theta}, \quad c)r = \frac{6}{2 + \cos \theta},$$

$$e)r = \frac{8}{1 + 3 \cos \theta}, \quad f)r = \frac{16}{4 - 5 \sin \theta}, \quad g)r = \frac{12}{1 - 4 \sin \theta},$$

$$h)r = \frac{10}{5 - 2 \cos \theta}, \quad i)r = \frac{8}{5 + 4 \sin \theta}, \quad j)r = \frac{10}{1 + \sin \theta}.$$

EJERCICIO 234. Obtenga la gráfica del lugar geométrico de la ecuación polar

$$r = \frac{ep}{1 - e \cos(\theta - \alpha)}$$

donde α es un ángulo constante con $0 < \alpha < 2\pi$.

EJERCICIO 235. *Obtenga una ecuación polar de la forma*

$$r = \frac{a}{b \pm d \sin \theta \text{ ó } \cos \theta}$$

para las cónicas con foco en el polo y la directriz asociada la recta indicada:

1. *Parábola con $\mathcal{D} : x = -1$,*
2. *Parábola con $\mathcal{D} : y = 3$,*
3. *Elipse con $e = \frac{3}{4}$ y con $\mathcal{D} : y = -6$,*
4. *Hipérbola con $e = 2$ y con $\mathcal{D} : x = -4$,*
5. *Elipse con $e = \frac{2}{3}$ y con $\mathcal{D} : x = 4$,*
6. *Hipérbola con $e = \frac{3}{2}$ y con $\mathcal{D} : y = 6$.*

EJERCICIO 236. *Si la ecuación polar*

$$r = \frac{ep}{1 + e \cos \theta}$$

corresponde a una elipse, demuestre que su semieje mayor es

$$a = \frac{ep}{1 - e^2},$$

que su centro en coordenadas rectangulares es

$$\left(-\frac{e^2 p}{1 - e^2}, 0 \right)$$

y finalmente obtenga una expresión para el semieje menor.

CAPÍTULO 6

Superficies y curvas en el espacio

En este último capítulo estudiaremos de manera elemental las cónicas en el espacio y veremos algunas curvas trazadas sobre dichas superficies.

1. Cónicas en el espacio

El tratamiento será esencialmente descriptivo. La ecuación general de una **superficie cónica** en el espacio es de la forma

$$(1.1) \quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0.$$

Cuando alguno de los coeficientes D , E o F es distinto de cero, el centro o vértice está fuera del origen. Entonces comenzaremos con las ecuaciones de la forma

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + G = 0$$

o bien

$$Ax^2 + By^2 + Fz + G = 0.$$

Algunas superficies cónicas en el espacio pueden generarse rotando una curva cónica alrededor de uno de sus ejes o de su eje en el caso de una parábola. Tales superficies se denominan **superficies de revolución**. Describiremos cuatro de ellas según sea la curva que gira.

Curva que gira	Eje de giro	Superficie	Ecuación
Parábola: $z = ax^2$	Su propio eje	Paraboloide	$z = Ax^2 + By^2$ $AB > 0$
Elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	Uno de sus ejes	Elipsoide	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ $a, b, c > 0$
Hipérbola: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	Eje conjugado	Hiperboloide de una hoja o manto	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ $a, b, c > 0$
Hipérbola: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	Eje transversal	Hiperboloide de dos hojas o mantos	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ $a, b, c > 0$

Para el **paraboloide**, si $A = B$, éste se denominará circular, en caso contrario, se le asignará el nombre de paraboloide elíptico. Un mismo tratamiento similar se da para los hiperboloides tanto de una o de dos hojas. Si $a = b$, es un **hiperboloide** circular de una hoja y si $a \neq b$ le llamaremos hiperboloide elíptico de una hoja. Lo mismo para el hiperboloide de dos mantos según sea $b = c$ o bien $b \neq c$ respectivamente.

Para el **elipsoide** es inmediato que si $a = b = c$ en realidad es una esfera. Si dos de los números a , b o c son iguales y el tercero es distinto, le llamaremos **esferoide**.

EJEMPLO 88. *En el plano XZ trazamos la parábola $z = \frac{1}{2}x^2$. Cuando esta curva gira alrededor del eje Z se genera una superficie llamada paraboloide circular.*

En las Figuras 72 se muestran distintas etapas de rotación de la curva. La ecuación de la superficie es

$$2z = x^2 + y^2$$

Debido a que $A = B$, cada punto de la parábola produce una circunferencia de radio $R = \sqrt{2z_0}$, a saber, la curva en \mathbb{R}^3 descrita por la ecuación

$$x^2 + y^2 = 2z_0,$$

que se trata de una curva paralela al plano XY situada en el plano $z = z_0$. Es por ello que se acostumbra a denominar a esta superficie paraboloides circular. Es obvio que debe ser $z_0 \geq 0$. En las Figuras 72 de la a a la c se muestra parte de la circunferencia con $z_0 = \frac{9}{2}$. Se trata pues de la circunferencia de radio $R = 3$, centro en el punto $(0, 0, \frac{9}{2})$ y paralela al plano XY . Del mismo modo, las secciones transversales obtenidas por los planos $x = x_0$ y $y = y_0$ son parábolas con ecuaciones $2z = x_0^2 + y^2$ y $2z = x^2 + y_0^2$ respectivamente.

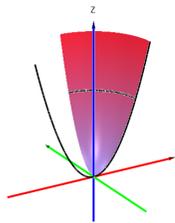


Figura 72a

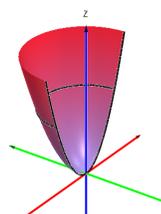


Figura 72b

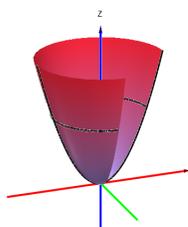


Figura 72c

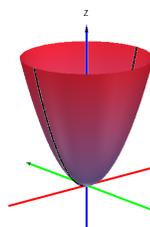


Figura 72d

Otras curvas asociadas a la superficie son las llamadas **trazas**, que al igual que en los planos, son las curvas obtenidas al asignar el valor de cero a una de las variables. Estas curvas se obtienen geoméricamente por medio de la intersección de la superficie con los planos coordenados. Además de estos planos, podemos intersectar la superficie con planos paralelos a los planos coordenados. Las curvas así obtenidas suelen denominarse **secciones transversales**.

