



ANÁLISIS DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS DE CORRIENTE DIRECTA

CIENCIAS BÁSICAS

textosuniversitarios

Luis Alejandro Flores Oropeza

**ANÁLISIS DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS
DE CORRIENTE DIRECTA**

ANÁLISIS DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS DE CORRIENTE DIRECTA

Luis Alejandro Flores Oropeza



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
DE AGUASCALIENTES

Análisis de circuitos eléctricos de corriente directa

Primera edición 2023

Universidad Autónoma de Aguascalientes
Av. Universidad No. 940
Ciudad Universitaria
C.P. 20100, Aguascalientes, Ags.
editorial.uaa.mx
libros.uaa.mx

Luis Alejandro Flores Oropeza

ISBN 978-607-8909-69-8

Hecho en México / *Made in Mexico*



Agradecimientos

Antes que nada, quiero agradecer a mi esposa y a mis hijos, quienes siempre están para mí pase lo que pase y haga lo que haga, gracias por su apoyo y paciencia en todo lo que emprendo.

Gracias a los compañeros que leyeron el trabajo y dieron su aprobación para que lo pudiera presentar, gracias por sus comentarios y consejos.

Por supuesto, gracias a la Universidad Autónoma de Aguascalientes, por contar con este tipo de apoyos para hacer que el conocimiento pueda trascender y dar luz a quien la necesita.

Gracias al Departamento Editorial, ya que sin su apoyo y experiencia esto no se hubiera logrado. Quiero agradecer de forma especial a la Maestra Martha Esparza y a Rubén Rodríguez, porque fueron el eslabón entre el sueño que un día tuve y que hoy es una realidad, gracias de verdad.

También quiero agradecer a mi fiel acompañante de mañana, tarde y noche, ya que desde que comencé a escribir la primera y hasta la última línea de este trabajo siempre estuvo a mi lado, gracias, Puka, allá en el cielo de los perros.

LAFO.

alejandro.floreso@edu.uaa.mx

Índice

11 **Introducción**

CAPÍTULO 1

13 **Definiciones y unidades**

- 15 Circuito eléctrico
- 16 Sistema de unidades
- 18 Carga y corriente eléctrica
- 20 Tensión, voltaje o diferencia de potencial
- 23 Potencia
- 25 Convención de signos pasiva
- 31 Elementos pasivos
- 46 Elementos activos
- 47 Sugerencias antes de comenzar a resolver un circuito eléctrico
- 48 Referencias del capítulo

CAPÍTULO 2

49 **Resistencias y ley de Ohm**

- 51 Introducción
- 51 Resistencias en serie
- 55 Resistencias en paralelo
- 62 Resistencias en conexión mixta
- 67 Ley de Ohm
- 68 Ley de Ohm y potencia
- 69 Ley de Ohm y circuitos simples
- 76 Circuitos en serie y sus características
- 81 Circuitos en paralelo y sus características
- 85 Circuitos en conexión mixta y sus características
- 95 Resistencias conectadas en estrella y delta
- 105 Problemas propuestos
- 117 Referencias del capítulo

CAPÍTULO 3

119 **Divisor de tensión, divisor de corriente y leyes de Kirchhoff**

- 121 Introducción
- 121 Nodos, ramas y trayectorias cerradas
- 124 Fuentes de voltaje y fuentes de corriente en serie y en paralelo
- 126 Divisor de voltaje y divisor de corriente
- 131 Leyes de Kirchhoff
- 143 Circuitos con fuentes dependientes
- 165 Referencias del capítulo

CAPÍTULO 4

| | |
|-----|--|
| 167 | Análisis de circuitos eléctricos con mallas |
| 169 | Introducción a las técnicas de análisis de circuitos |
| 171 | Análisis de mallas |
| 172 | Mallas con fuentes de voltaje |
| 191 | Mallas con fuentes de corriente |
| 195 | Fuente de corriente y supermalla |
| 206 | Circuitos con mallas y fuentes dependientes |
| 216 | Corrientes de malla con distintas direcciones |
| 223 | Resumen y conclusión del capítulo |
| 224 | Problemas propuestos |
| 233 | Referencias del capítulo |

CAPÍTULO 5

| | |
|-----|---|
| 235 | Análisis de circuitos eléctricos con nodos |
| 237 | Introducción al análisis con nodos |
| 239 | Nodos con fuentes de voltaje |
| 259 | Nodos con fuentes de corriente |
| 271 | Fuente de voltaje y supernodo |
| 282 | Circuitos con nodos y fuentes dependientes |
| 292 | Resumen y conclusión del capítulo |
| 293 | Problemas propuestos |
| 300 | Referencias del capítulo |

CAPÍTULO 6

| | |
|-----|---|
| 303 | Linealidad y superposición |
| 305 | Introducción |
| | Análisis de circuitos utilizando el principio |
| 308 | de superposición |
| | ¿Cuándo es conveniente aplicar el principio |
| 324 | de superposición? |
| 328 | Resumen y conclusión |
| 328 | Problemas propuestos |
| 331 | Referencias del capítulo |

CAPÍTULO 7

| | |
|-----|---|
| 333 | Transformación de fuentes |
| 335 | Introducción |
| | Consideraciones generales para utilizar correctamente |
| 337 | la transformación de fuentes |
| | Análisis de circuitos utilizando la transformación |
| 338 | de fuentes |
| | ¿Cuándo no es posible aplicar la transformación |
| 355 | de fuentes? |
| 355 | Resumen y conclusión |
| 356 | Problemas propuestos |
| 359 | Referencias del capítulo |

CAPÍTULO 8

| | |
|-----|--|
| 361 | Teorema de Thévenin y teorema de Norton |
| 363 | Introducción |
| 364 | Teorema de Thévenin |
| | Análisis de circuitos eléctricos utilizando el teorema |
| 366 | de Thévenin |
| 395 | Teorema de Norton |
| | Análisis de circuitos eléctricos utilizando el teorema |
| 398 | de Norton |

| | |
|-----|--|
| 409 | Teorema de Thévenin vs teorema de Norton |
| 409 | Resumen y conclusión |
| 410 | Problemas propuestos |
| 418 | Referencias del capítulo |

CAPÍTULO 9

Teorema de máxima transferencia de potencia

| | |
|-----|---|
| 419 | Introducción |
| 421 | Teorema de Jacobi o de máxima transferencia de potencia |
| 422 | Teorema de máxima transferencia de potencia y teorema de Thévenin |
| 424 | Máxima transferencia de potencia a una carga vs máxima potencia absorbida de una fuente |
| 425 | Aplicaciones del teorema de máxima transferencia de potencia |
| 427 | Análisis de circuitos utilizando el teorema de máxima transferencia de potencia |
| 428 | Resumen y conclusión |
| 442 | Problemas propuestos |
| 443 | Referencias del capítulo |

CAPÍTULO 10

Análisis de circuitos RL y RC

| | |
|-----|--|
| 447 | Introducción |
| 449 | Función escalón unitario |
| 449 | Función pulso rectangular |
| 451 | Funcionamiento permanente del inductor y capacitor con corriente y voltaje constantes |
| 455 | Funcionamiento inicial del inductor y capacitor con corriente y voltaje constantes |
| 457 | Corriente inicial y permanente para circuitos con resistencias, inductores y capacitores |
| 459 | Condiciones iniciales de corriente y voltaje |
| 463 | Accionamiento del circuito RC |
| 464 | Análisis y solución de circuitos RC |
| 468 | Resumen de ecuaciones para el circuito RC |
| 484 | Accionamiento del circuito RL |
| 484 | Análisis y solución de circuitos RL |
| 489 | Resumen de ecuaciones para el circuito RL |
| 502 | Resumen y conclusión |
| 503 | Problemas propuestos |
| 504 | Referencias del capítulo |

CAPÍTULO 11

Introducción al transistor BJT

| | |
|-----|---|
| 507 | Introducción |
| 509 | Transistor BJT |
| 509 | Funcionamiento del transistor BJT |
| 510 | El transistor BJT como fuente de corriente controlada por corriente |
| 511 | Análisis de circuitos con transistor BJT |
| 512 | Resumen y conclusión |
| 521 | Problemas propuestos |
| 522 | Referencias del capítulo |

INTRODUCCIÓN

Si quieres aprender, enseña
Marco Tulio Cicerón (106 – 43 A.C.)

Después de impartir la materia de circuitos eléctricos por más de siete años, y habiendo revisado múltiples referencias en las que se exponen los temas de esta área, me di cuenta de que son pocos los autores que se preocupan por enseñar de una forma clara y sencilla cómo comenzar a resolver cada problema o ejercicio. Y, aun así, en la mayoría de los casos, si el autor o los autores son claros para explicar, normalmente, después de exponer la teoría correspondiente a un tema, utilizan uno o varios ejercicios que se ajustan específicamente al asunto explicado. Ya después cambian de tema y, a la hora de abordar una nueva cuestión, utilizan otros ejemplos que se vuelven a ajustar de la mejor manera al nuevo tema presentado. No digo que esto sea malo, simplemente destaco cómo es que normalmente se encuentran los temas que uno observa al dar inicio con el estudio de los circuitos eléctricos.

Este no es un libro mágico, simplemente es un libro universitario en el que se presenta una forma distinta a las convencionales para explicar las técnicas del análisis de circuitos eléctricos. Los tres primeros capítulos abordan las definiciones y las bases principales que se deben conocer para dar inicio con la electricidad; temas como resistencias, inductores, capacitores, fuentes de corriente y de voltaje –dependientes e independientes–, así como la Ley de Ohm, la Ley de la Potencia y las Leyes de Kirchhoff. De igual manera, el arreglo de resistencias en serie, paralelo, conexión mixta, estrella y delta son estudiadas dentro de los primeros tres capítulos en los que todos los circuitos cuentan únicamente con una fuente de alimentación.

Es a partir del capítulo cuatro y hasta el capítulo ocho donde se da comienzo con las técnicas para el análisis de los circuitos eléctricos. Las técnicas que se explican son: Análisis de Mallas, Análisis de Nodos, Teorema de Linealidad y Superposición, Transformación de fuentes, Teorema de Thévenin y Teorema de Norton. Se resuelven 11 problemas distintos con varias fuentes dependientes

e independientes, tanto de voltaje como de corriente y con las más diversas configuraciones posibles en el arreglo de resistencias.

Del capítulo nueve al once se presenta un complemento de temas necesarios para el estudio de los circuitos eléctricos, los temas son: el Teorema de Máxima Transferencia de Potencia, el Accionamiento de los circuitos RL y RC y, por último, se presenta una introducción al estudio del Transistor de Unión Bipolar o BJT (*Bipolar Junction Transistor*). Además de todo lo anterior, en la mayoría de los capítulos se propone una cantidad considerable de ejercicios, todos con las respuestas, para que pueda ponerse en práctica lo aprendido.

Cabe aclarar que la diferencia que se encontrará en este libro, comparado con cualquier otro, es que todos sus problemas planteados son resueltos con cada una de las técnicas de análisis, lo que hace posible que, a partir de la comparación de los distintos métodos o técnicas, el estudiante pueda establecer cuál o cuáles son las más adecuadas para resolver uno u otro tipo de circuito. Además, cada problema empieza con una explicación clara sobre cómo comenzar a resolver el ejercicio, casi como si yo estuviera aclarando en el aula de clases cómo dar inicio y por qué razón, con cada paso del problema. Otra ventaja que se encontrará en este libro es que no se obvian los procesos para resolver los ejercicios; voy explicando paso a paso qué operaciones se realizaron. Así, un tema normalmente se resuelve matemáticamente por dos o hasta tres maneras distintas, de tal modo que pueda valorarse cuál forma resulta más clara o sencilla para dar con una solución.

Abordar un ejercicio de circuitos eléctricos puede ser una tarea ardua, sobre todo cuando éste se vuelve más complicado. Limitar la resolución de un ejercicio a un único método o análisis quizás cumpla al principio con el propósito de ser una rápida explicación didáctica, pero al final se estará restringiendo la gama de posibilidades a las que el estudiante puede llegar, así como su habilidad deductiva.

El propósito de este libro es ampliar el panorama de opciones, mostrar a los alumnos que existen distintas alternativas con las cuales se puede resolver el mismo circuito eléctrico, de tal modo que se entienda que, como en la vida, hay diversas alternativas con las cuales se puede hacer frente a las adversidades.

Luis Alejandro Flores Oropeza (LAFO).

DEFINICIONES Y UNIDADES

1

CIRCUITO ELÉCTRICO

Un circuito eléctrico es un arreglo de elementos generales, conectados en al menos una trayectoria cerrada, en los que la energía se transfiere y se transforma para poder ser aprovechada. En general, se necesita de al menos un elemento que proporcione energía y otro u otros elementos que la consuman. La forma de conectar estos elementos es mediante hilos, llamados “conductores eléctricos”. De esta manera, un circuito eléctrico es la conexión de elementos en una trayectoria cerrada que proporcionan energía y elementos que la consumen, utilizando conductores eléctricos. En la Figura 1.1 se muestra el aspecto de un elemento general de un circuito y en la Figura 1.2 el aspecto de un circuito eléctrico formado con este tipo de elementos generales unidos mediante conductores eléctricos.



Figura 1.1. Elemento general de un circuito eléctrico.

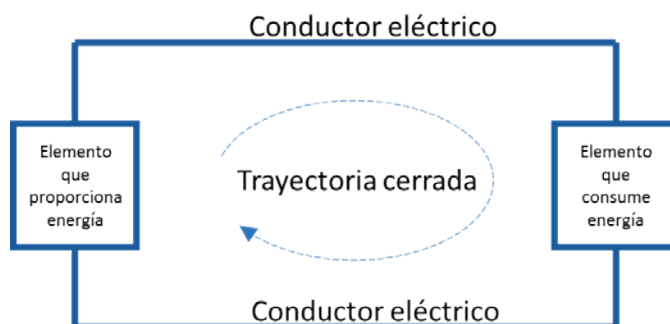


Figura 1.2. Elementos mínimos para la construcción de un circuito eléctrico.

SISTEMA DE UNIDADES

Para comprender los circuitos eléctricos, es necesario conocer y manejar las definiciones y unidades que se utilizan cada vez que se resuelve y analiza un circuito eléctrico. Esto ayuda al estudiante a entender qué hace el circuito, cómo opera y de qué manera se pueden hacer modificaciones para obtener resultados distintos en caso de ser necesario.

Sistema internacional de unidades

El Sistema Internacional de Unidades se fundamenta en siete unidades de medida que corresponden a las magnitudes de longitud, masa, tiempo, corriente eléctrica, temperatura, cantidad de materia, e intensidad luminosa. Estas unidades son conocidas como el metro, el kilogramo, el segundo, el ampere, el kelvin, el mol y la candela, respectivamente. El Sistema Internacional de Unidades también se conoce como el sistema MKS por las iniciales del metro, kilogramo y segundo (Economía, 19 de abril de 2016). En la Tabla 1.1 se muestran las unidades del sistema internacional. A partir de las siete unidades de base se establecen las demás unidades de uso práctico, conocidas como unidades derivadas, asociadas a magnitudes tales como velocidad, aceleración, fuerza, presión, potencia eléctrica, energía, tensión, resistencia eléctrica, etc.

Tabla 1.1. Resumen de unidades en el sistema *internacional* conocido como MKS. Fuente: (Secretaría-de-Economía, 19 de abril de 2016)

| Magnitud | Nombre | Unidad |
|---------------------|-----------|--------|
| Longitud | metro | m |
| Masa | kilogramo | kg |
| Tiempo | segundo | s |
| Corriente eléctrica | ampere | A |
| Temperatura | kelvin | K |
| Cantidad de materia | mol | mol |
| Intensidad luminosa | candela | cd |

Múltiplos y submúltiplos de la unidad

De igual manera, para el manejo de las unidades en los distintos problemas de análisis de circuitos eléctricos, es muy común que sea necesario el manejo de los múltiplos y submúltiplos de la unidad. En la Tabla 1.2 se muestran todos los prefijos que se le pueden colocar a las variables de circuitos eléctricos. Los prefijos más comunes que aparecen en el análisis de estos circuitos son el pico (p), nano (n), micro (μ), mili (m), kilo (k) y mega (M), el resto también se utiliza, pero con menor frecuencia.

Tabla 1.2. Múltiplos y submúltiplos para las unidades en el sistema internacional

| 10^n | Prefijo | Símbolo | Nombre | |
|------------|-------------|---------|-----------------|-----------------------------------|
| 10^{24} | yotta | Y | Cuatrillón | 1 000 000 000 000 000 000 000 000 |
| 10^{21} | zetta | Z | Mil trillones | 1 000 000 000 000 000 000 000 |
| 10^{18} | exa | E | Trillón | 1 000 000 000 000 000 000 |
| 10^{15} | peta | P | Mil billones | 1 000 000 000 000 000 |
| 10^{12} | tera | T | Billón | 1 000 000 000 000 |
| 10^9 | giga | G | Mil millones | 1 000 000 000 |
| 10^6 | mega | M | Millón | 1 000 000 |
| 10^3 | kilo | k | Mil / Millar | 1 000 |
| 10^2 | hecto | h | Centena | 100 |
| 10^1 | deca | da | Decena | 10 |
| 10^0 | Sin prefijo | | Unidad | 1 |
| 10^{-1} | deci | d | Décimo | 0.1 |
| 10^{-2} | centi | c | Centésimo | 0.01 |
| 10^{-3} | mili | m | Milésimo | 0.001 |
| 10^{-6} | micro | μ | Millonésimo | 0.000 001 |
| 10^{-9} | nano | n | Milmillonésimo | 0.000 000 001 |
| 10^{-12} | pico | p | Billonésimo | 0.000 000 000 001 |
| 10^{-15} | femto | f | Milbillonésimo | 0.000 000 000 000 001 |
| 10^{-18} | atto | s | Trillonésimo | 0.000 000 000 000 000 001 |
| 10^{-21} | zepto | z | Miltrillonésimo | 0.000 000 000 000 000 000 001 |
| 10^{-24} | yocto | y | Cuatrillonésimo | 0.000 000 000 000 000 000 000 001 |

Notación científica y notación de ingeniería

La notación científica proporciona un método conveniente para representar números grandes y pequeños y realizar cálculos que implican tales números, mientras que la notación en ingeniería los expresa en valores que son fácilmente identificables para un ingeniero. En notación científica, una cantidad se expresa como el producto de un número situado entre 1 y 10 y una potencia de diez. Por ejemplo, la cantidad 150,000 se expresa en notación científica como 1.5×10^5 , y la cantidad 0.000,22 como 2.2×10^{-4} . La notación de ingeniería es similar a la científica, sin embargo, en notación de ingeniería un número puede tener de uno a tres dígitos a la izquierda del punto decimal y el exponente de potencia de diez debe ser un múltiplo de tres. Por ejemplo, el número 33,000 expresado en notación de ingeniería es 33×10^3 . En notación científica, se expresa como 3.3×10^4 . Como otro ejemplo, el número 0.045 expresado en notación de ingeniería es 45×10^{-3} . En notación científica, se expresa como 4.5×10^{-2} (ArtChist, 2020).