EJEMPLO 89. En el paraboloides circular del Ejemplo 88 las trazas son: la traza $x = 0$ es la parábola $z = \frac{1}{2}y^2$; la traza $z = 0$ es el origen. La parábola con la que comenzamos es la traza $y = 0$.

Las secciones transversales se obtienen intersectando el paraboloides con los planos $z = z_0$ y son el conjunto vacío siempre que $z_0 < 0$. Para $z_0 \geq 0$ son precisamente circunferencias en \mathbb{R}^3 sobre el plano de corte con radio $R = \sqrt{2z_0}$ y centro en $(0, 0, z_0)$.

EJEMPLO 90. Dado el paraboloides elíptico $3y = x^2 + 3z^2$ tenemos que las trazas son el origen para $y = 0$, las parábolas $3y = x^2$ y $y = z^2$ para $z = 0$ y $x = 0$ respectivamente. Los cortes transversales para $y_0 \geq 0$ son elipses contenidas en los planos $y = y_0$ con ecuaciones $3y_0 = x^2 + 3z^2$ y localizamos los centros de estas elipses en los puntos $(0, y_0, 0)$. Es obvio que las secciones transversales son vacías para $y_0 < 0$. La Figura 73 muestra el paraboloides elíptico junto con la elipse que surge del corte transversal $y_0 = 9$, es decir, la elipse con centro en el punto $(0, 9, 0)$ y ecuación

$$\frac{x^2}{27} + \frac{z^2}{9} = 1.$$

y los vértices de esta elipse son los puntos $(\pm\sqrt{27}, 9, 0)$ mientras que los puntos $(0, 9, \pm 3)$ son los extremos del eje menor.

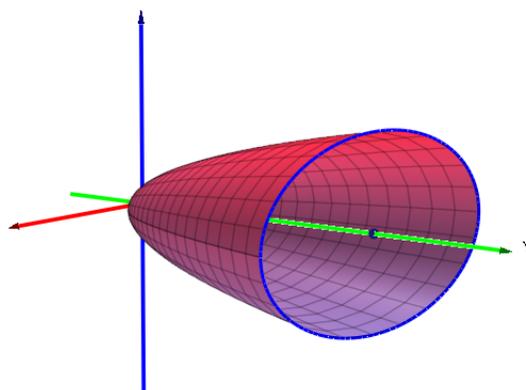


Figura 73

EJEMPLO 91. Con la hipérbola \mathcal{H} descrita por la ecuación

$$(1.2) \quad \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$$

cuyos ejes transverso y conjugado descansan sobre los ejes X y Y respectivamente generamos el hiperboloides circular de dos hojas al girar la hipérbola alrededor del eje transverso. Así que esta hipérbola será la traza $z = 0$ del hiperboloides. Al girar los puntos de la hipérbola \mathcal{H} en una circunferencia con centro en puntos de la forma $(x_0, 0, 0)$, obtendremos la hipérbola

$$\frac{x^2}{4} - z^2 = 1$$

como la traza $y = 0$. Los vértices $(\pm 2, 0, 0)$ se mantienen fijos. De acuerdo con lo anterior, la ecuación del hiperboloide de dos hojas que así generamos es

$$(1.3) \quad \frac{x^2}{4} - y^2 - z^2 = 1$$

y notamos que la traza $x = 0$ es el conjunto vacío. Más aún, las secciones transversales que se obtienen al cortar la superficie con el plano $x = x_0$ son circunferencias con ecuaciones

$$y^2 + z^2 = \frac{x_0^2}{4} - 1$$

que serán distintas del vacío si y sólo si $|x_0| \geq 2$. Las secciones transversales para $|x_0| = 2$ son precisamente los puntos $(\pm 2, 0, 0)$ donde se localizan los vértices de las hipérbolas que corresponden a las trazas $z = 0$ y $y = 0$. Los planos $y = y_0$ y $z = z_0$ producen hipérbolas como cortes transversales.

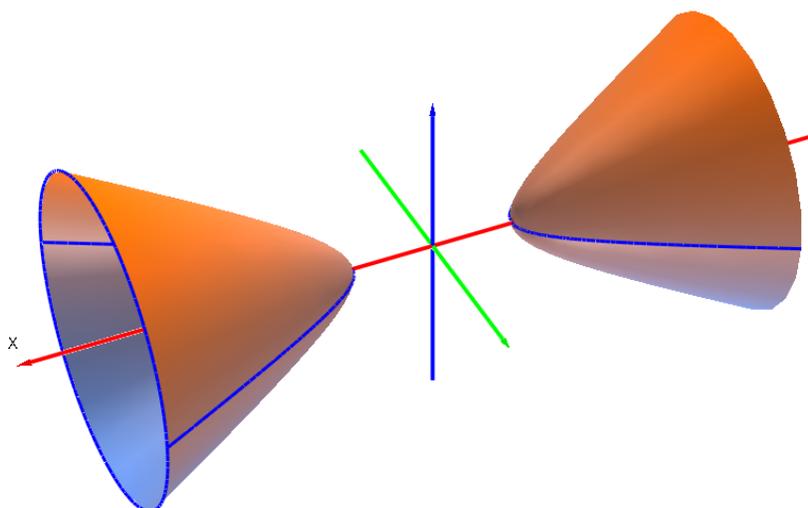


Figura 74

EJEMPLO 92. Con la misma hipérbola \mathcal{H} del Ejemplo 91

$$\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$$

generamos el hiperboloide circular de una hoja al girar la hipérbola alrededor del eje conjugado. Nuevamente esta hipérbola será la traza $z = 0$ del hiperboloide. Al girar los puntos de la hipérbola \mathcal{H} en una circunferencia con centro en puntos de la forma $(0, y_0, 0)$, se produce la traza $x = 0$ que ahora es la hipérbola

$$\frac{z^2}{4} - y^2 = 1$$

y a diferencia del Ejemplo 91 los vértices ahora giran en sobre la circunferencia

$$\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1.$$

Esta circunferencia es la traza $y = 0$. De acuerdo con las tres trazas obtenidas, la ecuación del hiperboloide de una hoja es

$$(1.4) \quad \frac{x^2}{4} - y^2 + \frac{z^2}{4} = 1.$$

En esta superficie los cortes transversales corresponden a circunferencias para $y = y_0$ e hipérbolas para $x = x_0$ y $z = z_0$.