CARGA Y CORRIENTE ELÉCTRICA

Carga eléctrica

Para comprender qué es la carga eléctrica “ q ” o “ Q ” primero debemos mencionar que, de acuerdo con el modelo atómico de Bohr, la materia se encuentra constituida por átomos y que estos a su vez se encuentran formados por tres tipos distintos de partículas subatómicas, los protones y neutrones, que forman el núcleo del átomo, y los electrones, que se encuentran orbitando alrededor del núcleo. En la Figura 1.3 se muestra la estructura del átomo según Bohr y las partículas subatómicas que lo integran. La carga eléctrica de estas partículas se mide en coulombs (representado por la letra mayúscula C) en honor al físico francés Charles Coulomb. Tanto los protones como los electrones tienen el mismo valor de carga eléctrica, $\pm 1.602 \times 10^{-19}$ C sólo que los protones cuentan con carga positiva mientras que los electrones tienen carga negativa. Un átomo normalmente se encuentra con la misma cantidad de protones y electrones por lo que se considera que está eléctricamente neutro.

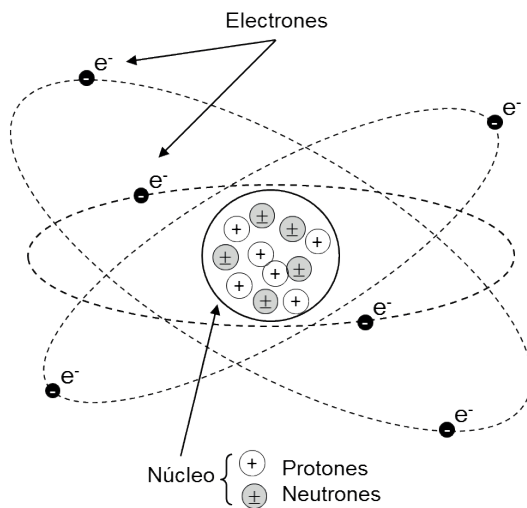


Figura 1.3. Estructura del átomo con las partículas subatómicas que lo integran de acuerdo al modelo atómico de Bohr.

Si a un átomo se le extraen electrones de su última capa de valencia mediante alguna fuerza eléctrica, calorífica o de alguna otra naturaleza, entonces se queda con exceso de protones y por lo tanto con exceso de carga positiva, si por el contrario a un átomo se le añaden electrones, entonces este último tendrá más electrones que protones y por lo tanto tendrá una carga neta negativa. En estos dos casos, decimos que tenemos cargas positivas o cargas negativas.

Corriente eléctrica

Tenemos una corriente eléctrica cuando las cargas eléctricas se encuentran en movimiento, por ejemplo, cuando se mueven a través de un conductor. Si se desplaza el equivalente de carga eléctrica de 1 C por una determinada sección transversal durante un segundo ($\Delta t = 1$ s), entonces se dice que está circulando un ampere de corriente eléctrica. La corriente eléctrica se representa mediante la letra “*i*” o “*I*” y la unidad que la define es el ampere (representado por la letra mayúscula A) en honor al matemático y físico francés André-Marie Ampère. En la Figura 1.4 se muestra la definición de corriente eléctrica de acuerdo con lo explicado.

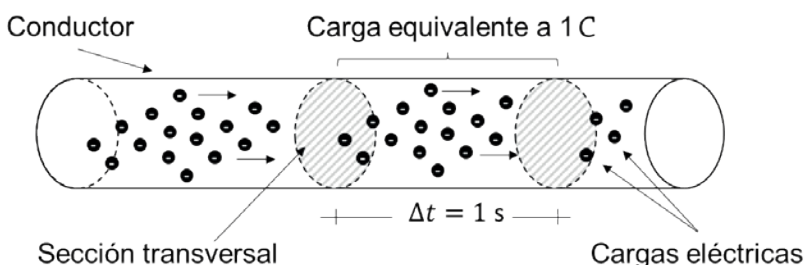


Figura 1.4. Desplazamiento de cargas eléctricas por una sección transversal para definir un ampere (1 A) de corriente eléctrica.

Para que la corriente eléctrica se encuentre correctamente definida en un circuito, es necesario que se indique en el conductor la magnitud de la corriente, acompañada de un signo que identificará el tipo de carga que se analiza (positiva o negativa) y una flecha que muestre la dirección o movimiento de la carga; de lo contrario, si parte de esta información no se encuentra presente, entonces no se tendrá correctamente definida la corriente eléctrica y no se podrá hacer un análisis adecuado del circuito.

Corriente positiva y corriente negativa

En un conductor únicamente existe una sola corriente, pero se puede indicar que es positiva o negativa dependiendo de qué sea lo que se esté analizando, el movimiento y dirección de las cargas negativas o el movimiento y dirección de las cargas positivas. Este fenómeno muestra que, mientras las cargas negativas (electrones) se desplazan en un sentido, los espacios que van abandonado (cargas positivas) aparentemente se desplazan en sentido contrario. De este modo, si -3 A se desplazan hacia la derecha en un conductor, entonces es lo mismo decir que +3 A se están desplazando hacia la izquierda. No se trataría de 3 amperes negativos y 3 amperes positivos de forma separada, se trata en realidad de la misma cantidad de carga eléctrica (únicamente 3 amperes) sólo que analizando el movimiento desde el punto de vista de la carga negativa o el movimiento de la carga positiva. En la Figura 1.5 se indica la forma correcta de cómo representar el tipo de carga y la dirección de desplazamiento. Por lo tanto, si se analiza el movimiento de las cargas eléctricas negativas, entonces decimos que tenemos una corriente negativa de -3 A, por el contrario, si lo que estamos analizando es el movimiento de las cargas eléctricas positivas, entonces decimos que la corriente es positiva de +3 A.

Carga negativa de -3 C/s que se mueve hacia la derecha.

Carga positiva de $+3\text{ C/s}$ que se mueve hacia la izquierda.

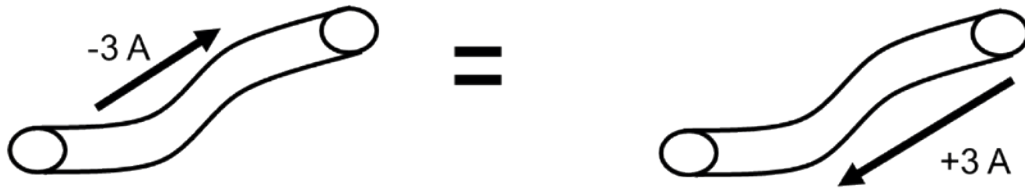


Figura 1.5. Forma correcta de representar la corriente eléctrica con la magnitud y el tipo de carga que se analiza (positiva o negativa) así como la dirección, indicándola con una flecha.

Fuente de corriente

Dentro del análisis de los circuitos eléctricos, la fuente de corriente se considera como una fuente de alimentación constante que puede proporcionar energía a un circuito eléctrico. La forma de representar una fuente de corriente es mediante una flecha dentro de un círculo, la flecha indica la dirección de las cargas eléctricas, y la magnitud con signo representa el total y el tipo de carga que se analiza, pudiendo ser positiva o negativa. En la Figura 1.6 se muestra el símbolo y representación de una fuente de corriente.

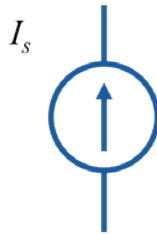


Figura 1.6. Símbolo para la fuente de corriente.

TENSIÓN, VOLTAJE O DIFERENCIA DE POTENCIAL

Definición de voltaje

La tensión, el voltaje o la diferencia de potencial es una magnitud física que impulsa a las cargas eléctricas a lo largo de un conductor en un circuito cerrado. La diferencia de potencial también se define como el trabajo realizado por unidad de carga que ejerce un campo eléctrico sobre una partícula cargada para moverla de un lugar a otro. En los inicios de la electricidad, la tensión era conocida como fuerza electromotriz (FEM), es por lo que en las ecuaciones la tensión se representa por la letra “ e ” o “ E ”. La unidad del voltaje es el volt o voltio (representado por la letra mayúscula V) en honor al físico italiano Alessandro Volta que inventó en el siglo XVII la pila eléctrica. La magnitud del voltaje identifica la cantidad de trabajo que, potencialmente, puede

hacerse a través del circuito; mientras mayor voltaje se tenga, mayor será la cantidad de trabajo que podrá realizarse sobre un circuito eléctrico. La diferencia de potencial puede compararse al agua almacenada en un tanque, cuanto más grande sea el tanque y cuanto más alto sea, mayor será la capacidad del agua para caer y crear un impacto cuando se abra una válvula y el agua pueda fluir (Mazur, 2010).

Fuente de voltaje

Uno de los componentes principales de los circuitos eléctricos es la fuente de voltaje ya que es el elemento que normalmente se encarga de proporcionar la energía necesaria para que funcione un circuito. Existen básicamente dos tipos de fuentes de voltaje, las de corriente constante o directa (V_s) y las de corriente variable o alterna (V_{ca}). En la Figura 1.7 se muestran dos símbolos para representar una fuente de alimentación de corriente directa y uno para representar la fuente de corriente alterna. En el segundo símbolo para la fuente de corriente directa, colocar los signos + y - es redundante ya que el segmento más largo representa al signo positivo mientras que el más corto representa al signo negativo.

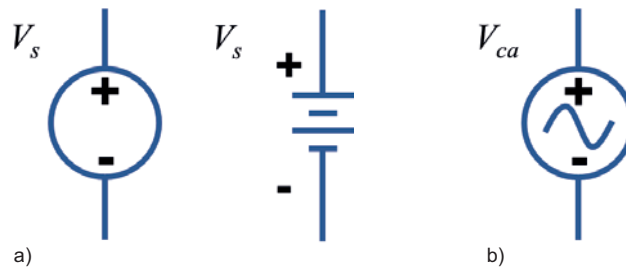


Figura 1.7. Símbolos para representar las fuentes de voltaje a) de corriente directa V_s y b) de corriente alterna V_{ca} .

Para las fuentes de voltaje en corriente directa se pueden encontrar distintos ejemplos como lo son las pilas de relojes y juguetes, las baterías de los coches, motocicletas y las de los teléfonos celulares. Los valores comunes de estas fuentes de voltaje son de 1.5 V para las pilas de los relojes y juguetes, de 12 V para las baterías de los coches, de 6 V para las baterías de las motocicletas y de 3 V para las baterías de los teléfonos celulares. Otro tipo de fuentes de alimentación que proporcionan voltajes de corriente directa son los paneles solares que aprovechan la radiación solar para separar cargas eléctricas en ciertos materiales fotosensibles, así como los termopares que, mediante la unión de dos metales distintos y sometidos a una elevada temperatura, se encargan de separar cargas eléctricas que dan lugar a un potencial eléctrico (de milivoltios o microvoltios) que se puede utilizar como la señal eléctrica de un sensor de temperatura. Los materiales piezoeléctricos también se encargan de producir un voltaje de corriente directa mediante una acción mecánica, este tipo de materiales se encuentra normalmente en los micrófonos para transformar una señal física en una señal eléctrica.

Formas de indicar el voltaje en un elemento

Para que un voltaje esté correctamente indicado, es necesario que cuente con una magnitud y con su respectivo par de signos entre los dos puntos que se está definiendo. Si no se proporciona o se indica esta información, entonces el voltaje no estará definido correctamente. Existen ocasiones en las que se proporciona el voltaje en un solo punto y, cuando esto sucede, significa que el segundo punto es un punto llamado “tierra” o GND (del inglés *ground*), también representado en ocasiones con el número “0”. En la Figura 1.8 se muestra una fuente de alimentación V_s definida por +12 V con su respectivo par de signos indicados en el símbolo, y cuatro elementos generales también representados con sus respectivos valores de voltaje ($V_1 = 4$ V, $V_2 = 8$ V, $V_3 = 2$ V y $V_4 = 6$ V) y sus respectivos pares de signos.

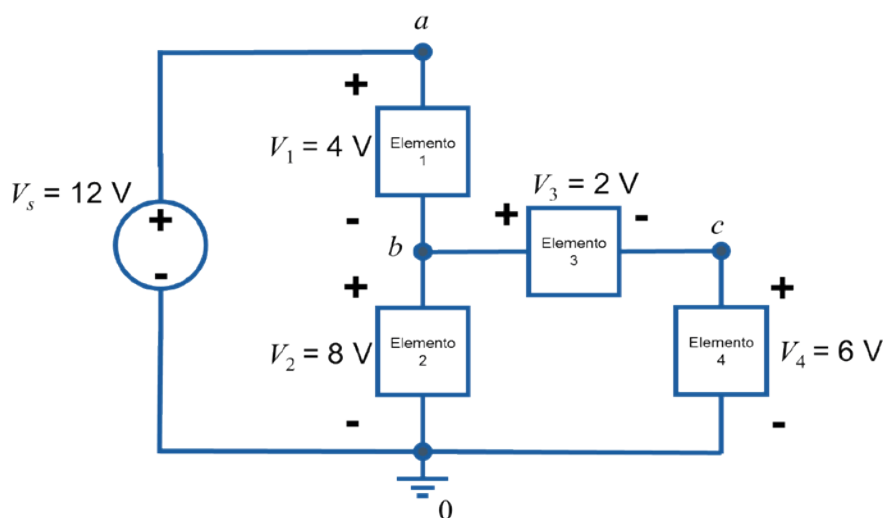


Figura 1.8. Forma adecuada de representar el voltaje incluyendo magnitud y signos de polaridad.

El voltaje en un mismo elemento se puede indicar de formas distintas, por ejemplo, el voltaje V_1 también se puede indicar con las terminales “a” y “b” que están indicadas en el circuito, quedando como $V_{ab} = 4$ V, esto significa que 4 voltios positivos se están midiendo y que la terminal positiva se encuentra en el punto indicado por la letra “a”, mientras que la terminal negativa se encuentra en el punto indicado por la letra “b”. Lo mismo ocurre para el resto de los voltajes indicados en el circuito, como V_3 que también se puede indicar como $V_{bc} = 2$ V.

Se puede indicar el voltaje con una sola terminal, esto significa que la segunda terminal corresponderá a la referencia “0” o GND. Por ejemplo, el voltaje V_2 se puede representar también como V_{b0} , o simplemente V_b ; para este caso estamos hablando del mismo valor de 8 V. De la misma forma V_4 se puede representar como V_{c0} o simplemente V_c que corresponde a 6 V. Observemos que V_s , también se puede representar como V_{a0} o simplemente como V_a y en los tres casos se trata de los mismos 12 V de la fuente de alimentación.

Voltaje positivo y voltaje negativo

Al igual que ocurre con la corriente eléctrica, es relativo considerar que existe simplemente un voltaje positivo o negativo, ya que dependiendo de cómo se mida o represente puede ser escrito como positivo o negativo. Para cualquier representación de voltaje es posible invertir los signos, si es que así se desea o se necesita, lo único que se debe hacer es invertir la polaridad de los signos que se encuentran en el elemento que se está analizando y cambiar de signo a la magnitud del voltaje. En la Figura 1.9 se muestra la forma en que se puede intercambiar la polaridad de los signos tanto en una fuente de alimentación como en cualquier elemento del circuito.

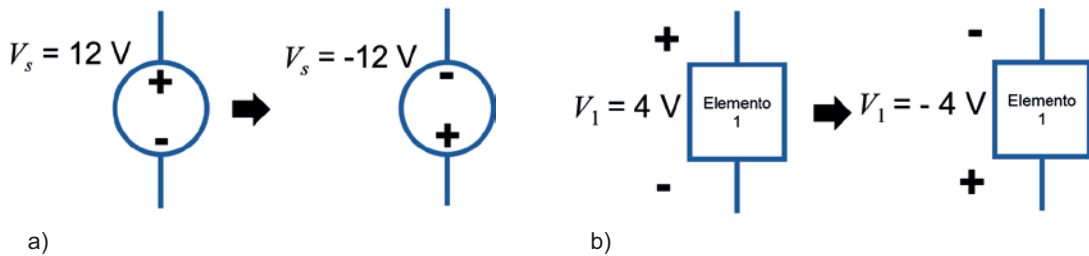


Figura 1.9. Forma de invertir la polaridad de los signos en a) la fuente de alimentación o b) en cualquier elemento del circuito.

Las fuentes de voltaje son los únicos elementos dentro de los circuitos eléctricos que tienen definida una determinada polaridad de voltaje (signos + y -) para ser utilizada en el análisis de los circuitos. Para el resto de los elementos del circuito, la polaridad del voltaje dependerá en gran medida de cómo están conectados y de cómo establezcamos nosotros mismos la polaridad de los signos para su análisis.

POTENCIA

Definición de potencia eléctrica

La potencia eléctrica mide qué tan rápido se está consumiendo o entregando la energía en un circuito por unidad de tiempo: a mayor potencia mayor energía. En el sistema internacional la potencia eléctrica se representa mediante la letra "P" y la unidad que la define es el watt o vatio (representado por la letra mayúscula W) en honor al inventor escocés James Watt quien mejoró notablemente la máquina de vapor para su uso industrial.

La potencia eléctrica se calcula mediante el producto del voltaje en un determinado elemento y la corriente que circula a través de él. La ecuación (1.1) expresa la potencia eléctrica.