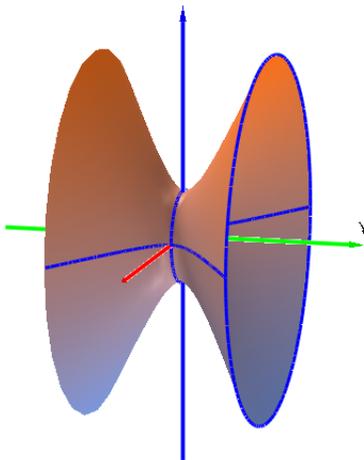


Figura 75

Los hiperboloides de los Ejemplos 91 y 92 son generados por medio de una revolución de la hipérbola dada por (1.2) ya sea alrededor de su eje transversal (Figura 74) o de su eje conjugado (Figura 75). Si pensamos en la hipérbola conjugada de (1.2) obtenemos la ecuación

$$(1.5) \quad -\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

y al girarla sobre su eje transversal obtendríamos el hiperboloide de dos mantos con ecuación

$$(1.6) \quad -\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$$

y si la revolución es respecto al eje conjugado el hiperboloide resultante sería de un manto con ecuación

$$(1.7) \quad -\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1.$$

Así como obtuvimos la ecuación de la hipérbola conjugada igualando (1.2) a -1 para así tener (1.5), el hiperboloide de dos mantos dado por (1.3) tiene por hiperboloide conjugado el de un manto cuya ecuación es (1.7). Cada uno de estos hiperboloides es el conjugado del otro. Ocurre exactamente lo mismo con los hiperboloides (1.4) y (1.6).

EJEMPLO 93. Partiendo ahora de la elipse con ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

al hacerlo girar alrededor de uno de sus ejes de tal suerte que cada uno de los puntos de la elipse recorran una circunferencia se producen esferoides con ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

si el eje de giro es el semieje mayor. En este caso las trazas $y = 0$ y $x = 0$ son la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

y la circunferencia

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

respectivamente. Cuando el giro es alrededor del semieje menor, el esferoide tiene por ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1.$$

Si los puntos de la curva original al girar recorren una elipse se produce una superficie con ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

La Figura 76 muestra un elipsoide con los valores $a = 8$, $b = 6$ y $c = 4$.

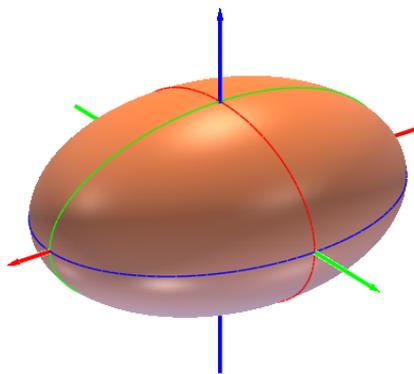


Figura 76

EJEMPLO 94. La superficie con ecuación $z = x^2 - y^2$ tiene por trazas las rectas $x \pm y$ para $z = 0$, las parábolas $z = x^2$ y $z = -y^2$ para $y = 0$ y $x = 0$ respectivamente. Los cortes transversales hechos por los planos $x = x_0$ y $y = y_0$ son parábolas en el espacio con ecuaciones $z = x_0^2 - y^2$ para el primer caso y $z = x^2 - y_0^2$ para el segundo. Al cortar la superficie con el plano $z = z_0$ la curva de intersección es la hipérbola rectangular

$$\frac{x^2}{z_0} - \frac{y^2}{z_0} = 1.$$

Esta superficie suele llamarse la silla de montar por obvias razones, aunque un nombre más técnico sería *hiperboloide parabólico* o *paraboloide hiperbólico*.

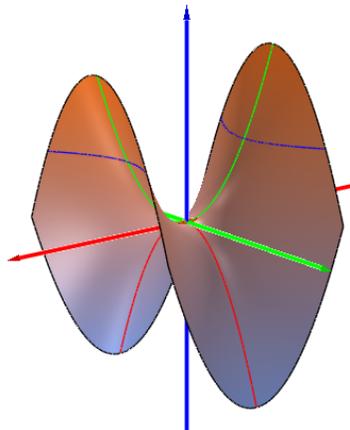


Figura 77

2. Superficies cilíndricas

Comencemos con el conocido cilindro circular recto. Esta superficie puede ser generada por una circunferencia situada en un plano que al ser trasladada de manera paralela a una recta perpendicular al plano, recta que llamaremos *eje de traslación*, produce siempre el mismo corte transversal por planos paralelos al original. Esta misma superficie puede generarse también por una recta perpendicular al plano y que intersecta al plano en un punto de la curva. Al recorrer este punto de intersección la curva en el plano se genera el cilindro. La recta suele llamarse *regla* y es por ello que a una **superficie cilíndrica** se le denominan *superficie reglada*, pero este tipo de superficies no son las únicas superficies regladas: la silla de montar y los hiperboloides de un manto son también superficies regladas.

EJEMPLO 95. *Dada la circunferencia*

$$x^2 + z^2 = 4$$

que se localiza en el plano coordenado XZ , podemos considerar también que es la ecuación del cilindro recto con eje sobre el eje Y . Esta ecuación deja sin restricción a la variable y . De manera más general, si una curva en uno de los planos coordenados se traslada de manera paralela al eje perpendicular al plano, se produce lo que llamaremos una *superficie cilíndrica*. Al igual que en los planos, la variable correspondiente al eje de traslación no aparece en la ecuación. Las Figuras 78 y 79 muestran un cilindro circular recto producido por una circunferencia en el plano XZ y un cilindro parabólico que se genera por la parábola $x = y^2$ al ser ésta trasladada de manera paralela al eje Z .

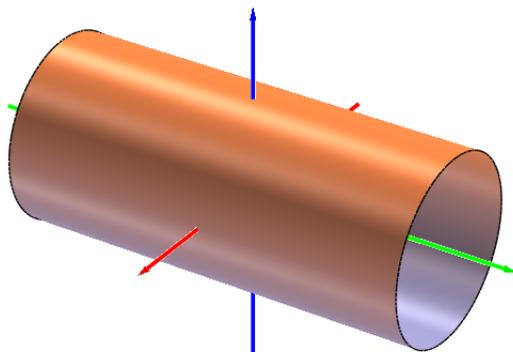


Figura 78

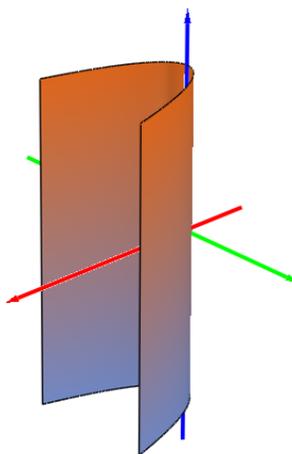


Figura 79

En las superficies cilíndricas los cortes transversales son siempre rectas cuando el plano de corte es paralelo al eje de traslación y si el plano de corte es perpendicular a este eje, la sección transversal será *una copia* de la curva trazada sobre el plano de corte.

3. Sistemas de coordenadas: cilíndricas y esféricas

De manera análoga al caso bidimensional, en el espacio también podemos determinar un punto en diferentes sistemas de coordenadas. Comencemos con las **coordenadas cilíndricas**. La ecuación

$$(3.1) \quad x^2 + y^2 = r^2$$

que apareció en las coordenadas polares, al considerarla como la ecuación de una superficie, se trata del cilindro circular recto con eje sobre el eje Z y radio r .

Sea ahora pues $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. El sistema de coordenadas cilíndricas considera a este punto sobre el cilindro (3.1). El punto $P_0 = (x, y, 0)$ es la intersección de la recta que pasa por P y es paralela al eje Z con el plano XY . De esta manera se sugiere relacionar las coordenadas rectangulares x, y y z de P con r, θ y z por medio de las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ z &= z. \end{aligned}$$

De manera inversa tenemos las ecuaciones válidas para $x \neq 0$

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \begin{cases} \tan^{-1} \frac{y}{x}, & x, y > 0; \\ \tan^{-1} \frac{y}{x} \pm \pi, & x < 0, y > 0; \\ \tan^{-1} \frac{y}{x} \pm \pi, & x, y < 0; \\ \tan^{-1} \frac{y}{x}, & x > 0, y < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

y si $x = 0$, entonces $\theta = \pm \frac{1}{2}\pi$ según sea el signo de y . La coordenada z es invariante respecto a las coordenadas cilíndricas.

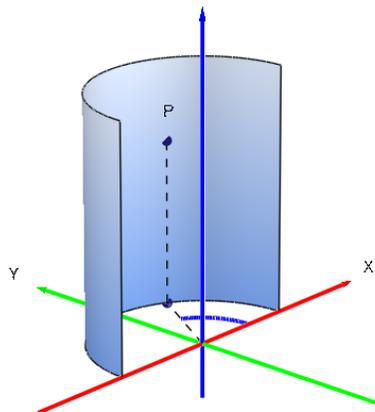


Figura 80

EJEMPLO 96. El punto en rectangulares $P = (3, -\sqrt{3}, 2)$ tiene por coordenadas cilíndricas $P = (2\sqrt{3}, -\frac{1}{6}\pi, 2)$. De manera similar encontramos que el punto en coordenadas cilíndricas $Q = (4, \frac{1}{3}\pi, -5)$ se transforma en coordenadas rectangulares en la terna $Q = (2, 2\sqrt{3}, -5)$.

Algunas superficies cuadráticas quedan representadas por una ecuación mucho más simple si empleamos coordenadas cilíndricas.

EJEMPLO 97. El paraboloido circular con ecuación $z = Ax^2 + Ay^2$ en coordenadas cilíndricas es simplemente $z = Ar^2$. Del mismo modo, la ecuación en coordenadas cilíndricas $z^2 = Ar^2$ es el cono doble con ecuación rectangular

$$Ax^2 + Ay^2 - z^2 = 0$$

(ver el Ejercicio 248).

EJEMPLO 98. De manera análoga a los planos paralelos a los planos coordenados $x = x_0$ y $y = y_0$ y $z = z_0$, en coordenadas cilíndricas tenemos que cuando las variables r , θ y z son constantes, se producen superficies. El caso $z = z_0$ es el mismo que en coordenadas rectangulares. Para $r = r_0$ resulta que se trata del cilindro de radio r_0 y eje sobre el eje Z . La superficie $\theta = \theta_0$ es un semiplano que conforma un ángulo con el semiplano XZ con $x > 0$ de θ_0 . La Figura 81 muestra las superficies $r = 2$ y $\theta = \frac{1}{3}\pi$.