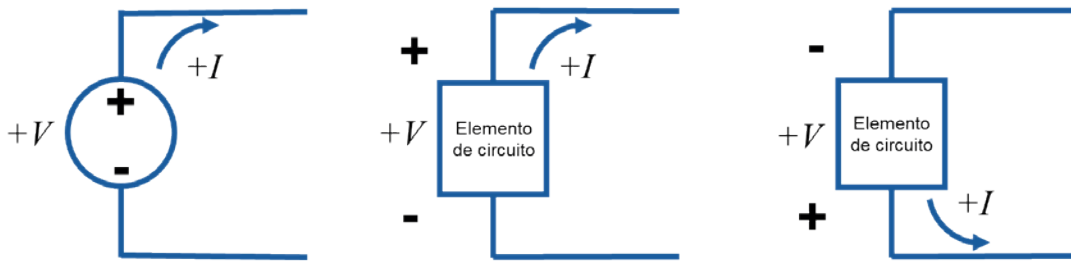
$$P = VI \quad (1.1)$$

Donde:

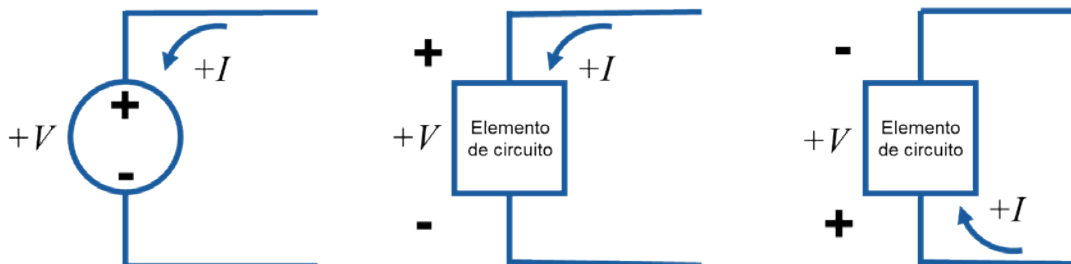
P = potencia en watts (W)
 V = voltaje en volts (V)
 I = corriente en amperes (A)

Potencia positiva y potencia negativa

En cualquier elemento de un circuito eléctrico, el cálculo de una potencia eléctrica positiva ($+P$) significa que se está consumiendo potencia, mientras que la potencia eléctrica negativa ($-P$) significa que dicho elemento está generando potencia. Es muy común que los estudiantes se confundan al no saber qué signos de voltaje o corriente utilizar para los cálculos de la potencia eléctrica, lo que puede llevar a una mala interpretación del resultado y considerar que un elemento se encuentra generando potencia cuando realmente se encuentra consumiéndola o viceversa. Una manera sencilla de evitar este tipo de confusiones se consigue al identificar en un elemento del circuito la dirección de la corriente positiva ($+I$) y la polaridad del voltaje positivo ($+V$). Si la corriente positiva se encuentra saliendo por la terminal positiva del signo del voltaje, entonces dicho elemento se encuentra generando potencia, pero si la corriente positiva se encuentra entrando por la terminal positiva del signo del voltaje, entonces el elemento está absorbiendo o consumiendo potencia. Esta misma idea queda representada en la Figura 1.10 donde se muestra un elemento que genera potencia y un elemento que absorbe potencia. En ocasiones es mucho más rápido y simple hacer esta inspección y determinar qué elementos están generando o consumiendo potencia sin la necesidad de realizar ningún cálculo matemático.



a) elementos que generan potencia.



b) elementos que absorben o consumen potencia

Figura 1.10. Forma de determinar por inspección si un elemento genera o absorbe energía.

Obsérvese, de la figura anterior, que lo que se toma en cuenta para determinar si un elemento genera o absorbe potencia es sólo el signo positivo del voltaje y la dirección de la flecha de la corriente positiva. Si la corriente positiva está saliendo por el signo positivo del voltaje, entonces se genera potencia y si la corriente positiva está entrando por el signo positivo del voltaje, entonces se está absorbiendo potencia.

Todas las resistencias en un circuito consumen potencia, mientras que los inductores y capacitores normalmente también lo hacen. Las fuentes de voltaje y las fuentes de corriente normalmente generan potencia. Esa es la regla general básica que se debe tomar en cuenta para la colocación de signos en los elementos de cualquier circuito eléctrico en el que se utilice la convención pasiva de signos.

CONVENCIÓN DE SIGNOS PASIVA

Se le llama convención pasiva porque aplica para los elementos pasivos que se pueden encontrar en un circuito eléctrico, una resistencia, un inductor y un capacitor. Se les llama elementos pasivos porque son elementos que no generan potencia, normalmente la consumen. Respetando la convención de signos pasiva, las ecuaciones que rigen el comportamiento de cualesquiera de estos elementos tendrán asignados de forma correcta los signos para su análisis.

Para la colocación de signos en los elementos pasivos de un circuito, se debe contar con al menos una fuente de energía, que bien puede ser una fuente de voltaje o una fuente de corriente. En el caso de contar con una fuente de voltaje conectada a cualquier cantidad de elementos pasivos, la forma general para la colocación de los signos se hace considerando que la corriente positiva sale de la terminal positiva de la fuente de voltaje. De esta manera se asume que la fuente de voltaje está entregando o generando energía y que el resto de los elementos por los cuales esté entrando dicha corriente serán los elementos que estarán consumiendo dicha energía.

Colocación de signos con fuente de voltaje

En la Figura 1.11 se muestra una fuente de voltaje conectada a dos elementos pasivos de circuito tal como los encontraríamos al comenzar a analizar un circuito. Para comenzar a colocar los signos de los elementos, se asume que la fuente de alimentación es la que está proporcionando toda la energía en el circuito, por lo tanto, se dibuja una flecha de corriente positiva saliendo por la terminal positiva de la fuente de voltaje y, para el resto de los elementos, esta corriente deberá seguir una o varias trayectorias hasta retornar por la terminal negativa de la fuente de voltaje tal como se aprecia en la Figura 1.12.

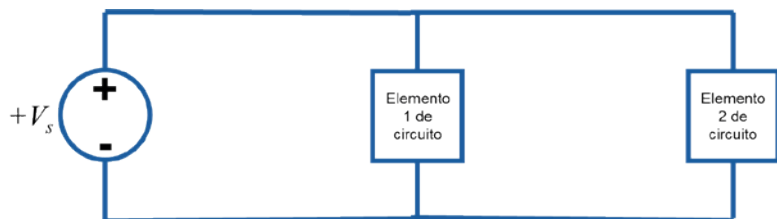


Figura 1.11. Conexión de fuente de voltaje con dos elementos de circuito.

El lado por el cual entra la corriente positiva a cada elemento del circuito será marcado con la terminal positiva del voltaje y el lado por el que sale la corriente será marcado con la terminal negativa. De este modo, y siguiendo este criterio para todos los elementos pasivos del circuito, se determinan los signos. Posteriormente, y para identificar el voltaje en cada elemento, se asigna un nombre a cada voltaje para que sea fácilmente identificable al momento de analizar el circuito. Los nombres pueden estar relacionados con el elemento que se está identificando, por ejemplo, si se trata del elemento 1 del circuito, es lógico asignar como nombre " V_1 ", si se trata del elemento 2 entonces podría ser " V_2 " o si se trata del voltaje de una resistencia, entonces se le puede llamar simplemente " V_R ". De esta manera, se colocan los signos de polaridad de voltaje en todos los elementos del circuito por los que la corriente sigue varias trayectorias después de salir de la fuente de alimentación.

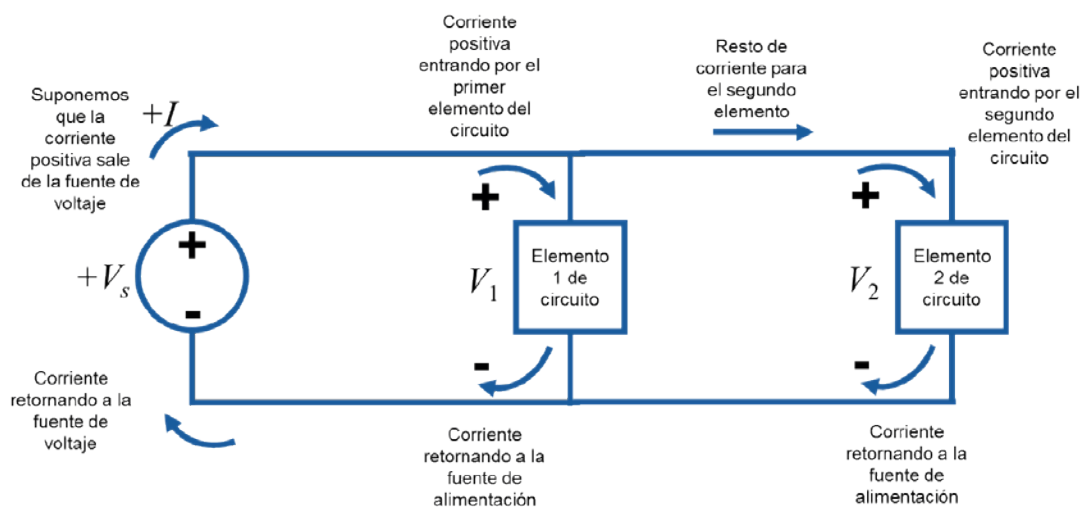


Figura 1.12. Colocación de los signos y nombres de los voltajes en los elementos del circuito con varias trayectorias para la corriente.

De la misma manera, si el circuito está construido con una única trayectoria, como se muestra en la Figura 1.13, entonces la forma de colocar los signos se hace utilizando el mismo criterio que en el caso anterior: suponemos que la corriente positiva se encuentra saliendo de la fuente de alimentación y consideramos el lado por donde entra esta corriente (a cada elemento pasivo se le coloca un signo positivo), así como al lado por donde sale la corriente (en cada elemento pasivo se le coloca un signo negativo). Esto queda representado también en la Figura 1.14 en donde se aprecia la colocación de los signos para un circuito con una fuente de energía y una sola trayectoria para el flujo de la corriente eléctrica.

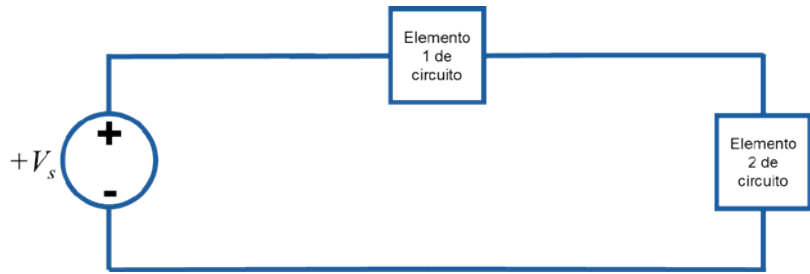


Figura 1.13. Conexión de una fuente de voltaje con dos elementos de un circuito en una sola trayectoria para la corriente.

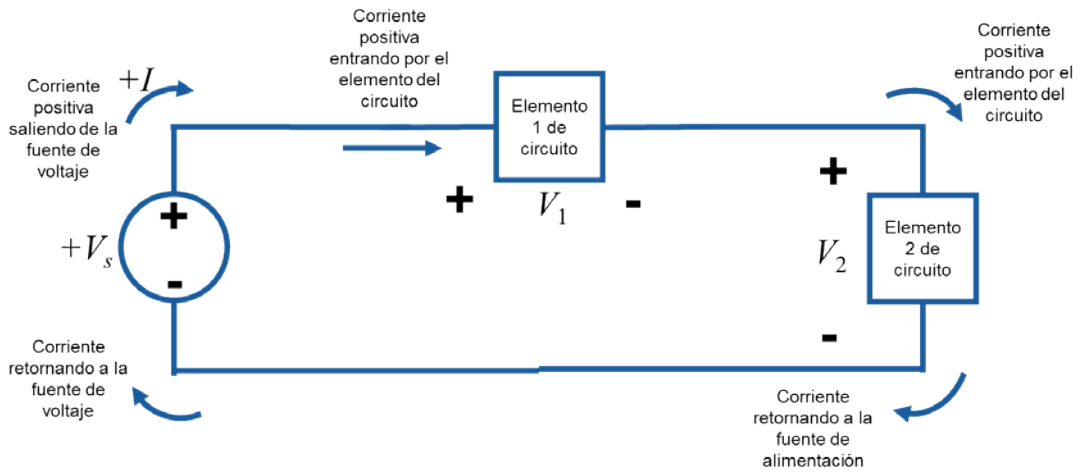


Figura 1.14. Colocación de los signos y nombres de los voltajes en los elementos del circuito con una sola trayectoria para la corriente.

Es muy común que se encuentren circuitos en los que decidir cómo colocar los signos de los elementos pueda resultar confuso o difícil, por no saber establecer la dirección de la corriente positiva para cada uno de ellos después de que la corriente sale de la fuente de alimentación. Uno de los ejemplos más comunes en los que no se sabe con facilidad la dirección de la corriente eléctrica se muestra en la Figura 1.15. En este tipo de problemas, el estudiante debe seleccionar la dirección de la corriente como mejor juzgue, al final del análisis, el signo que resulte para cada una de las corrientes indicará si seleccionó la dirección de la corriente positiva o la dirección de la corriente negativa.

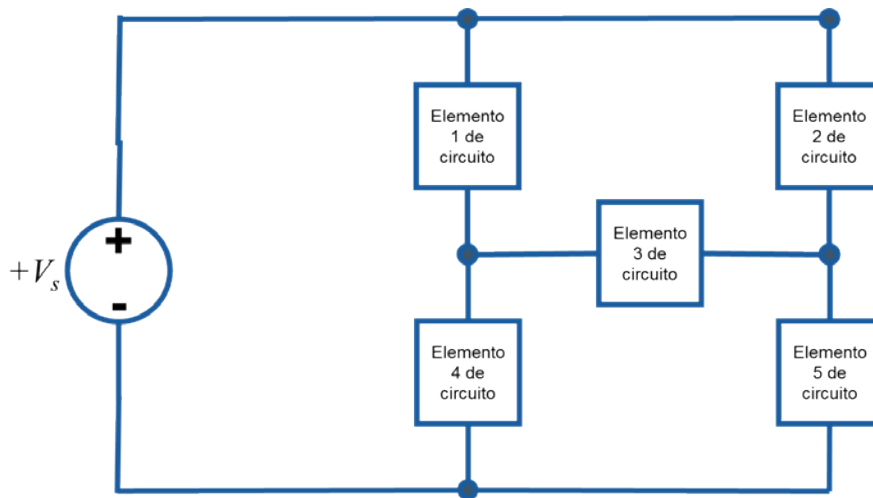


Figura 1.15. Circuito con un elemento confuso para colocar los signos del voltaje.

En este circuito con cinco elementos pasivos, es fácil imaginar la dirección de la corriente para los elementos 1, 2, 4 y 5; en ellos, si la corriente positiva sale de la fuente de alimentación se puede suponer que la corriente fluye en todos los elementos pasivos de arriba hacia abajo como la caída de agua en una tubería. Sin embargo, para el elemento 3 no queda claro si la corriente fluirá de izquierda a derecha o de derecha a izquierda. En este caso, alguien puede decidir simplemente que la dirección de la corriente es de izquierda a derecha (Figura 1.16) y colocar los signos como corresponda o alguien más puede decidir que la dirección de la corriente sea de derecha a izquierda (Figura 1.17) y colocar los signos de forma opuesta. En este caso, ambas consideraciones estarán bien hechas ya que a priori no se sabe con exactitud cuál será la dirección correcta de la corriente positiva en este elemento y por lo tanto ambas consideraciones funcionarán adecuadamente para comenzar el análisis del circuito. Recordemos que, si el resultado de la corriente nos arroja un valor positivo, entonces se escogió la dirección de las cargas positivas y si el resultado arroja un valor negativo, entonces se escogió la dirección de las cargas negativas y cualesquiera de los dos resultados será correcto.

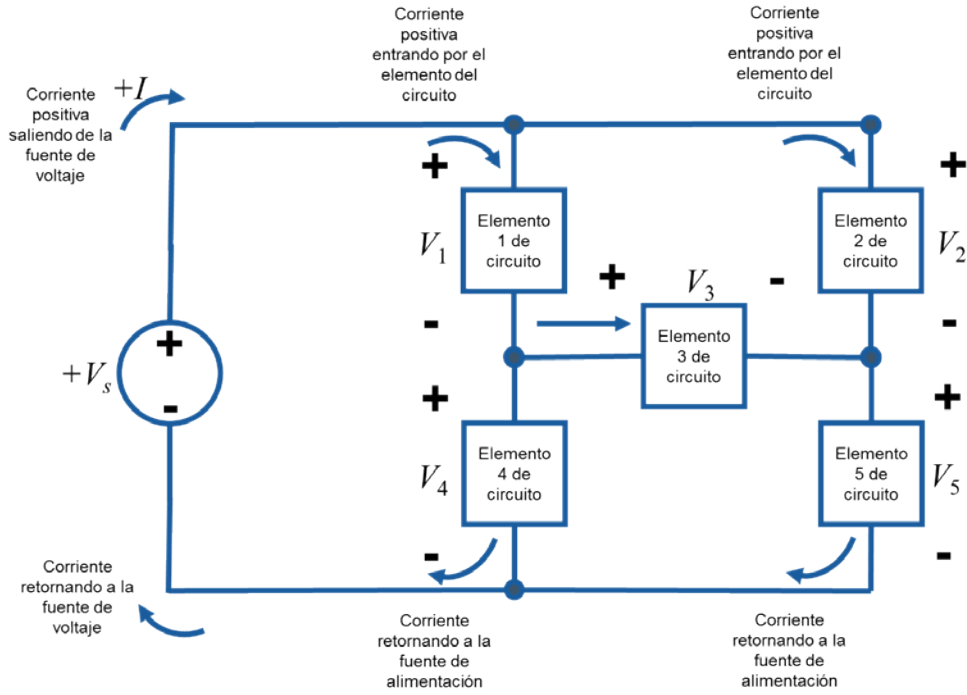


Figura 1.16. Dirección de la corriente de izquierda a derecha en el elemento 3.

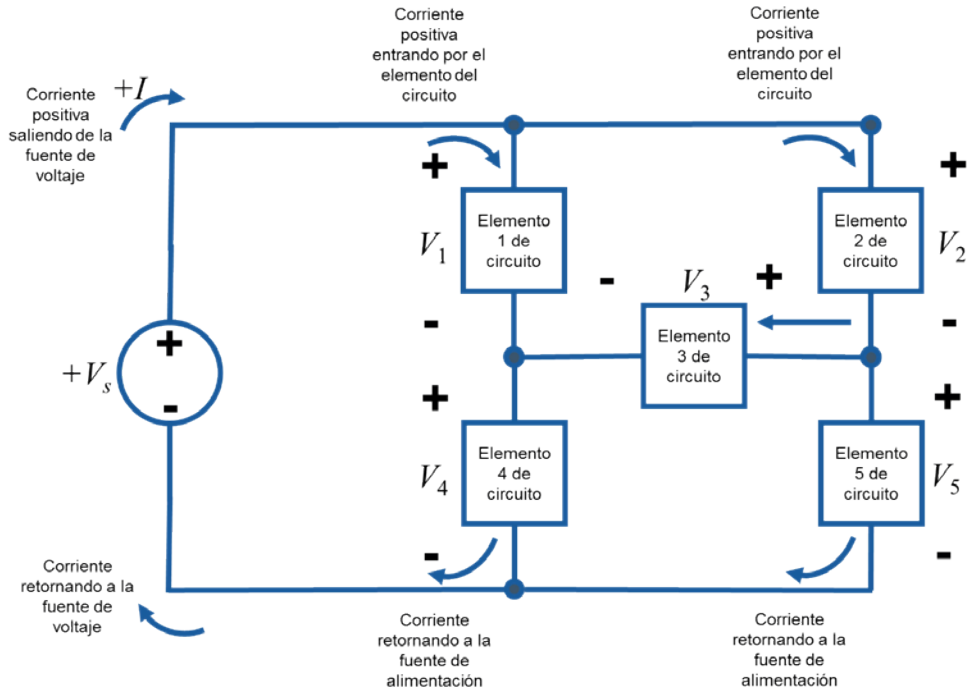


Figura 1.17. Dirección de la corriente de derecha a izquierda en el elemento 3.

Colocación de signos con fuente de corriente

Si la fuente de alimentación es una fuente de corriente (I_s), entonces la forma de colocar los signos en los elementos pasivos se realizará exactamente igual como se colocaron con una fuente de voltaje, la única diferencia es que ya sabemos de antemano en qué dirección circulará la corriente positiva o negativa. En la Figura 1.18 y en la Figura 1.19 se muestran los casos en los que la fuente de energía es una fuente de corriente I_s y la forma en la que se colocan los signos para los elementos pasivos. Observe que se procede de la misma manera en que se hizo para colocar los signos con una fuente de voltaje sólo que ahora se trata de una fuente de corriente. La única consideración que se debe tener es que ahora a la fuente de corriente también se le colocarán los signos + y - pero asumiendo que se trata de un elemento activo, por lo tanto, el signo positivo del voltaje se colocará en el lado que se encuentre saliendo la corriente positiva de la fuente. De esta manera garantizaremos que la fuente de alimentación se encuentra generando o entregando energía al circuito.

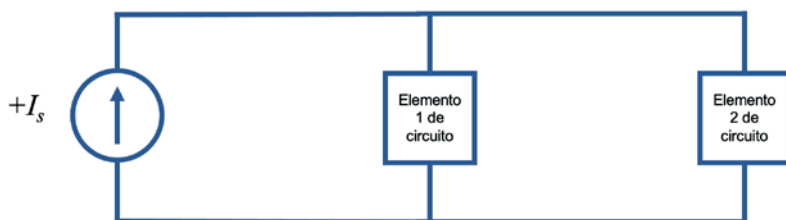


Figura 1.18. Conexión de fuente de corriente con dos elementos de circuito.

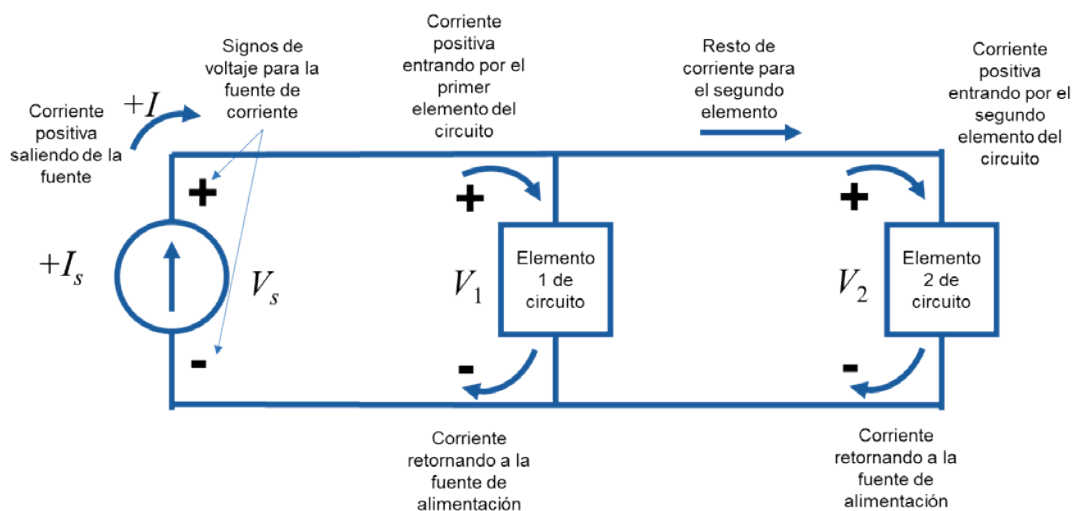


Figura 1.19. Colocación de signos para fuente de corriente y para los elementos del circuito.

Lo mismo ocurre si la fuente de corriente alimenta elementos que se encuentran conectados en una sola trayectoria. En la Figura 1.20 y en la Figura 1.21 se muestra cómo colocar los signos

para una fuente justo ante tal situación. De igual forma que en el caso anterior, a la fuente de corriente se le colocan los signos que corresponden para un elemento activo.

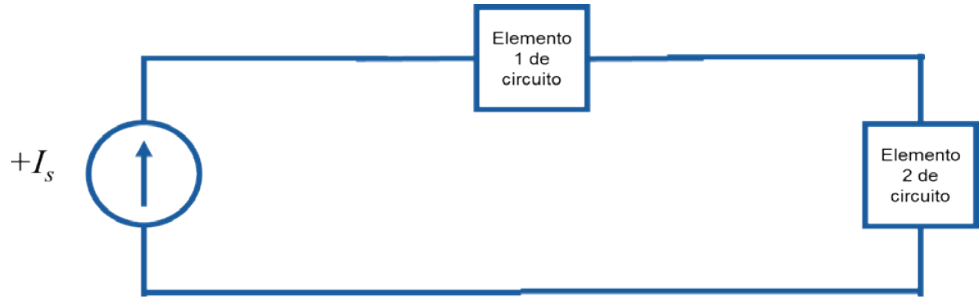


Figura 1.20. Fuente de corriente alimentando elementos de un circuito en una sola trayectoria cerrada.

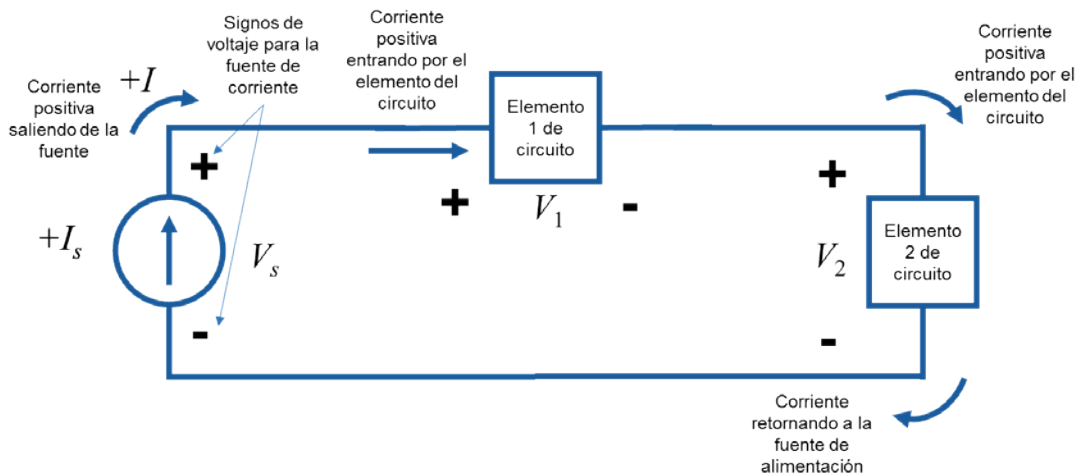


Figura 1.21. Colocación de signos para fuente de corriente y para los elementos del circuito.

ELEMENTOS PASIVOS

Los elementos pasivos que se pueden encontrar en un circuito eléctrico son de tres tipos, una resistencia o resistor, una bobina o inductor y un capacitor o condensador. Estos tres elementos son los que se consideran para el análisis de circuitos eléctricos de corriente directa junto con las fuentes de alimentación.

Resistencia o resistor

Una resistencia es aquella que por su naturaleza física se opone al flujo o paso de la corriente eléctrica. Puede ser de carbón o de cualquier otro material que se resista para que la corriente eléctrica fluya a través de ella. A diferencia de las fuentes de alimentación, las resistencias no tienen polaridad de voltaje ni corriente predefinida. La unidad de la resistencia es el Ohm, en honor al físico alemán Georg Simon Ohm, representado con la letra omega del alfabeto griego (Ω) para no confundirlo con el cero.


El símbolo de la resistencia es una línea quebrada o un pequeño rectángulo, ambos acompañados por la letra “R” mayúscula para identificarlo. En la Figura 1.22 se muestra el símbolo de una resistencia y la forma de encontrarla representada en un circuito eléctrico.



Figura 1.22. Formas de representar una resistencia eléctrica.

Se pueden tener valores de resistencias eléctricas desde unas cuantas décimas de ohm hasta valores de mega ohms. Sin embargo, los valores estándar de las resistencias se limitan a unos cuantos y están determinados también por límites de potencia para su fabricación. En la Tabla 1.3 se muestran en general los cuatro tipos de resistencias más comunes, las de carbón, las de película metálica, que son también conocidas como resistencias de precisión, las resistencias de potencia y por último las resistencias de montaje superficial o SMD (del inglés “Surface Mounted Device”).

Tabla 1.3. Aspecto, valores y potencias de las resistencias más comunes. Fuente: elaboración propia a partir de (ElectromundoPro, 2021)

| Tipo de resistencia | Aspecto | Valores comerciales | Potencia |
|---------------------|---|---------------------|-------------|
| Carbón |  | 0.1 ~ 10 MΩ | 1/4 ~ 2 W |
| Película metálica |  | 0.1 ~ 100 kΩ | 1/16 ~ 2 W |
| Potencia o alambre |  | 0.1 ~ 10 kΩ | 1/4 ~ 500 W |
| SMD |  | 0.1 ~ 1 MΩ | 1/20 ~ 1 W |

En la Tabla 1.4 se muestran los valores óhmicos estándar de las resistencias de carbón.

Tabla 1.4. Valores estándar de resistencias de carbón. Fuente: Elaboración propia a partir de (Veloso, 2016)

| | | | | | | |
|--------------|-------------|--------------|----------------|---------------|----------------|----------------|
| 1.0 Ω | 10 Ω | 100 Ω | 1.0 k Ω | 10 k Ω | 100 k Ω | 1.0 M Ω |
| 1.1 Ω | 11 Ω | 110 Ω | 1.1 k Ω | 11 k Ω | 110 k Ω | 1.1 M Ω |
| 1.2 Ω | 12 Ω | 120 Ω | 1.2 k Ω | 12 k Ω | 120 k Ω | 1.2 M Ω |
| 1.3 Ω | 13 Ω | 130 Ω | 1.3 k Ω | 13 k Ω | 130 k Ω | 1.3 M Ω |
| 1.5 Ω | 15 Ω | 150 Ω | 1.5 k Ω | 15 k Ω | 150 k Ω | 1.5 M Ω |
| 1.6 Ω | 16 Ω | 160 Ω | 1.6 k Ω | 16 k Ω | 160 k Ω | 1.6 M Ω |
| 1.8 Ω | 18 Ω | 180 Ω | 1.8 k Ω | 18 k Ω | 180 k Ω | 1.8 M Ω |
| 2.0 Ω | 20 Ω | 200 Ω | 2.0 k Ω | 20 k Ω | 200 k Ω | 2.0 M Ω |
| 2.2 Ω | 22 Ω | 220 Ω | 2.2 k Ω | 22 k Ω | 220 k Ω | 2.2 M Ω |
| 2.4 Ω | 24 Ω | 240 Ω | 2.4 k Ω | 24 k Ω | 240 k Ω | 2.4 M Ω |
| 2.7 Ω | 27 Ω | 270 Ω | 2.7 k Ω | 27 k Ω | 270 k Ω | 2.7 M Ω |
| 3.0 Ω | 30 Ω | 300 Ω | 3.0 k Ω | 30 k Ω | 300 k Ω | 3.0 M Ω |
| 3.3 Ω | 33 Ω | 330 Ω | 3.3 k Ω | 33 k Ω | 330 k Ω | 3.3 M Ω |
| 3.6 Ω | 36 Ω | 360 Ω | 3.6 k Ω | 36 k Ω | 360 k Ω | 3.6 M Ω |
| 3.9 Ω | 39 Ω | 390 Ω | 3.9 k Ω | 39 k Ω | 390 k Ω | 3.9 M Ω |
| 4.3 Ω | 43 Ω | 430 Ω | 4.3 k Ω | 43 k Ω | 430 k Ω | 4.3 M Ω |
| 4.7 Ω | 47 Ω | 470 Ω | 4.7 k Ω | 47 k Ω | 470 k Ω | 4.7 M Ω |
| 5.1 Ω | 51 Ω | 510 Ω | 5.1 k Ω | 51 k Ω | 510 k Ω | 5.1 M Ω |
| 5.6 Ω | 56 Ω | 560 Ω | 5.6 k Ω | 56 k Ω | 560 k Ω | 5.6 M Ω |
| 6.2 Ω | 62 Ω | 620 Ω | 6.2 k Ω | 62 k Ω | 620 k Ω | 6.2 M Ω |
| 6.8 Ω | 68 Ω | 680 Ω | 6.8 k Ω | 68 k Ω | 680 k Ω | 6.8 M Ω |
| 7.5 Ω | 75 Ω | 750 Ω | 7.5 k Ω | 75 k Ω | 750 k Ω | 7.5 M Ω |
| 8.2 Ω | 82 Ω | 820 Ω | 8.2 k Ω | 82 k Ω | 820 k Ω | 8.2 M Ω |
| 9.1 Ω | 91 Ω | 910 Ω | 9.1 k Ω | 91 k Ω | 910 k Ω | 9.1 M Ω |

Código de colores para resistencias

Para identificar el valor óhmico de las resistencias existe un código de colores que facilita su lectura y en el que se incluyen tanto las resistencias de carbón que tienen 4 bandas de colores, así como las resistencias de mayor precisión que cuentan con 5 bandas. En la Figura 1.23 se muestra el código de colores, así como la forma de identificar el valor de las resistencias de 4 y 5 bandas.

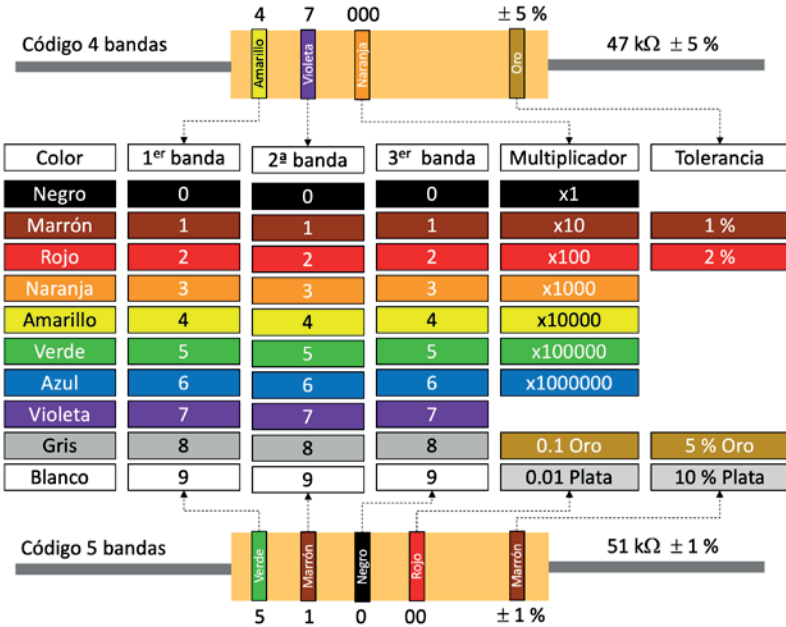


Figura 1.23. Código de colores para identificar resistencias de 4 y 5 bandas. Fuente: elaboración propia a partir de (Heptro Tutoriales, 2017).

Bobina o inductor

El inductor es un componente pasivo que almacena energía en forma de campo magnético, generando un flujo imantado cuando se hace circular a través de él una corriente eléctrica. Se fabrica arrollando un hilo conductor sobre un material ferromagnético o aire (Figura 1.24). La cantidad de flujo magnético que puede producir un inductor estará en función de la corriente, el tamaño, y la inductancia “L” que es una característica asociada a su construcción física y al tipo de núcleo utilizado. En el sistema internacional, la unidad de medida de la inductancia es el Henry o Henrio, en honor al físico estadounidense Joseph Henry, y se representa mediante la letra “H” aunque normalmente se encuentra en valores de milihenrios (mH) o microhenrios (μH).

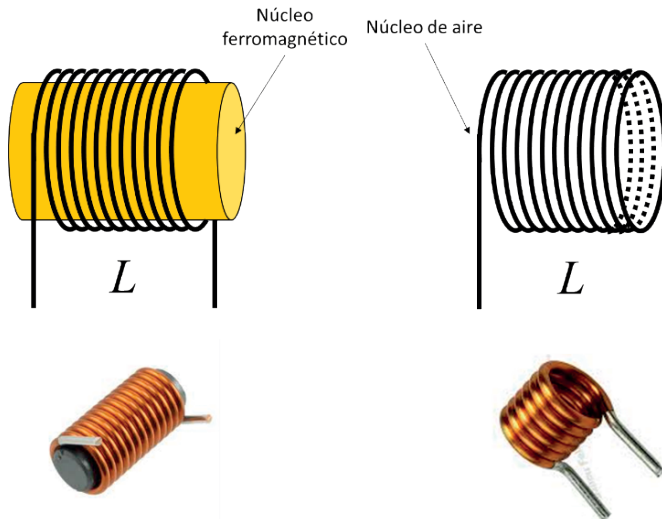


Figura 1.24. Inductor con núcleo ferromagnético y con núcleo de aire. Fuente: (Rosas, 2017b).

El símbolo que representa a un inductor se muestra en la Figura 1.25; se pueden distinguir tres tipos diferentes, aunque en la mayoría de los casos se representa simplemente como el inciso b) sin distinguir si cuenta o no con núcleo ferromagnético.

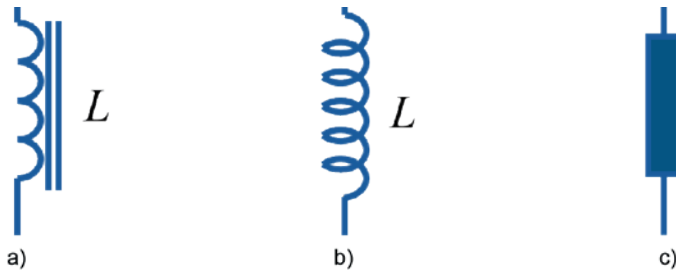


Figura 1.25. Símbolo del inductor o bobina: a) con núcleo ferromagnético, b) con núcleo de aire, c) inductancia en general.