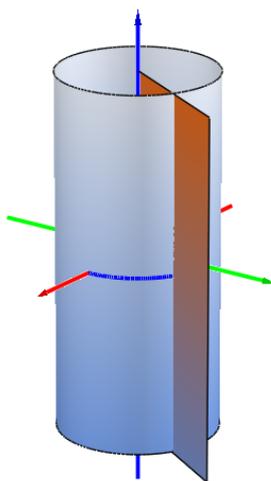


Figura 81

Para construir las **coordenadas esféricas**, consideremos el radiovector $\mathbf{p} = (x, y, z)$, el cual formará un ángulo φ con el eje $+z$; este ángulo será una coordenada esférica. Designemos $\rho = \|\mathbf{p}\|$. Con ello tenemos otra coordenada esférica y

$$(3.2) \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

De trigonometría elemental sabemos que

$$(3.3) \quad z = \rho \cos \varphi.$$

Ahora bien, observando la Figura 82 notamos que podemos pensar en el punto $P_0 = (x, y, 0)$, que al igual que en coordenadas cilíndricas se obtiene de intersectar la recta que pasa por P y es paralela al eje Z con el plano XY , como el radiovector con dirección θ y magnitud $\rho \sin \varphi$; por ello tenemos las siguientes ecuaciones

$$(3.4) \quad \begin{aligned} x &= \rho \cos \theta \sin \varphi \\ y &= \rho \sin \theta \sin \varphi. \end{aligned}$$

Las coordenadas esféricas de $P = (x, y, z)$ son (ρ, θ, φ) . Se relacionan por medio de las ecuaciones (3.2), (3.3) y (3.4). Para obtener los valores de θ y de φ a partir de las rectangulares se emplean generalmente las funciones \cos^{-1} y \sin^{-1} . Es importante notar que con los rangos $\rho \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq \pi$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$ podemos cubrir cualquier punto del espacio tridimensional.

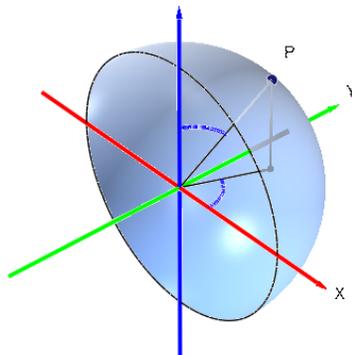


Figura 82

OBSERVACIÓN 20. Se emplea ρ para las coordenadas esféricas a fin de distinguirlo del r de las coordenadas polares. Asimismo, a θ le llamaremos a partir de ahora **ángulo polar** mientras que a φ suele llamársele **ángulo azimutal** (o acimutal); esto último es común en el argot de la astronomía.

EJEMPLO 99. Se da el punto en coordenadas rectangulares

$$P = \left(\frac{3}{2}\sqrt{3}, -\frac{3}{2}, \sqrt{3} \right).$$

Con ello encontramos que

$$\rho^2 = \frac{27}{4} + \frac{9}{4} + 3 = 12.$$

Así, de acuerdo con (3.3), $\cos \varphi = \frac{1}{2}$, por ende $\varphi = \frac{1}{3}\pi$. Finalmente, empleando (3.4) calculamos que $\sin \theta = -\frac{1}{2}$ por lo que $\theta = -\frac{1}{6}\pi$. En coordenadas esféricas se trata del punto $P = \left(\sqrt{12}, -\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi \right)$.

Recíprocamente, dado en coordenadas esféricas $Q = \left(2\sqrt{5}, \frac{1}{4}\pi, \frac{2}{3}\pi \right)$ encontramos fácilmente que el punto en coordenadas rectangulares es $Q = \left(\frac{1}{2}\sqrt{30}, \frac{1}{2}\sqrt{30}, -\sqrt{5} \right)$.

Las superficies que surgen de hacer constantes las variables de las coordenadas esféricas son sencillas de visualizar. Para el caso de $\rho = \rho_0$ se trata simplemente de la esfera de centro en el origen y radio ρ_0 . La superficie $\theta = \theta_0$ es exactamente la misma que en el caso de las coordenadas polares. Sea ahora la superficie dada en coordenadas esféricas por $\varphi = \varphi_0$. Así que

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \theta \sin \varphi_0 \\y &= \rho \sin \theta \sin \varphi_0 \\z &= \rho \cos \varphi_0.\end{aligned}$$

Con ello podemos ver que los puntos de esta superficie cumplen con la ecuación rectangular

$$z^2 = \frac{x^2 + y^2}{\tan^2 \varphi_0}$$

que es de la forma $z^2 = A(x^2 + y^2)$, es decir, es un cono con vértice en el origen y eje sobre el eje Z . No se generan de este modo ambos conos, sino únicamente el que corresponde al signo de $\cos \varphi_0$. Ver el Ejemplo 97.

EJEMPLO 100. *El elipsoide con ecuación rectangular $x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$ tiene su equivalente en coordenadas esféricas la ecuación $\rho^2 (1 + 3 \cos^2 \varphi) = 16$. El paraboloides de un manto cuya ecuación rectangular es $x^2 + y^2 - z^2 = 25$ se puede representar en coordenadas cilíndricas como $r^2 = z^2 + 25$.*

4. Curvas en el espacio

Ya con anterioridad hemos presentado ecuaciones paramétricas para ciertas curvas en \mathbb{R}^2 . Retomemos algunas de ellas a manera de ejemplos introductorios para esta Sección.

EJEMPLO 101. *Las ecuaciones paramétricas*

$$(R \cos t, R \sin t)$$

son las coordenadas $x(t)$ y $y(t)$ de un punto que satisfacen

$$x(t)^2 + y(t)^2 = R^2,$$

es decir, la circunferencia de radio R y centro en el origen. Cuando el parámetro t se confina a $-\pi < t \leq \pi$ o bien a $0 \leq t < 2\pi$, el punto realiza una revolución; sin embargo, para $t \in \mathbb{R}$, el punto completará infinidad de revoluciones.

EJEMPLO 102. *Sean ahora las ecuaciones paramétricas*

$$(a \cos t, b \sin t).$$

con $a > b > 0$. En este caso resulta que

$$\frac{x(t)^2}{a^2} + \frac{y(t)^2}{b^2} = 1$$

y el lugar geométrico es una elipse.

EJEMPLO 103. *Ahora tenemos las ecuaciones*

$$(a \sec t, b \tan t)$$

con $a > 0$ y $b > 0$, donde $-\frac{1}{2}\pi < t < \frac{1}{2}\pi$. De acuerdo con la identidad trigonométrica $\sec^2 t = \tan^2 t + 1$ y debido a que para estos valores del parámetro $\sec t > 0$, resulta que el lugar geométrico es la rama de la hipérbola con ecuación ordinaria

$$\frac{x(t)^2}{a^2} - \frac{y(t)^2}{b^2} = 1$$

para $x > 0$. Para la rama donde $x < 0$ podemos considerar las mismas ecuaciones pero con $\frac{1}{2}\pi < t < \frac{3}{2}\pi$ o bien las ecuaciones paramétricas

$$(-a \sec t, b \tan t)$$

para $-\frac{1}{2}\pi < t < \frac{1}{2}\pi$.

El siguiente ejemplo muestra que diferentes ecuaciones paramétricas describen el mismo lugar geométrico.

EJEMPLO 104. *Consideremos las ecuaciones paramétricas*

$$(t, 12t - t^2 - 27)$$

para $2 \leq t \leq 10$. Con estas ecuaciones es sencillo detectar que como $x = t$, resulta que $y = 12x - x^2 - 27$. Se trata pues de la parábola $y - 9 = -(x - 6)^2$ con vértice $V = (6, 9)$, Foco en $F = (6, \frac{35}{4})$ y directriz la recta $\mathcal{D} : y = \frac{37}{4}$.

Si hacemos $x(t) = 2t + 3$, entonces es inmediato que ahora $y(t) = 12t - 4t^2$ y estas ecuaciones paramétricas representarán el mismo segmento de la parábola si nos restringimos a $-\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{7}{2}$. La diferencia entre estas ecuaciones es que dos puntos que se mueven sobre la parábola de acuerdo con estas ecuaciones llevarán diferentes velocidades, pero ello corresponde al tema de Tiro Parabólico en un curso de Física.

En esta última Sección describiremos de manera elemental cómo obtener las ecuaciones paramétricas de una curva ubicada en el espacio. Así como se realizó para el caso de rectas donde las ecuaciones paramétricas eran de la forma dada en (1.1) en la página 66, en esta nueva situación las ecuaciones paramétricas son funciones un poco más generales:

$$\begin{aligned} x(t) &= f(t) \\ y(t) &= g(t) \\ z(t) &= h(t) \end{aligned}$$

donde las funciones f , g y h son polinomios cuadráticos, trigonométricas o bien productos de ambas.

En las secciones anteriores ya hemos presentado curvas en el espacio como las trazas o secciones transversales de las superficies cuadráticas. Estas curvas tuvieron la particularidad de que todos sus puntos pertenecían a un plano. Esto en general no es así.

EJEMPLO 105. *El punto en \mathbb{R}^3 con coordenadas*

$$(2 \cos(t), 0, 2 \sin(t))$$

satisface la condición

$$x(t)^2 + z(t)^2 = 4.$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Es decir, se localiza en la circunferencia $x^2 + z^2 = 4$ que es la que genera el cilindro del Ejemplo 95. Por ello, cuando el parámetro t toma valores en la recta real, el

punto recorre de manera periódica la circunferencia. Ahora hagamos la modificación en $y(t)$ para tener el punto

$$\left(2 \cos(t), \frac{1}{2\pi}t, 2 \sin(t) \right).$$

En esta ocasión, conforme t toma los valores desde 0 hasta 2π , el punto completa una revolución pero la coordenada y crece desde 0 hasta 1. Este comportamiento es periódico en x y z mientras que en y el punto puede proceder desde $-\infty$ hasta $+\infty$, generándose así una curva llamada **héllice** (ver la Figura 83). Escribimos las ecuaciones paramétricas de la curva de la forma

$$\alpha(t) = \left(2 \cos(t), \frac{1}{2\pi}t, 2 \sin(t) \right).$$

Localizamos así algunos puntos de la curva, como

$$\begin{aligned} \alpha(-2\pi) &= (2, -1, 0), \\ \alpha(-\pi) &= \left(-2, -\frac{1}{2}, 0\right), \\ \alpha(0) &= (2, 0, 0), \\ \alpha\left(\frac{1}{2}\pi\right) &= \left(0, \frac{1}{4}, 2\right), \\ \alpha\left(\frac{3}{2}\pi\right) &= \left(0, \frac{3}{4}, -2\right), \\ \alpha(2\pi) &= (2, 1, 0). \end{aligned}$$

Todos ellos sobre el cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

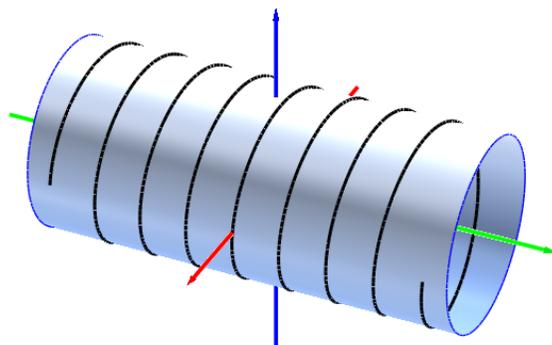


Figura 83

EJEMPLO 106. La curva con ecuaciones paramétricas

$$\alpha(t) = (4t^2, 2t, 3 \sin(3t))$$

satisface la ecuación $x = y^2$. Por ello todos sus puntos están sobre el cilindro parabólico del Ejemplo 95 con la salvedad de que la coordenada $z(t)$ oscilará de manera periódica entre los valores -3 y 3 . La Figura 84 exhibe un tramo de esta curva.