Cálculo de la inductancia

Para calcular la inductancia asociada al inductor se utilizan dos ecuaciones, dependiendo del tipo de núcleo que se tenga. La ecuación (1.2) se utiliza para calcular la inductancia en una bobina con núcleo ferromagnético, mientras que la ecuación (1.3) se utiliza para calcular la inductancia en una bobina con núcleo de aire. En la Figura 1.26 se muestran los parámetros físicos que se utilizan para calcular la inductancia de un inductor con núcleo ferromagnético y de un inductor con núcleo de aire.

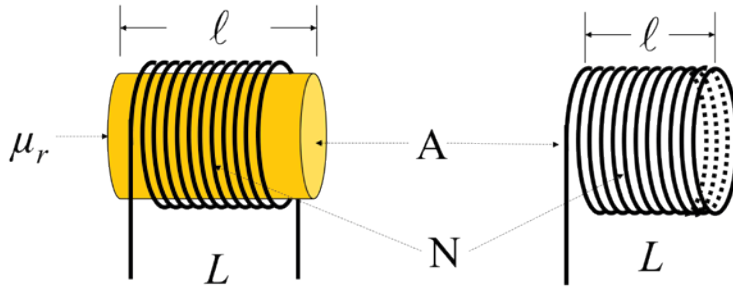


Figura 1.26. Parámetros físicos para calcular la inductancia en una bobina con núcleo ferromagnético o núcleo de aire.

$$L = \frac{\mu_r \mu_o N^2 A}{\ell} \quad (1.2)$$

$$L = \frac{\mu_o N^2 A}{\ell} \quad (1.3)$$

Donde:

- L = Inductancia en henrios (H)
- μ_r = Permeabilidad relativa del material ferromagnético (2000-6000)
- μ_o = Permeabilidad del aire (espacio vacío) = $4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$
- ℓ = Longitud en metros (m)
- A = Área o sección transversal de una vuelta (m^2)
- N = Número de vueltas enteras

Observe que en la ecuación (1.2) y en la ecuación (1.3) no se toma en cuenta el tamaño ni el tipo de material del conductor para el cálculo de la inductancia, solo influye la construcción física de la misma y si cuenta o no con núcleo ferromagnético.

Ecuaciones del inductor

El inductor cuenta básicamente con tres ecuaciones que determinan su principio de operación, la ecuación de voltaje (1.4), la ecuación de corriente (1.5) y la ecuación de energía (1.6) (McAllister, 2008b). Es importante conocer las ecuaciones matemáticas que rigen el comportamiento del inductor, ya que son éstas las que nos ayudarán a comprender cómo funciona este elemento dentro de los circuitos eléctricos. A partir de estas ecuaciones, pues, se deriva cómo opera un inductor con otros elementos de un circuito eléctrico.

$$v_L = L \frac{d(i_L)}{dt} \quad (1.4)$$

$$i_L = \frac{1}{L} \int_0^T v_L dt + i_0 \quad (1.5)$$

$$W_L = \frac{1}{2} L i_L^2 \quad (1.6)$$

Donde:

v_L = Voltaje en el inductor en volts (V)

L = Inductancia en henrios (H)

i_L = Corriente inicial en el inductor en amperes (A)

W_L = Energía del inductor en jul (J)

En la Figura 1.27 se muestra cómo colocar los signos del voltaje en el inductor a partir del flujo de la corriente. Observe que los signos corresponden con los de un elemento pasivo por el cual está circulando una corriente eléctrica positiva.

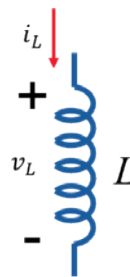


Figura 1.27. Dirección de la corriente y signos de voltaje para una bobina o inductor.

En la ecuación (1.4) se observa que el voltaje en el inductor es proporcional al valor de la inductancia L multiplicada por la derivada de la corriente que fluye a través de él, pero, si la corriente fuese un valor constante I_s , como es en el caso de los circuitos de corriente directa, entonces el voltaje en el inductor debería valer cero, es decir $v_L = 0$ V. Es importante tener esto presente ya que es de gran importancia cuando se estudian los circuitos RL , RC , o RLC .

Inductores conectados en serie, paralelo y mixto

Se pueden conectar múltiples inductores para formar un inductor equivalente siempre y cuando no se encuentren acoplados magnéticamente, es decir, que no se encuentren compartiendo el mismo flujo magnético o, dicho de otra manera, que no compartan el mismo núcleo. Calcular la inductancia equivalente dependerá de cómo estén conectados entre sí los inductores pudiendo estar conectados en serie paralelo o en conexión mixta.

Inductores en serie

En la Figura 1.28 se muestra un arreglo de inductores conectados en serie. Para los inductores conectados en serie, la inductancia equivalente L_{eq} se obtiene sumando simplemente todas las inductancias que se encuentren conectadas entre sí, tal como lo

expresa la ecuación (1.7). Observe que se pueden conectar cualquier cantidad de inductores en serie, quedando indicado esto con el n -ésimo inductor L_n .

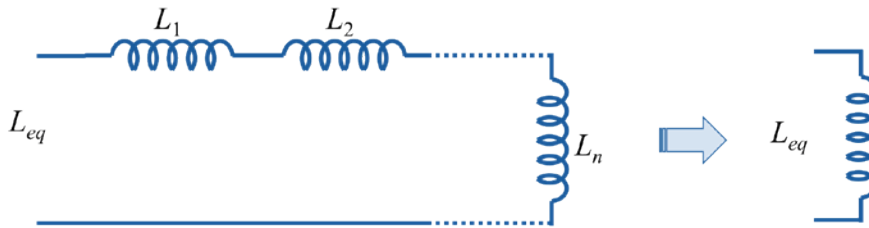


Figura 1.28. Inductores conectados en serie.

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + \dots + L_n \quad (1.7)$$

Donde:

L_{eq} = Es la inductancia serie equivalente en henrios (H)

$L_{1,2}$ = Son las inductancias en henrios (H)

L_n = n -ésimo inductor (H)

Inductores en paralelo

En la Figura 1.29 se muestra un arreglo de inductores conectados en paralelo. Para los inductores conectados en paralelo, la inductancia equivalente L_{eq} se obtiene con el recíproco de la suma de todos los recíprocos del valor de cada inductor, tal como lo expresa la ecuación (1.8). Observe que también en este tipo de conexión se puede conectar cualquier cantidad de inductores en paralelo.

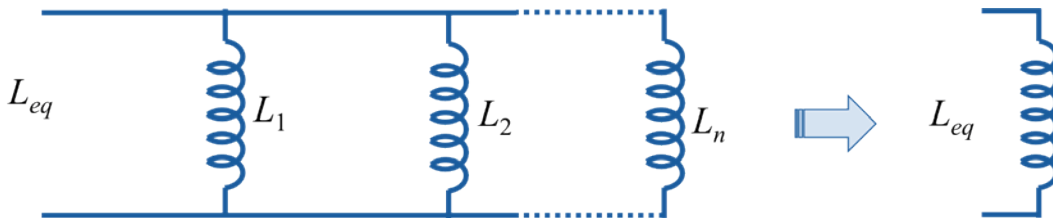


Figura 1.29. Inductores conectados en paralelo.

$$L_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n}} \quad (1.8)$$

Donde:

L_{eq} = Es la inductancia paralelo equivalente en henrios (H)

$L_{1,2}$ = Son las inductancias en henrios (H)

L_n = n -ésimo inductor (H)

Para el caso particular en el que se tengan conectados únicamente dos inductores, la ecuación (1.8) se transforma algebraicamente para quedar expresada simplemente como:

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \quad (1.9)$$

Inductores en conexión mixta

La conexión mixta se puede presentar con cualquier combinación de inductores en serie y en paralelo combinados entre sí. Para poder calcular la inductancia equivalente L_{eq} será necesario identificar qué partes se encuentran conectadas en serie y qué partes se encuentran conectadas en paralelo para después reducirlas con sus respectivas ecuaciones y simplificar el arreglo hasta que se tenga un solo inductor equivalente.

Por ejemplo, en la Figura 1.30 se observa un arreglo de tres inductores en los cuales L_2 y L_3 se encuentran conectados en serie y al mismo tiempo esta combinación serie se encuentra conectada en paralelo con L_1 .

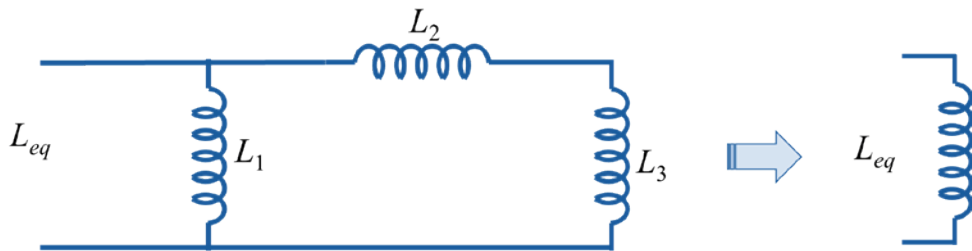


Figura 1.30. Inductores conectados en forma mixta.

La forma de simplificar este arreglo de inductores sería obteniendo la inductancia serie equivalente de L_2 y L_3 , que se puede nombrar como L_{23} , para después simplificarse en paralelo con el inductor L_1 quedando la secuencia de la siguiente manera:

- a) Primero se suman las dos inductancias en serie L_2 y L_3 para obtener una inductancia equivalente. En la Figura 1.31 se muestra cómo quedaría representada la simplificación en este primer paso.

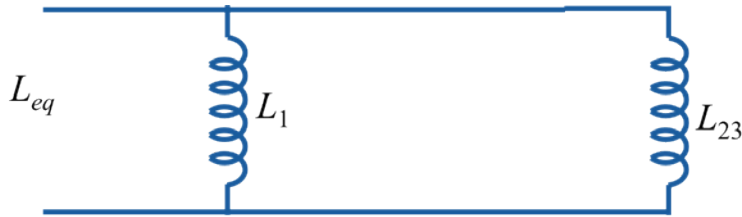


Figura 1.31. Primer paso para simplificar un arreglo mixto de inductores.

$$L_{23} = L_2 + L_3 \quad (1.10)$$

- b) Después, el resultado L_{23} se combina en paralelo con L_1 para que quede un solo inductor con la inductancia equivalente L_{eq} .

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_{23}}{L_1 + L_{23}} \quad (1.11)$$

- c) De esta manera, la simplificación de inductores en conexión mixta se puede llevar a cabo para obtener un único inductor equivalente representado en la Figura 1.32.

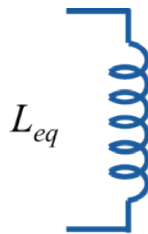


Figura 1.32. Inductor equivalente que resulta de simplificar el arreglo mixto de inductores.

Capacitor o condensador

Un capacitor o condensador es un dispositivo pasivo que almacena energía en forma de campo eléctrico. Se le llama capacidad o capacitancia “ C ” a la propiedad física de almacenar carga eléctrica “ Q ” cuando se le aplica un potencial eléctrico en sus terminales. Un capacitor se construye básicamente con dos placas paralelas conductoras separadas por un material dieléctrico (ϵ_r) o simplemente aire (Figura 1.33). La unidad de la capacitancia es el faradio representado con la letra mayúscula “ F ” en honor al físico inglés Michael Faraday.

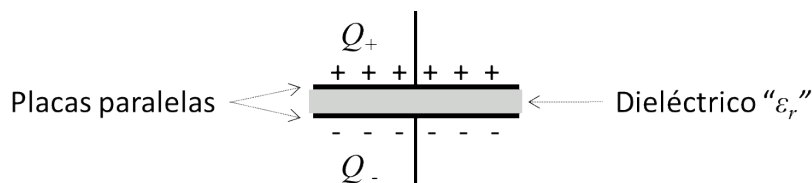


Figura 1.33. Construcción física de un capacitor de placas paralelas con dieléctrico.

El símbolo que representa a un capacitor está estrechamente relacionado con su construcción física, ya que normalmente se representa con dos líneas paralelas con sus terminales o por una línea recta y una línea curva para distinguir la polaridad positiva y negativa del capacitor. En la Figura 1.34 se muestran los distintos símbolos que se pueden encontrar para la representación de un capacitor de placas paralelas. Observe que el capacitor polarizado tiene una placa curva para representar la polaridad negativa así que la colocación del signo positivo de la polaridad es redundante.

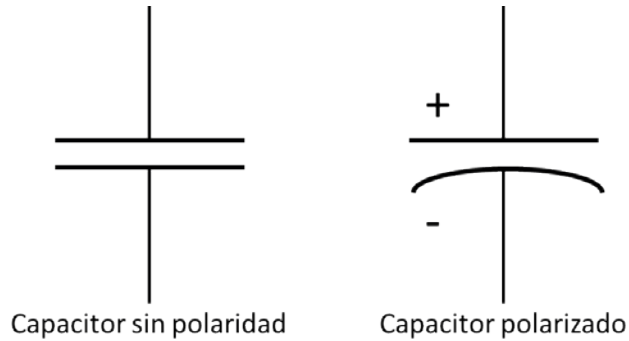


Figura 1.34. Símbolo para capacitor sin polaridad y polarizado.

Cálculo de la capacitancia

La capacitancia se puede calcular con o sin material dieléctrico, al igual que ocurre con los inductores. En la Figura 1.35 se muestran los parámetros que se toman en cuenta para el cálculo de la capacitancia. La ecuación (1.12) se utiliza para calcular la capacitancia de un capacitor con un material dieléctrico entre sus placas y la ecuación (1.13) cuando sólo existe aire entre ellas.

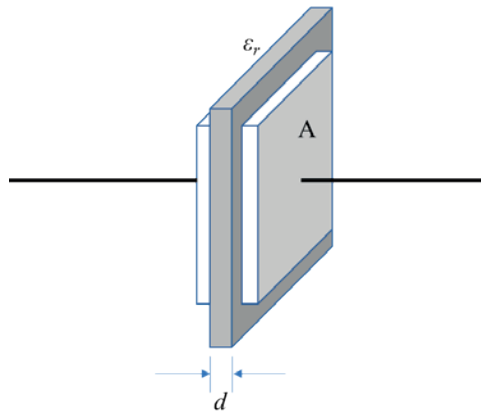


Figura 1.35. Parámetros que se consideran para el cálculo de la capacitancia.

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{d} \quad (1.12)$$

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad (1.13)$$

Donde:

$$C = \text{Capacitancia en faradios (F)}$$
$$\epsilon_0 = \text{Permitividad del vacío} = 8.85 \times 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$$

ϵ_r = Permitividad relativa (vidrio = 7, nylon = 2, baquelita = 5)

A = Área de cada placa (m^2)

d = Separación de las placas en metros (m)

Existen diferentes tipos de capacitores para cubrir las múltiples aplicaciones en las que se les puede encontrar en la industria, sin embargo, la aplicación de los capacitores depende del voltaje, la capacitancia, el tipo de material y la frecuencia donde van a trabajar. La forma y tamaño de los capacitores depende de la aplicación y la potencia por lo que existe, entonces, una gran variedad de formas de encontrar a los capacitores, tal como se muestra en la Figura 1.36.

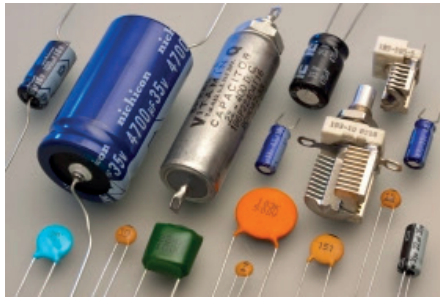


Figura 1.36. Aspecto físico de distintos tipos de capacitores. Fuente: (Rosas, 2017a)

Ecuaciones del capacitor

Al igual que el inductor, el capacitor también cuenta con tres ecuaciones que determinan su principio de operación, la ecuación de corriente (1.14), la ecuación de voltaje (1.15) y la ecuación de energía (1.16) (McAllister, 2008a). A partir de estas ecuaciones se deriva cómo opera un capacitor con otros elementos de un circuito eléctrico.

$$i_C = C \frac{d(v_C)}{dt} \quad (1.14)$$

$$v_C = \frac{1}{C} \int_0^T i_C dt + v_0 \quad (1.15)$$

$$W_C = \frac{1}{2} C v_C^2 \quad (1.16)$$

Donde:

i_L = Corriente en el capacitor en amperes (A)

C = Capacitancia en faradios (F)

v_c = Voltaje en el capacitor en volts (V)
 v_0 = Voltaje inicial en el capacitor en volts (V)
 W_c = Energía del capacitor en juls (J)

En la Figura 1.37 se muestra cómo colocar los signos del voltaje en el capacitor a partir del flujo de la corriente. Observe que los signos corresponden con los de un elemento pasivo por el cual está circulando una corriente eléctrica positiva.

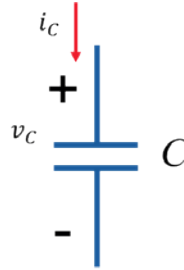


Figura 1.37. Dirección de la corriente y signos de voltaje para un capacitor.

En la ecuación (1.14) se observa que la corriente en el capacitor es proporcional al valor de la capacitancia C multiplicada por la derivada del voltaje aplicado al capacitor, pero, si el voltaje fuese un valor constante V_s , como es en el caso de los circuitos de corriente directa, entonces la corriente en el capacitor debería valer cero, es decir $i_c = 0$ A. Observe que lo mismo ocurre con el inductor pero para el voltaje, es decir, con señales de voltaje y corriente constantes, el voltaje en el inductor es de 0 V y la corriente en el capacitor también será de 0 A. Cuando se estudie el fenómeno transitorio de los circuitos RL y RC estas características serán de gran importancia.

Capacitores conectados en serie, paralelo y mixto

Se pueden conectar eléctricamente cualquier cantidad de capacitores y de todos ellos obtener una única inductancia equivalente C_{eq} . El valor de esta capacitancia dependerá de cómo estén conectados estos capacitores, pudiendo estar conectados en serie, paralelo o en conexión mixta.

Capacitores conectados en serie

En la Figura 1.38 se muestra la conexión de capacitores en serie y de los cuales se puede calcular la capacitancia equivalente. Para calcular la capacitancia en serie, se hace como si se estuvieran calculando inductancias en paralelo, es decir, se calcula el inverso de la suma de los valores inversos de cada capacitancia como se indica en la ecuación (1.17).

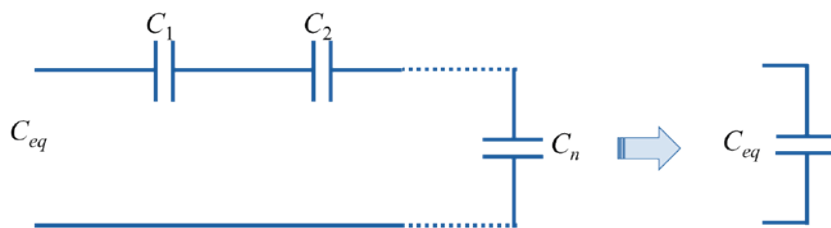


Figura 1.38. Conexión serie de capacitores.

$$C_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}} \quad (1.17)$$

Donde:

C_{eq} = Es la capacitancia serie equivalente en faraidos (F)

$C_{1,2}$ = Son las capacitancias en faraidos (F)

C_n = n -ésimo capacitor (F)

Al igual que ocurre para el caso particular de dos inductores en paralelo, cuando se tienen dos capacitores conectados en serie, la ecuación (1.17) se simplifica algebraicamente para quedar expresada simplemente como lo indica la ecuación (1.18):

$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad (1.18)$$

Capacitores conectados en paralelo

En la Figura 1.39 se muestra la conexión de capacitores en paralelo y de los cuales se puede calcular la capacitancia equivalente utilizando la ecuación (1.19). Para calcular la capacitancia equivalente en paralelo, simplemente se suman las capacitancias tal como se hace para inductores conectados en serie.

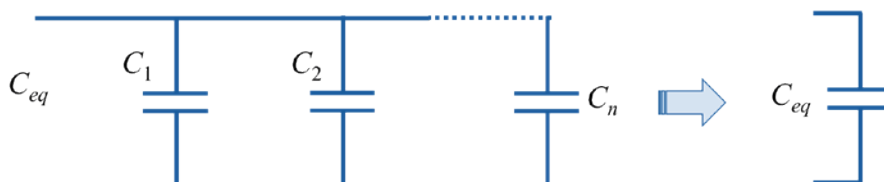


Figura 1.39. Capacitores conectados en paralelo.

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_n \quad (1.19)$$

Donde:

C_{eq} = Es la capacitancia paralelo equivalente en faraidos (F)

$C_{1,2}$ = Son las capacitancias en faraidos (F)

C_n = n -ésimo capacitor (F)

Capacitores en conexión mixta

La conexión mixta se puede presentar con cualquier combinación de capacitores en serie y en paralelo combinados entre sí. Para poder calcular la capacitancia equivalente C_{eq} será necesario identificar qué partes se encuentran conectadas en serie y qué partes se encuentran conectadas en paralelo para después reducir las con sus respectivas ecuaciones y simplificar el arreglo hasta que se tenga un solo capacitor equivalente.

Por ejemplo, en la Figura 1.40 se observa un arreglo de cuatro capacitores en los cuales C_3 y C_4 se encuentran conectados en serie y al mismo tiempo esta combinación serie se encuentra conecta en paralelo con C_1 y C_2 .

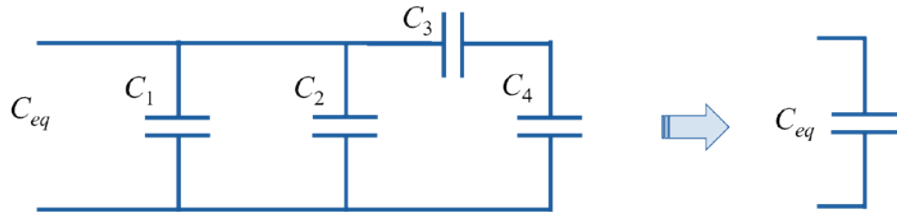


Figura 1.40. Inductores conectados en forma mixta.

La forma de simplificar este arreglo de capacitores sería obteniendo la capacitancia serie equivalente de C_3 y C_4 , que se puede nombrar como C_{34} , para después simplificarse en paralelo con los capacitores C_1 y C_2 quedando la secuencia de la siguiente manera:

- a) Primero se simplifican los dos capacitores en serie C_3 y C_4 para obtener una capacitancia equivalente C_{34} . En la Figura 1.41 se muestra cómo quedaría representada la simplificación en este primer paso.

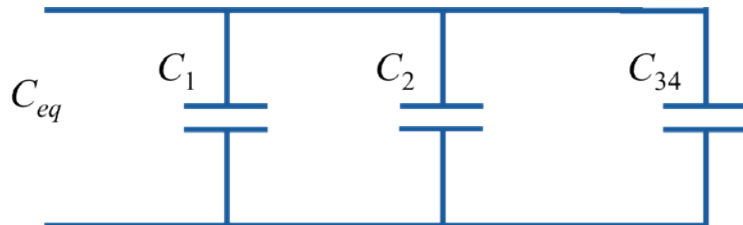


Figura 1.41. Primer paso para simplificar un arreglo mixto de capacitores.

$$C_{34} = \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4} \quad (1.20)$$

- b) Después, el resultado C_{34} se combina con los capacitores C_1 y C_2 en paralelo para que quede un solo capacitor con la capacitancia equivalente C_{eq} .

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_{34} \quad (1.21)$$

- c) De esta manera, la simplificación de capacitores en conexión mixta se puede llevar a cabo para obtener un único capacitor equivalente representado en la Figura 1.42.

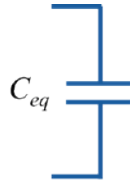


Figura 1.42. Capacitor que resulta de simplificar un arreglo mixto de capacitores.

ELEMENTOS ACTIVOS

Como ya se había mencionado con anterioridad, las fuentes de alimentación en un circuito eléctrico forman parte esencial para su construcción, sin alguna de éstas, el circuito no tendría una fuente de energía para alimentarlo y por lo tanto no existiría ningún voltaje o corriente fluyendo a través de sus elementos. En electrónica, se pueden encontrar fundamentalmente dos tipos de fuentes de alimentación, las fuentes independientes y las fuentes dependientes.

Fuentes independientes

Básicamente existen dos tipos de fuentes de alimentación independientes y ya fueron explicadas en apartados anteriores al inicio de este capítulo, se trata de la fuente de voltaje y de la fuente de corriente (Figura 1.43). A este tipo de fuentes también se les conoce como fuentes ideales ya que se caracterizan por mantener en sus terminales, de forma ideal, constante e independiente el valor del voltaje o de corriente que se indica en ellas. A estas fuentes se les puede conectar cualquier cantidad de elementos pasivos y son capaces de entregar (teóricamente) toda la energía necesaria para que el circuito funcione adecuadamente.

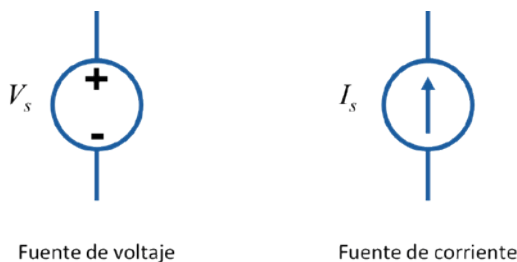


Figura 1.43. Fuentes independientes ideales de voltaje y corriente.

Al inicio, para el análisis de circuitos eléctricos siempre se consideran las fuentes ideales, ya que, para los circuitos, su comportamiento es muy semejante al de las fuentes reales. Si después lo que se desea es hacer un análisis más profundo y detallado del circuito, entonces estas fuentes ideales se podrán sustituir por sus respectivas fuentes reales.

Fuentes dependientes

Son fuentes de voltaje o corriente que no tienen un valor fijo, su valor depende de un parámetro de control que puede ser una corriente (i_x) o un voltaje (v_x) que se encuentra en otra parte del circuito. Se representan mediante un rombo y con una flecha en el interior para indicar que se trata de una fuente de corriente o con los signos “+” y “-” si se trata de una fuente de voltaje. La Figura 1.44 muestra los cuatro tipos de fuentes dependientes que se pueden encontrar en los circuitos eléctricos.

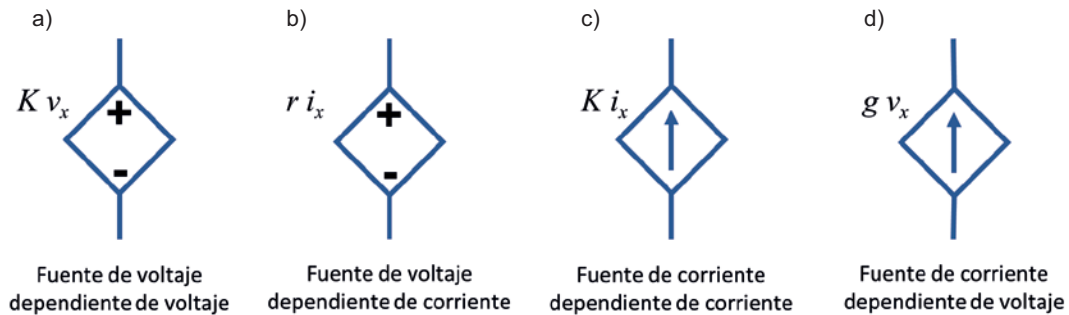


Figura 1.44. Tipos de fuentes dependientes.

En la Figura 1.44a y c, la constante K es adimensional mientras que en la Figura 1.44b, r tiene como unidades V/A, y en la Figura 1.44d, g tiene como unidades A/V.

Las fuentes dependientes encuentran gran utilidad cuando se estudian circuitos con transistores BJT o MOSFETs y circuitos en los que aparece el amplificador operacional (OpAmp).

SUGERENCIAS ANTES DE COMENZAR A RESOLVER UN CIRCUITO ELÉCTRICO

No existe una regla general o un procedimiento específico para resolver todos los circuitos eléctricos. Cada circuito se aborda de forma distinta, sin embargo, les comparto algunas sugerencias que les pueden ser de utilidad antes de comenzar a resolver alguno:

1. Identificar con claridad lo que se pide en el problema: un voltaje, una corriente, una resistencia, una potencia, etc. No hacer trabajo innecesario calculando lo que no se pide, o peor aún, lo que no se necesita.
2. Hay que asegurar que todos los elementos que lo integran (resistencias, inductores, fuentes, etc.) están perfectamente identificados con su nombre, valor y con las unidades correctas. En el caso de que alguno o algunos elementos no tengan nombre, nombrarlos para mayor facilidad al hacer los cálculos.
3. Trabajar preferentemente con valores positivos en las fuentes de corriente y fuentes de voltaje, causan menores confusiones y hacen que los cálculos siempre sean más sencillos.
4. En caso de saberla, trazar preferentemente la dirección de la corriente positiva y colocar los signos de todos los elementos del circuito utilizando la convención de signos pasiva.

La práctica te llevará a resolver con facilidad y rapidez los circuitos que se te presenten. En este libro comenzaremos siempre por resolver circuitos simples y poco a poco aumentaremos el nivel de complejidad hasta que no exista problema que no puedas resolver por ti mismo.

REFERENCIAS DEL CAPÍTULO

- ArtChist. (2020). Sistema internacional de unidades, tabla de múltiplos + submúltiplos. ArtChist. Recuperado de: <https://artchist.blogspot.com/2019/08/sistema-internacional-de-unidades-tabla.html>
- Economía, S. d. (19 de abril de 2016). *México se rige bajo el Sistema Internacional de Unidades de medida*. Gobierno de México. Recuperado el 21 octubre 2020 de: <https://www.gob.mx/se/articulos/mexico-se-rige-bajo-el-sistema-internacional-de-unidades-de-medida>
- ElectromundoPro. (2021). Los 6 tipos de resistencias y sus clasificaciones. <https://electromundo.pro/?s=resistencia>
- Mazur, G. (2010). *Digital Multimeter Principles*. USA: American Technical Publishers.
- McAllister, W. (2008a). La ecuación de corriente y voltaje de un capacitor en acción. En *Khan Academy*. Recuperado de: <https://es.khanacademy.org/science/electrical-engineering/ee-circuit-analysis-topic/ee-natural-and-forced-response/a/ee-capacitor-equation-in-action>
- McAllister, W. (2008b). La ecuación de corriente y voltaje de un inductor en acción. En *Khan Academy*. Recuperado de: <https://es.khanacademy.org/science/electrical-engineering/ee-circuit-analysis-topic/ee-natural-and-forced-response/a/wmc-inductor-in-action>
- Heptro Tutoriales. (2017). *Código de colores de resistencias*. Heptro Store. <https://hetpro-store.com/TUTORIALES/codigo-de-colores-de-resistencia/>
- Rosas, O. (2017a). Capacitores. En *Compilando conocimiento*. Recuperado de: <https://compilandoconocimiento.com/2017/02/19/capacitores-2/>
- Rosas, O. (2017b). *Inductores*. En *Compilando conocimiento*. Recuperado de: <https://compilandoconocimiento.com/2017/02/19/inductores-2/>
- Pujol Cruz, A. (2023). ¿Cuáles son las principales aplicaciones de los capacitores?. *Electropreguntas.com*. Recuperado el 30 de noviembre de 2023 en <https://electropreguntas.com/cuales-son-las-principales-aplicaciones-de-los-capacitores/>
- Secretaría-de-Economía. (19 de abril de 2016). *México se rige bajo el Sistema Internacional de Unidades de medida*. Gobierno de México. Recuperado el 21 de octubre de 2020 de: <https://www.gob.mx/se/articulos/mexico-se-rige-bajo-el-sistema-internacional-de-unidades-de-medida>
- Veloso, C. (2016). *Valores comerciales de resistencias*. Electron Tools. Recuperado de <https://www.electrontools.com/Home/WP/valores-comerciales-de-resistencias/>

RESISTENCIAS Y LEY DE OHM

2

INTRODUCCIÓN

Analizar un circuito significa conocer de él o de algún elemento que lo integra: la corriente, el voltaje, la resistencia o la potencia. Para poder calcular todos estos parámetros, es necesario conocer y saber aplicar las leyes experimentales que rigen el comportamiento de los circuitos y las técnicas o métodos para su análisis. Tales leyes son básicamente la ley de Ohm, las leyes de Kirchhoff y la ley de la potencia eléctrica. En este capítulo se estudia la ley de Ohm y la ley de la potencia para circuitos que están construidos básicamente con resistencias. Se presentan las características de la conexión serie, paralelo, mixta, estrella y delta. Los circuitos estarán conectados con una sola fuente de alimentación.

Nomenclatura para las resistencias

Si en un circuito no están definidos los nombres de las resistencias, entonces el alumno tiene la libertad de seleccionar el nombre que desee para cada resistencia o grupo de resistencias. Lo importante es que aprenda a identificar a qué resistencia o resistencias corresponde el nombre en el circuito.

El nombre puede ser, la letra R acompañada de uno o dos subíndices, letras, números, símbolos, nombres, etc., algunos ejemplos son: R_1 , R_{12} , R_a , R_{ab} , R_{serie} , $R_{paralelo}$, R_{max} , R_{min} , R_L , R_C , R_{Δ} , R_{eq} , R_T , etc.

RESISTENCIAS EN SERIE

Se dice que dos o más resistencias se encuentran conectadas en serie si una corriente hipotética describe una sola trayectoria al circular a través de ellas (LATAM, 2021). Si la corriente encuentra más de un camino para circular, entonces las resistencias no se encuentran conectadas en serie. En la Figura 2.1 se presenta el arreglo de distintas cantidades de resistencias conectadas en serie. En particular, en la Figura 2.1d las tres resistencias se encuentran en serie a pesar de que la forma en la que se muestran no es tan clara. En la Figura 2.2 se muestra cada una de las corrientes hipotéticas que circularían en cada arreglo de resistencias para mostrar que se encuentran conectadas en serie.

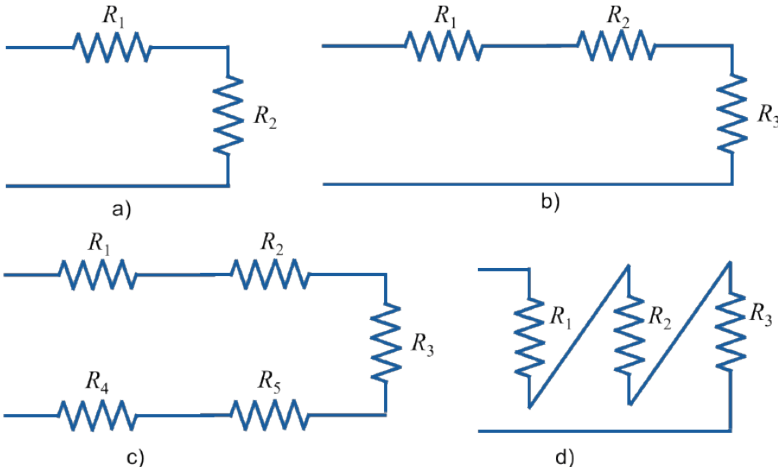


Figura 2.1. Arreglos de resistencias conectadas en serie.

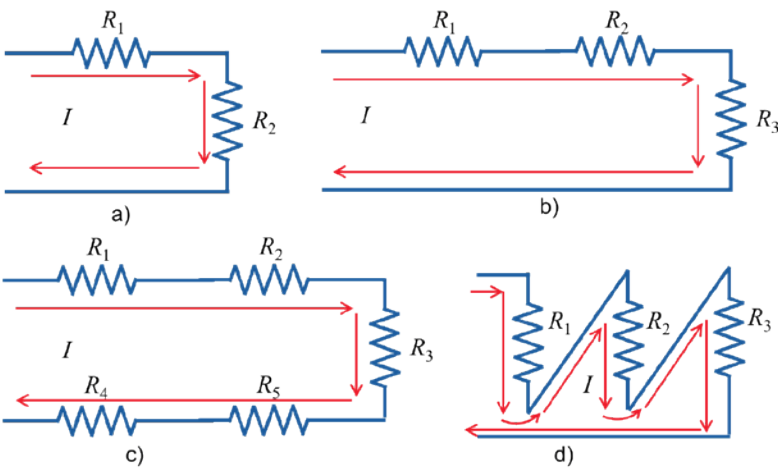


Figura 2.2. Corriente hipotética que comprueba que las resistencias se encuentran conectadas en serie ya que la corriente hipotética circularía a través de una sola trayectoria en cada arreglo.

En la Figura 2.3 se muestran ejemplos de arreglos de resistencias que no se encuentran conectadas en serie debido a que la corriente hipotética no sigue una sola trayectoria. En la Figura 2.3a, la corriente pasa a través de la resistencia R_1 pero luego esta se divide para circular a través de R_2 y R_3 de forma separada. En la Figura 2.3b, la corriente entra al arreglo de resistencias para después dividirse en dos partes para circular a través de R_1 y R_3 . Nótese que la corriente que circularía a través de R_1 sería la misma corriente que circularía a través de R_2 por lo que se deduce que R_1 y R_2 en este arreglo se encuentran conectadas en serie al igual que R_3 y R_4 ; sin embargo, el arreglo completo de resistencias no se encuentra conectado en serie ya que existirían varias trayectorias por las cuales circularía la corriente hipotética.