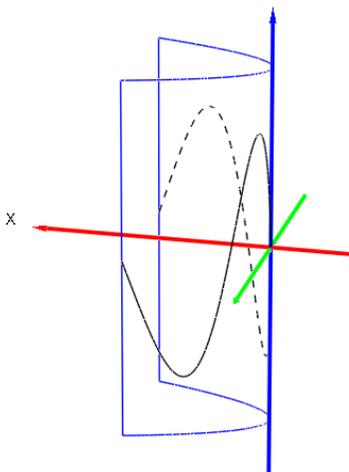


Figura 84

5. Ejercicios

EJERCICIO 237. Obtenga una ecuación para las siguientes superficies de revolución según sea la cónica que gira alrededor del eje indicado:

1. La parábola $5x = z^2$ alrededor del eje X .
2. La parábola $8y = z^2$ alrededor del eje Y .
3. La elipse

$$\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$$

alrededor de su eje menor.

4. La elipse

$$\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$$

alrededor de su eje mayor.

5. La hipérbola

$$\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$$

alrededor de su eje transverso.

6. La hipérbola

$$\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$$

alrededor de su eje conjugado.

EJERCICIO 238. *Construya la gráfica apoyándose en trazas y cortes transversales de la superficie con ecuación*

$$x = \frac{1}{2}y^2 - z^2.$$

EJERCICIO 239. *Construya la gráfica apoyándose en trazas y cortes transversales de la superficie con ecuación*

$$y = 2x^2 - z^2.$$

EJERCICIO 240. *Construya la gráfica apoyándose en trazas y cortes transversales de la superficie con ecuación*

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} - z^2 = 1.$$

EJERCICIO 241. *Construya la gráfica apoyándose en trazas y cortes transversales de la superficie con ecuación*

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{4} = 1.$$

EJERCICIO 242. *Construya la gráfica apoyándose en trazas y cortes transversales de la superficie con ecuación*

$$-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{4} = 1.$$

EJERCICIO 243. *Construya la gráfica apoyándose en trazas y cortes transversales de la superficie con ecuación*

$$x = 3x^2 - 2y^2.$$

EJERCICIO 244. *Construya la gráfica apoyándose en trazas y cortes transversales de la superficie con ecuación*

$$y = z^2 - \frac{1}{4}x^2.$$

EJERCICIO 245. *Construya la gráfica apoyándose en trazas y cortes transversales de la superficie con ecuación*

$$-\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{4} = 1.$$

EJERCICIO 246. *Construya la gráfica apoyándose en trazas y cortes transversales de la superficie con ecuación*

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{6} = 1.$$

EJERCICIO 247. *Construya la gráfica apoyándose en trazas y cortes transversales de la superficie con ecuación*

$$-\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1.$$

EJERCICIO 248. *Considerando los hiperboloides conjugados*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = \pm 1,$$

explique cómo es que los conos asintóticos se generan al girar las rectas asintóticas de las hipérbolas conjugadas

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = \pm 1$$

alrededor del eje X . Deduzca que las ecuaciones de los conos circulares son

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0.$$

EJERCICIO 249. Construya las gráficas de las siguientes superficies cilíndricas según sea la cónica generadora y el eje del cilindro:

1. La parábola $3y = z^2$, eje X .
2. La parábola $z = 2x^2$, eje Y .
3. La elipse $4x^2 + 12z^2 = 12$, eje Y .
4. La hipérbola $y^2 - 9z^2 = 9$, eje X .
5. La parábola $y = 2x^2$, eje Z .
6. La elipse $3y^2 + 9z^2 = 18$, eje X .
7. La hipérbola $3x^2 - z^2 = 9$, eje Y .

EJERCICIO 250. Calcule las coordenadas cilíndricas de los siguientes puntos dados en coordenadas rectangulares:

$$P_1 = (1, 1, 1), \quad P_2 = (-\sqrt{32}, -\sqrt{32}, 2), \quad P_3 = (5, -\sqrt{75}, 1),$$

$$P_4 = \left(-\frac{\sqrt{48}}{2}, 2, -4\right), \quad P_5 = \left(-\frac{\sqrt{27}}{2}, -\frac{3}{2}, 5\right), \quad P_6 = \left(\frac{\sqrt{50}}{2}, -\frac{\sqrt{50}}{2}, \frac{21}{4}\right).$$

EJERCICIO 251. Calcule las coordenadas rectangulares de los siguientes puntos dados en coordenadas cilíndricas:

$$P_1 = \left(2, \frac{1}{3}\pi, 1\right), \quad P_2 = \left(4, \frac{4}{3}\pi, -2\right), \quad P_3 = \left(15, \frac{3}{2}\pi, 6\right),$$

$$P_4 = \left(3, \frac{2}{3}\pi, -4\right), \quad P_5 = \left(\frac{27}{2}, \frac{3}{4}\pi, -5\right), \quad P_6 = \left(4, \frac{5}{3}\pi, \frac{2}{3}\right).$$

EJERCICIO 252. Calcule las coordenadas esféricas de los siguientes puntos dados en coordenadas rectangulares:

$$P_1 = (1, 1, 1), \quad P_2 = (\sqrt{5}, 2, 4), \quad P_3 = (-2, \sqrt{3}, 2),$$

$$P_4 = (3, 4, 5), \quad P_5 = (\sqrt{2}, \sqrt{6}, -\sqrt{8}), \quad P_6 = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, 3\right).$$

EJERCICIO 253. Calcule las coordenadas rectangulares de los siguientes puntos dados en coordenadas esféricas:

$$P_1 = \left(3\sqrt{3}, \frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi\right), \quad P_2 = \left(2\sqrt{6}, \frac{5}{4}\pi, \frac{1}{3}\pi\right), \quad P_3 = \left(5, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{6}\pi\right),$$

$$P_4 = \left(\sqrt{5}, \frac{2}{3}\pi, \frac{1}{6}\pi\right), \quad P_5 = \left(10, -\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi\right), \quad P_6 = \left(5\sqrt{2}, \frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi\right).$$

EJERCICIO 254. Obtenga ecuaciones equivalentes en coordenadas cilíndricas y esféricas para las siguientes ecuaciones:

$$a)x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad b)x^2 + y^2 + z^2 = 2x,$$

$$c)x^2 + y^2 = 9z, \quad d)x^2 + y^2 - z^2 = -1.$$

EJERCICIO 255. Demuestre que la curva con ecuación paramétrica $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ está sobre la superficie indicada:

1. $\alpha(t) = (2 \cos t, \sin t, 4 \cos 2t)$, $z = x^2 - y^2$.
2. $\alpha(t) = (\frac{1}{4}t^2 + 4t, 2 + t, \frac{1}{16}t^4 + \frac{1}{2}t^3 - 4t - 4)$, $z = x^2 - y^2$.
3. $\alpha(t) = (t, t, \sqrt{2t^2 - 1})$ donde $|t| \geq \frac{1}{2}$, $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.
4. $\alpha(t) = (t \cos t, t \sin t, \sqrt{t^2 - 1})$ donde $|t| \geq 1$, $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.
5. $\alpha(t) = (5 \cos t \sin \frac{1}{4}t, 5 \sin t \sin \frac{1}{4}t, 5 \cos \frac{1}{4}t)$, $x^2 + y^2 + z^2 = 5$.
6. $\alpha(t) = (5 \cos t \sin \varphi_0, 5 \sin t \sin \varphi_0, 5 \cos \varphi_0)$ donde $0 < \varphi_0 < \pi$ es fijo, $x^2 + y^2 + z^2 = 5$.
Esta curva es un paralelo.
7. $\alpha(t) = (5 \cos \theta_0 \sin t, 5 \sin \theta_0 \sin t, 5 \cos t)$ donde $0 \leq \theta_0 < 2\pi$ es fijo, $x^2 + y^2 + z^2 = 5$.
Esta curva es un meridiano.
8. $\alpha(t) = (t \cos t, t \sin t, t)$, $z^2 = x^2 + y^2$. Esta curva se denomina hélice cónica.
9. $\alpha(t) = (t \cos t, t \sin t, t^2)$, $z = x^2 + y^2$.

Enseguida trace la curva sobre la superficie.

Bibliografía

- [Lehmann] Analytic Geometry, Lehmann, Charles, John Wiley and Sons, 1942.
- [Murdoch] Analytic Geometry with an Introduction to Vectors and Matrices, Murdoch, David, John Wiley and Sons, 1967.
- [Wexler] Analytic Geometry: A Vector Approach, Wexler, Charles, Addison-Wesley Publishing Company, 1964.
- [Wooton] Modern Analytic Geometry, Wooton William, Beckenbach, Edwin, Fleming Frank, Houghton Mifflin Company, 1972.

Índice alfabético

- abscisa al origen, 52
- abscisas, 1
- alturas, 63
- ángulo azimutal, 167
- ángulo polar, 167
- ángulos directores, 13
- anticonmutatividad, 32
- asíntotas, 111

- bisectrices, 55

- cónicas homofocales, 127
- centro de la elipse, 103
- centro de la hipérbola, 109
- circunferencia, 90
- circunferencia circunscrita, 121
- circunferencia exinscrita, 122
- circunferencia inscrita, 121
- combinación lineal, 26
- componente vectorial, 27
- componentes canónicas, 24
- componentes escalares, 26
- coordenadas cilíndricas, 165
- coordenadas esféricas, 166
- coordenadas polares, 129
- coordenadas rectangulares, 1
- cosenos directores, 14
- cuerda, 93, 101, 106, 113
- cuerda focal, 101, 106, 113

- determinante 2×2 , 31
- determinante 3×3 , 35
- descomposición canónica, 24
- desigualdad de Cauchy-Schwartz, 21
- desigualdad del triángulo, 10
- diámetro, 93, 106, 113
- directriz de la elipse, 115
- directriz de la hipérbola, 116
- directriz de la parábola, 98
- discriminante, 135

- ecuación cartesiana, 46, 70
- ecuación cartesiana ordinaria, 52, 71, 92, 99, 105, 111
- ecuación general, 92, 99, 105, 111
- ecuación normal, 63, 87
- ecuación ordenada al origen, 52
- ecuación polar, 138
- ecuación polar ordinaria, 149
- ecuación punto pendiente, 51
- ecuación vectorial, 45, 70
- ecuaciones paramétricas, 45, 70
- ecuaciones simétricas, 46, 66
- eje conjugado, 113
- eje de la parábola, 98
- eje focal, 106, 113
- eje mayor, 106
- eje menor, 106
- eje polar, 136
- eje radical, 122
- eje transversal, 113
- elipse, 91, 103
- elipsoide, 157
- esferoide, 157
- excentricidad, 115

- foco de la parábola, 98
- focos de la elipse, 103
- focos de la hipérbola, 109

- hélice, 170
- hipérbola, 91, 109
- hipérbolas conjugadas, 112
- hiperboloide, 157

- identidad de Lagrange, 41

- lado recto, 101, 106, 113
- lugar geométrico, 89

- múltiplo escalar, 6
- matriz, 36
- matriz aumentada, 77
- medianas, 60
- mediatrices, 60

norma, 9

ordenada al origen, 52

ordenadas, 1

parábola, 90, 98

parámetro, 44

paraboloide, 157

pendiente, 49

plano cartesiano, 1

plano polar, 136

polo, 136

producto cruz, 30

producto escalar, 16

producto interior, 16

producto punto, 16

producto vectorial, 30

proyección ortogonal, 27

puntos colineales, 60

quinto postulado de Euclides, 43

radián, 11

radio focal, 101, 106, 113

radiovector, 3

recta secante, 93, 101, 107

recta tangente, 93, 101, 107

rectas coplanares, 68

rotación de ejes, 129

secciones cónicas, 90

superficie cónica, 157

superficie cilíndrica, 163

superficies de revolución, 157

Teorema de Pitágoras, 38

Teorema de Tales, 38

trazas, 83, 158

triple producto escalar, 35

vector, 2

vector de dirección, 44

vector normal, 49, 70

vector nulo, 8

vector unitario, 23

vectores coplanares, 80

vectores unitarios canónicos, 24

vértice de la parábola, 98