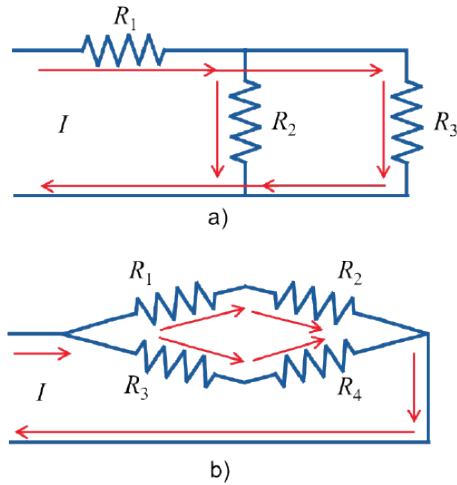


Figura 2.3. Arreglos de resistencias que no están conectadas en serie debido a que la corriente hipotética sigue varias trayectorias.

Cálculo de la resistencia equivalente serie

Si se tienen conectadas dos o más resistencias en serie (Figura 2.4), es posible calcular una sola resistencia equivalente R_{eq} de todas las resistencias conectadas. La ecuación (2.1) indica la forma de calcular la resistencia equivalente R_{eq} de un arreglo de resistencias en serie. En esta ecuación se observa que se pueden conectar n -cantidad de resistencias y la resistencia equivalente será simplemente la suma de todas y cada una de ellas. De igual manera, si todas las resistencias son iguales en la conexión serie, entonces la resistencia equivalente será simplemente el producto de n por el valor de la resistencia R_n tal como se indica en la ecuación (2.2).

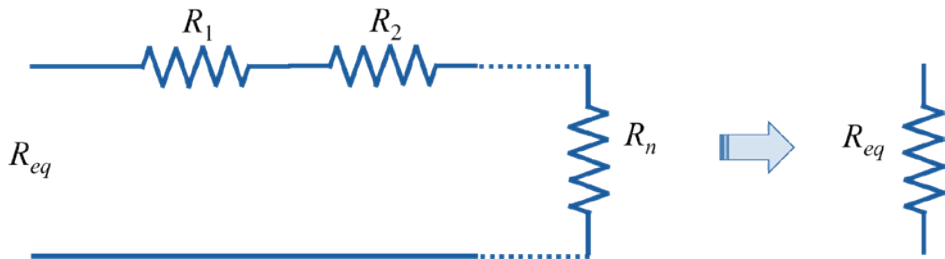


Figura 2.4. Arreglo de resistencias en serie para calcular la resistencia equivalente R_{eq} .

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_n \quad (2.1)$$

$$R_{eq} = nR_n \quad (2.2)$$

Donde:

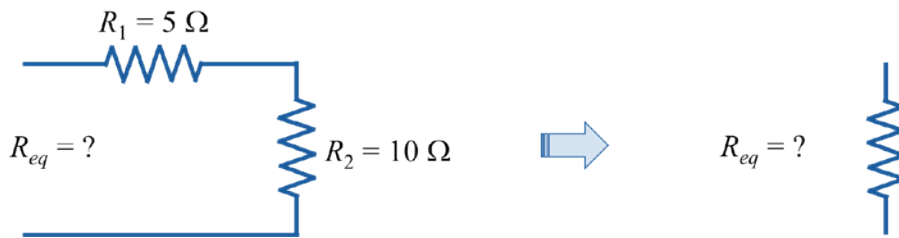
R_{eq} = Es la resistencia serie equivalente en ohms (Ω)

$R_{1,2,n}$ = Resistencias en ohms (Ω)

n = Número total de resistencias

Ejemplo 2-1. Calcular la resistencia que se pide en cada arreglo.

1)



Utilizando (2.1) tenemos

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

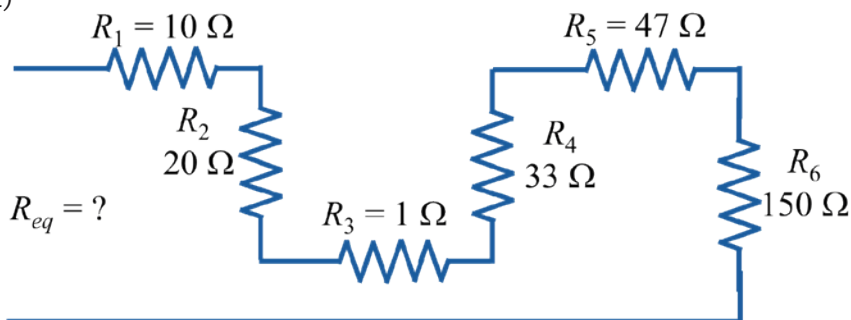
sustituimos los valores de cada resistencia

$$R_{eq} = 5 \Omega + 10 \Omega$$

y resulta

$$R_{eq} = 15 \Omega$$

2)



Utilizando (2.1) tenemos

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6$$

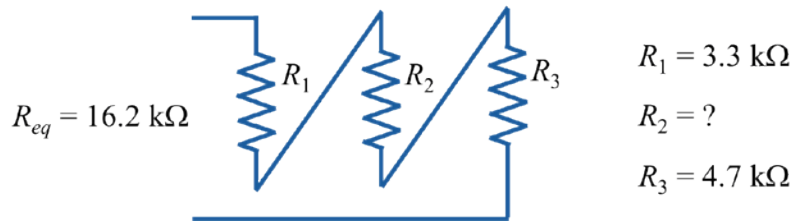
sustituimos los valores de cada resistencia

$$R_{eq} = 10 \Omega + 20 \Omega + 1 \Omega + 33 \Omega + 47 \Omega + 150 \Omega$$

y resulta

$$R_{eq} = 261 \Omega$$

3)



Utilizando (2.1) tenemos

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$$

despejamos R_2 y nos queda

$$R_2 = R_{eq} - R_1 - R_3$$

sustituimos los valores de cada resistencia

$$R_2 = 16.2 \text{ k}\Omega - 3.3 \text{ k}\Omega - 4.7 \text{ k}\Omega$$

y resulta

$$R_2 = 8.2 \text{ k}\Omega$$

RESISTENCIAS EN PARALELO

Se dice que dos o más resistencias se encuentran conectadas en paralelo si los extremos superiores de cada resistencia se conectan en un punto común y los extremos inferiores se conectan a otro punto común distinto (McAllister, 2008). En la Figura 2.5a se muestran dos resistencias sin conectar y en la Figura 2.5b se muestran las mismas dos resistencias conectadas en paralelo. Observe que ambas resistencias se encuentran conectadas a puntos en común por separado.

Nota: Aplica lo mismo si las resistencias están colocadas en forma horizontal, es decir, no habría extremo superior e inferior lo que habría sería extremo izquierdo y extremo derecho.

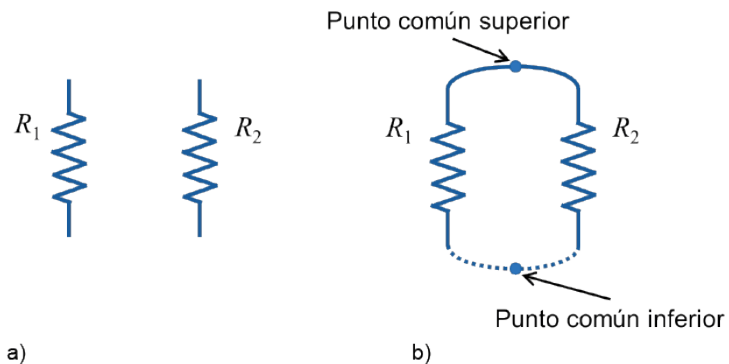


Figura 2.5. Forma de conectar a) dos resistencias separadas en b) dos resistencias en paralelo.

Otra forma de identificar si dos o más resistencias se encuentran conectadas en paralelo es averiguando si comparten o no los mismos extremos que una fuente de voltaje hipotética. Esto ocurre si las resistencias se conectan directamente a una fuente de voltaje hipotética con sus respectivos conductores. Esto se aprecia en la Figura 2.6a, todas las resistencias que se conecten de la misma manera a la fuente estarán conectadas en paralelo entre sí. Esta conexión hacia la fuente también se puede conseguir a través de conductores comunes, tal como se aprecia en la Figura 2.6b, en la Figura 2.6c y la Figura 2.6d. Nótese que la terminal positiva de la fuente de voltaje (línea continua) se conecta a un extremo de cada resistencia, mientras que la terminal negativa de la fuente (línea punteada) se conecta al otro extremo de cada resistencia.

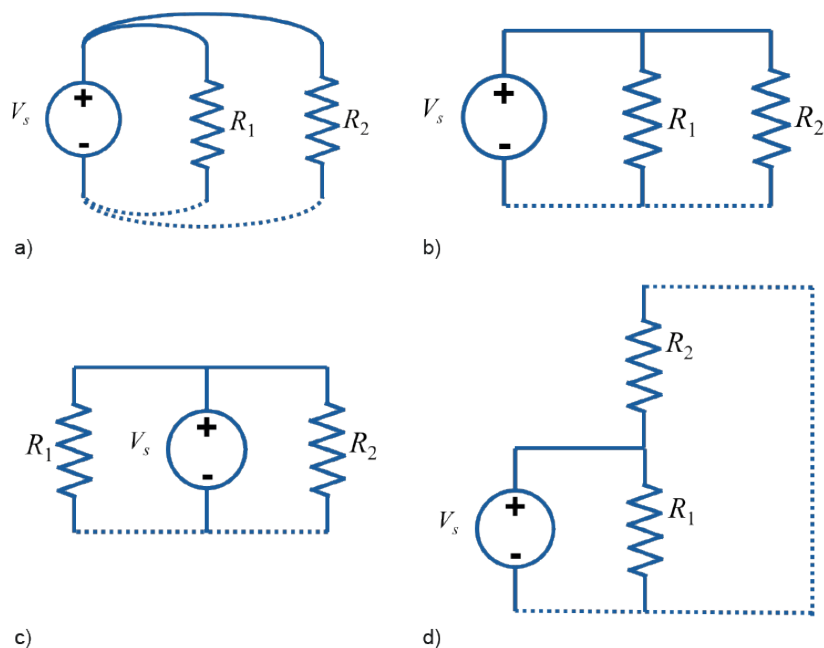


Figura 2.6. Resistencias en paralelo conectadas con sus respectivos conductores a la fuente de voltaje.

En la Figura 2.7 se muestran algunos ejemplos de tres o más resistencias conectadas en paralelo y en las que a simple vista no parece que lo estén. Sin embargo, cumplen con la característica de estar unidas únicamente a dos líneas en común (una línea continua y una línea punteada). La línea continua y la línea punteada ayudan a visualizar con mayor facilidad la característica de estar conectadas en paralelo.

Cálculo de la resistencia equivalente paralelo

Si se tienen conectadas dos o más resistencias en paralelo (Figura 2.8), es posible calcular una sola resistencia equivalente R_{eq} de todas las resistencias conectadas. La ecuación (2.3) indica la forma de calcular la resistencia equivalente R_{eq} de un arreglo de resistencias en paralelo. En esta ecuación se observa que se pueden conectar n -cantidad de resistencias y la resistencia equivalente será el inverso de la suma del inverso de cada resistencia.

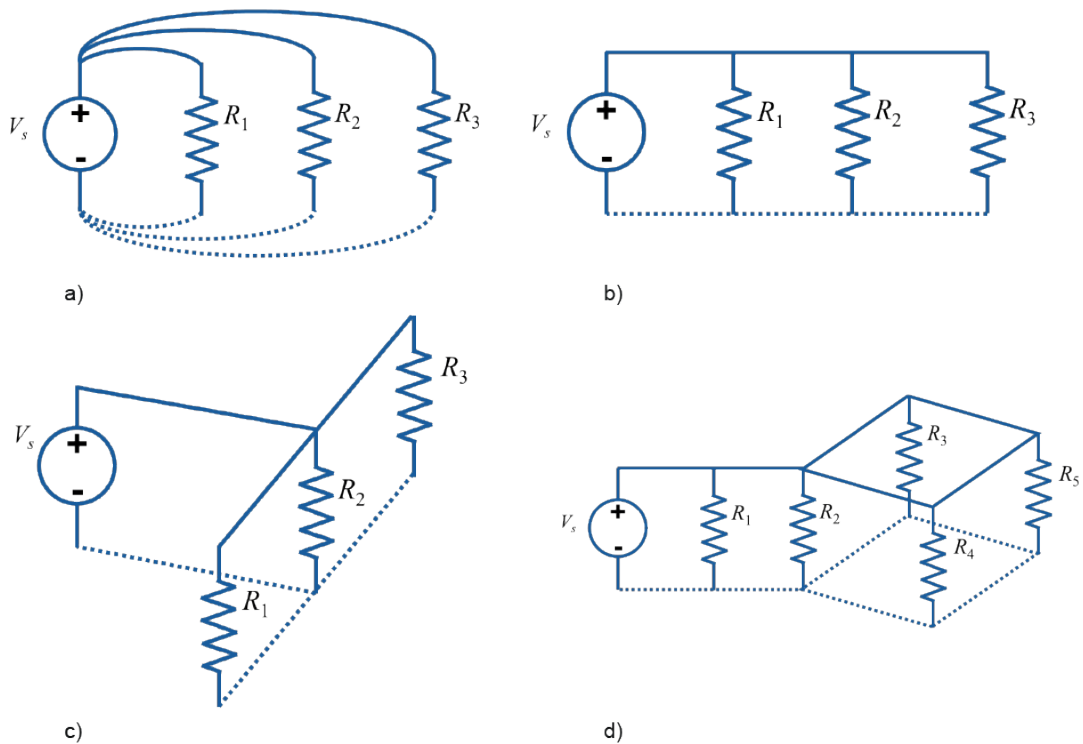


Figura 2.7. Tres o más resistencias conectadas en paralelo conectadas de formas poco comunes.

Cuando sólo se tienen conectadas dos resistencias en paralelo entonces la ecuación (2.3) se simplifica algebraicamente para quedar como lo establece la ecuación (2.4), esta ecuación es muy popular en el análisis de circuitos eléctricos por su simplicidad y rapidez para utilizar. De igual manera, si todas las resistencias son iguales en la conexión paralelo, entonces la resistencia equivalente R_{eq} será igual al valor de la resistencia R_n dividido entre el número total n de resistencias que se tengan, tal como se indica en la ecuación (2.5).

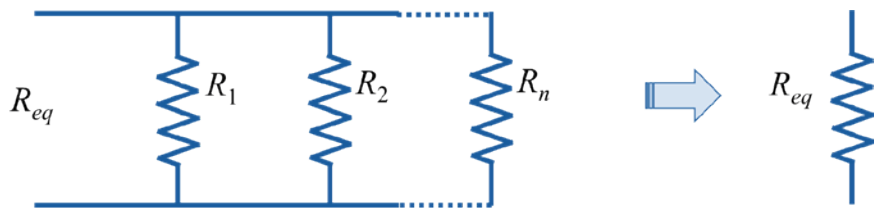


Figura 2.8. Arreglo de resistencias en paralelo para calcular la resistencia equivalente R_{eq} .

Para calcular la resistencia equivalente de n resistencias conectadas en paralelo se tiene:

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}} \quad (2.3)$$

Para dos resistencias conectadas en paralelo la fórmula se simplifica quedando:

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (2.4)$$

Si se tienen conectadas n resistencias iguales en paralelo, la fórmula se simplifica aún más quedando:

$$R_{eq} = \frac{R_n}{n} \quad (2.5)$$

Donde:

R_{eq} = Es la resistencia paralelo equivalente en ohms (Ω)

$R_{1,2,n}$ = Resistencias en ohms (Ω)

n = Número total de resistencias

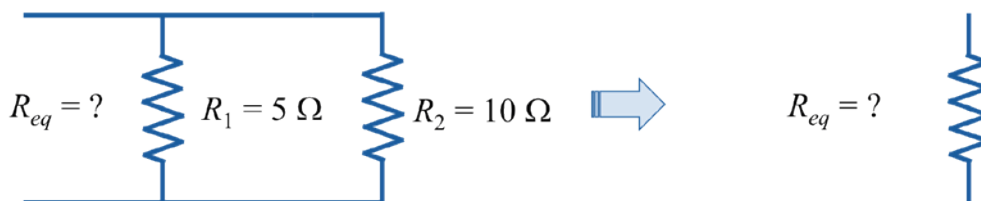
Para indicar que dos o más resistencias se encuentran conectadas en paralelo se pueden usar dos barras paralelas (\parallel) entre las resistencias, tal como se muestra a en la ecuación (2.6). Esta expresión indica que R_1 y R_2 se encuentran conectadas en paralelo. Lo mismo ocurre si se trata de más resistencias conectadas en paralelo.

$$R_{eq} = R_1 \parallel R_2 \quad (2.6)$$

Nota: Una manera rápida de saber si el resultado obtenido de los cálculos puede ser correcto es identificando el valor óhmico de la resistencia más pequeña que se tenga conectada; el valor del resultado que se haya obtenido de la resistencia equivalente R_{eq} deberá ser menor a este valor, de lo contrario, habrá un error en los cálculos.

Ejemplo 2-2. Calcular la resistencia equivalente que se pide en cada arreglo.

1)



Utilizando (2.3) tenemos

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

sustituimos los valores de cada resistencia

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{5 \Omega} + \frac{1}{10 \Omega}}$$

y resulta

$$R_{eq} = 3.333 \Omega$$

Observemos que el resultado obtenido es inferior a 5Ω que es el valor más pequeño de las dos resistencias conectadas.

Hacemos nuevamente el cálculo, pero ahora utilizando la ecuación (2.4), entonces tenemos:

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

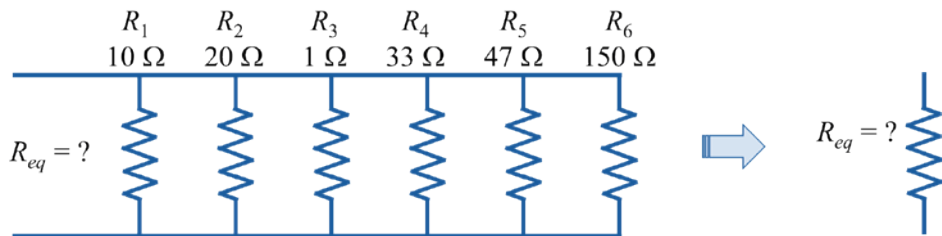
sustituimos los valores de las resistencias en la ecuación anterior

$$R_{eq} = \frac{(5 \Omega)(10 \Omega)}{5 \Omega + 10 \Omega}$$

y resulta nuevamente

$$R_{eq} = 3.333 \Omega$$

2)



Observemos que la menor de las resistencias vale 1Ω , por lo tanto, el resultado debería ser inferior a este valor.

Utilizando (2.3) tenemos

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}}$$

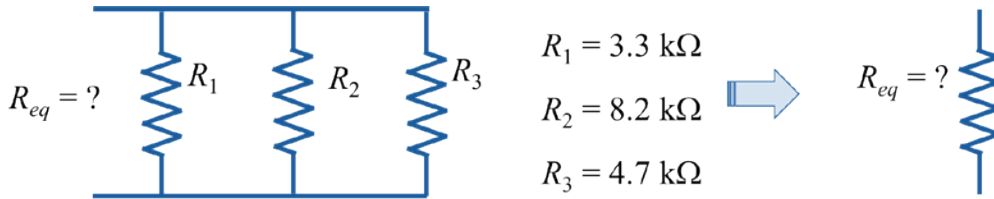
sustituimos los valores de cada resistencia

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{10 \Omega} + \frac{1}{20 \Omega} + \frac{1}{1 \Omega} + \frac{1}{33 \Omega} + \frac{1}{47 \Omega} + \frac{1}{150 \Omega}} = 1.2082462 \Omega^{-1}$$

y resulta

$$R_{eq} = 0.827,64 \Omega$$

3)



Utilizando (2.3) tenemos

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

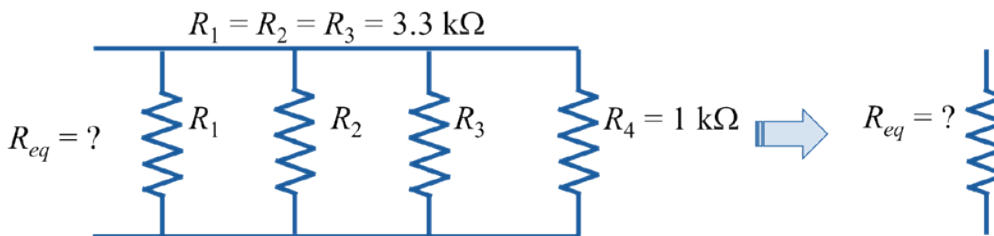
sustituimos los valores de cada resistencia

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{3.3 \text{ k}\Omega} + \frac{1}{8.2 \text{ k}\Omega} + \frac{1}{4.7 \text{ k}\Omega}} = \frac{1}{6.37747 \times 10^{-4} \Omega^{-1}}$$

y resulta

$$R_{eq} = 1,568.01 \Omega \approx 1.57 \text{ k}\Omega$$

4)



Utilizando (2.3) tenemos

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}}$$

sustituimos los valores de cada resistencia

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{3.3 \text{ k}\Omega} + \frac{1}{3.3 \text{ k}\Omega} + \frac{1}{3.3 \text{ k}\Omega} + \frac{1}{1 \text{ k}\Omega}}$$

y resulta

$$R_{eq} = 0.523,8 \text{ k}\Omega = 523.8 \text{ }\Omega$$

Hay ocasiones en las que, con una simple inspección del problema, se puede resolver mucho más rápido. Por ejemplo, en este caso se tienen conectadas tres resistencias iguales en paralelo ($n = 3$) (Figura 2.9) lo que sugiere que se pueden simplificar rápidamente con la ecuación (2.5).

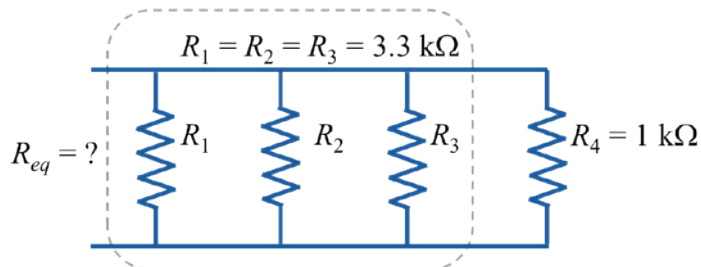


Figura 2.9. Tres resistencias iguales conectadas en paralelo con otra resistencia.

Una vez simplificadas las tres resistencias en una sola, a ésta la llamaremos R_a (se le puede asignar cualquier nombre) y estará conectada en paralelo con R_4 (Figura 2.10).

Utilizando la ecuación (2.5) tenemos

$$R_a = \frac{R_n}{n} = \frac{3.3 \text{ k}\Omega}{3} = 1.1 \text{ k}\Omega$$

Nos quedan sólo dos resistencias (Figura 2.10) las cuales se pueden simplificar más fácilmente.

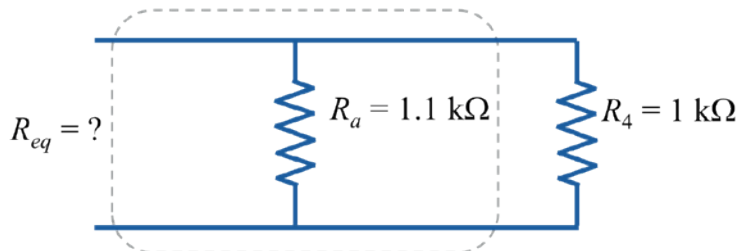


Figura 2.10. Circuito equivalente después de simplificar las tres resistencias iguales.

Utilizando la ecuación (2.4) tenemos

$$R_{eq} = \frac{R_a R_4}{R_a + R_4} = \frac{(1.1 \text{ k}\Omega)(1 \text{ k}\Omega)}{1.1 \text{ k}\Omega + 1 \text{ k}\Omega}$$

y resulta también

$$R_{eq} = 0.523,8 \text{ k}\Omega = 523.8 \text{ }\Omega$$

RESISTENCIAS EN CONEXIÓN MIXTA

La conexión mixta es la combinación de resistencias en serie con resistencias en paralelo. En la conexión mixta se puede tener cualquier cantidad de resistencias combinadas en serie y en paralelo. En la Figura 2.11 se observan algunos ejemplos de conexión mixta de resistencias.

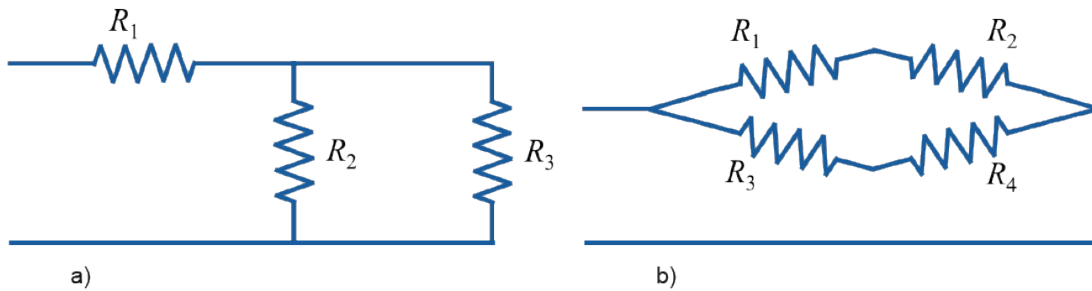


Figura 2.11. Ejemplos de arreglos de resistencias en conexión mixta.

Pasos para simplificar resistencias en conexión mixta

Se establece una secuencia de cuatro pasos para calcular la resistencia equivalente total en los arreglos de resistencias en conexión mixta. (Fuente: Adaptado de Unicrom, 2021)

Los pasos son los siguientes:

1. Identificar, marcar y nombrar los grupos de resistencias que se encuentran conectadas en serie y las que están conectadas en paralelo.
2. Calcular la resistencia equivalente de cada grupo.
3. Redibujar el nuevo arreglo de resistencias simplificado.
4. Una vez más, identificar nuevos grupos de resistencias en serie o paralelo, marcar y nombrar al nuevo grupo o grupos y continuar con en el paso 2 hasta que quede una sola resistencia total o equivalente.

Ejemplo 2-3. Calcular la resistencia equivalente R_{eq} o resistencia total R_T que se pide en cada caso.

- 1) Calcular la resistencia total o equivalente de la Figura 2.12.

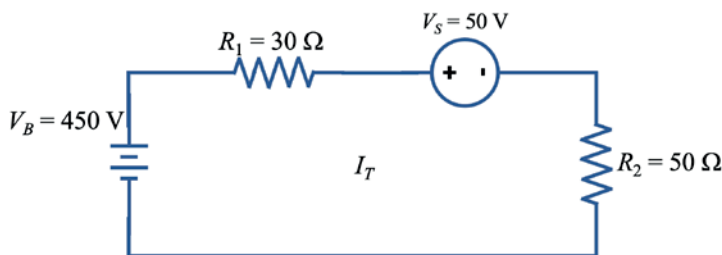


Figura 2.12. Cálculo de resistencia equivalente para arreglo de resistencias en conexión mixta.

Identificamos, marcamos y nombramos los grupos de resistencias que se encuentren conectados en serie o en paralelo.

En este caso identificamos que las resistencias R_2 y R_3 se encuentran en paralelo.

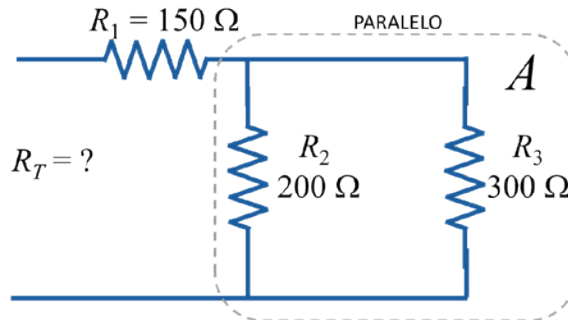


Figura 2.13. Identificación y marcado de resistencias.

Calculamos la resistencia equivalente de cada nuevo grupo identificado.

Utilizando la ecuación (2.4) resulta:

$$R_A = (R_2 \parallel R_3) = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

Sustituimos los valores y simplificamos

$$R_A = \frac{(200 \Omega)(300 \Omega)}{200 \Omega + 300 \Omega}$$

$$R_A = 120 \Omega$$

Redibujamos el nuevo arreglo de resistencias con sus nombres y valores.

El nuevo arreglo se muestra en la Figura 2.14a.

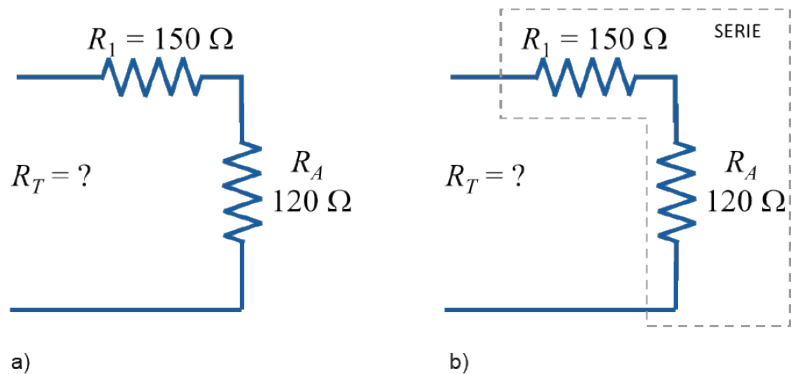


Figura 2.14. Arreglo redibujado con grupos de resistencias simplificadas.

Finalmente, solo quedan las resistencias R_1 y R_A ya que se encuentran en serie como se muestra en la Figura 2.14b y su resis-

tencia equivalente es directamente el valor de la resistencia total R_T del arreglo.

Utilizando la ecuación (2.1) resulta:

$$R_T = R_1 + R_A$$

Sustituimos los valores y simplificamos

$$R_T = 150 \Omega + 120 \Omega$$

$$R_T = 270 \Omega$$

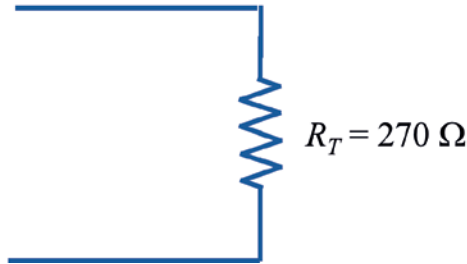


Figura 2.15. Resistencia total o equivalente.

2) Calcular la resistencia total o equivalente de la Figura 2.16.

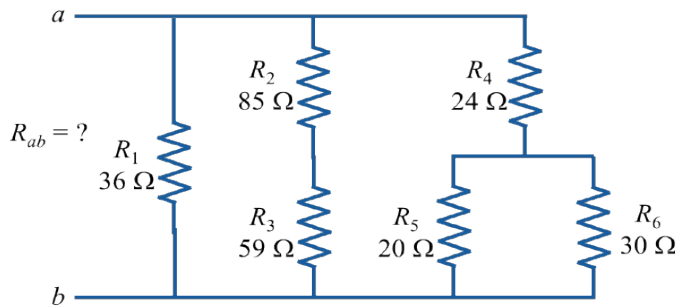


Figura 2.16. Cálculo de resistencia equivalente para arreglo de resistencias en conexión mixta.

Identificamos y marcamos grupos de resistencias en serie o paralelo.

En la Figura 2.17 se aprecian dos grupos, uno de resistencias en serie formado por R_2 y R_3 y otro de resistencias en paralelo entre R_5 y R_6 .

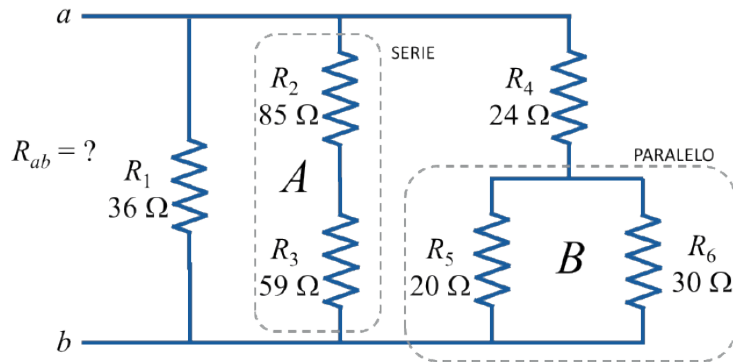


Figura 2.17. Asociación de resistencias en serie o paralelo.

Calculamos la resistencia equivalente de cada grupo identificado.

Con las ecuaciones (2.1) para resistencias en serie y (2.4) para resistencias en paralelo nos resulta:

$$R_A = R_2 + R_3 = 85 \, \Omega + 59 \, \Omega = 144 \, \Omega$$

$$R_B = (R_5 \parallel R_6) = \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6} = \frac{(20 \, \Omega)(30 \, \Omega)}{20 \, \Omega + 30 \, \Omega} = 12 \, \Omega$$

En la Figura 2.18 redibujamos el nuevo arreglo de resistencias con sus nombres y valores.

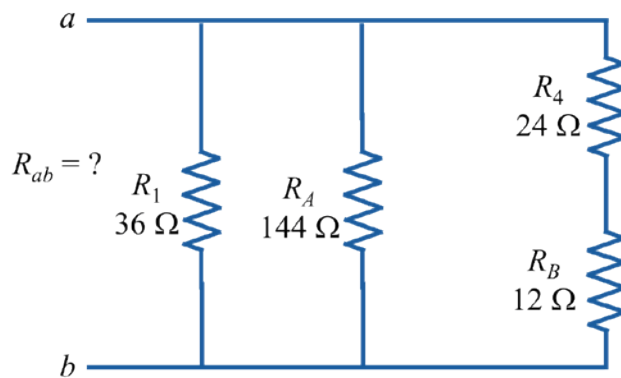


Figura 2.18. Arreglo simplificado de grupos de resistencias.

En la Figura 2.19 identificamos los nuevos grupos de resistencias R_1 y R_A en paralelo y R_4 y R_B en serie.

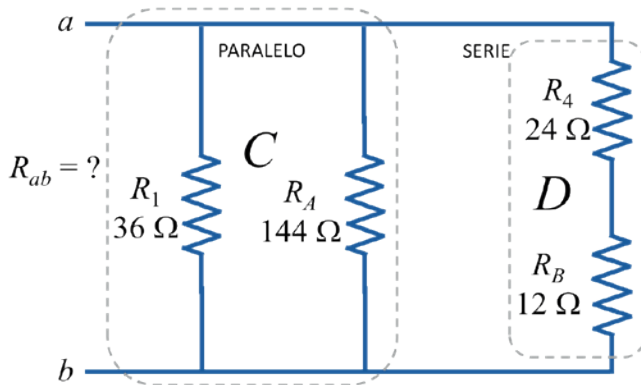


Figura 2.19. Nuevos grupos de resistencias formados.

Calculamos la resistencia equivalente de cada nuevo grupo identificado.

Con las ecuaciones (2.4) para resistencias en paralelo y (2.1) para resistencias en serie nos resulta:

$$R_C = (R_1 \parallel R_A) = \frac{R_1 R_A}{R_1 + R_A} = \frac{(36 \Omega)(144 \Omega)}{36 \Omega + 144 \Omega} = 28.8 \Omega$$

$$R_D = R_4 + R_B = 24 \Omega + 12 \Omega = 36 \Omega$$

En la Figura 2.20 redibujamos el nuevo arreglo de resistencias con sus nombres y valores. De este arreglo se aprecia que solo quedan dos resistencias conectadas en paralelo por lo que ya se puede calcular inmediatamente la resistencia equivalente R_{ab} , tal como se aprecia en la Figura 2.21.

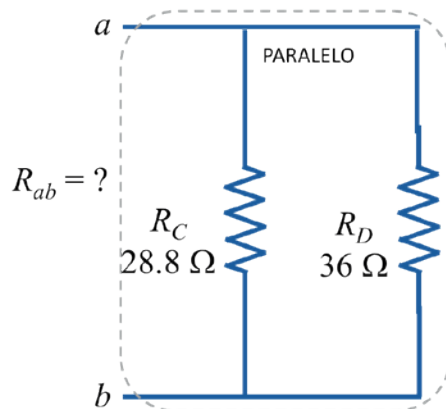


Figura 2.20. Arreglo final de resistencias para cálculo de resistencia equivalente total R_{ab}

Con la ecuación (2.4) resulta:

$$R_{ab} = (R_C \parallel R_D) = \frac{R_C R_D}{R_C + R_D} = \frac{(28.8 \Omega)(36 \Omega)}{28.8 \Omega + 36 \Omega}$$

$$R_{ab} = 16 \Omega$$

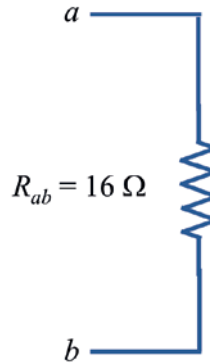


Figura 2.21. Resistencia equivalente total R_{ab}

LEY DE OHM

Georg Simon Ohm estableció la ley que lleva su nombre, ésta es la principal ley para el análisis de los circuitos eléctricos y establece que: *“La corriente en un circuito eléctrico, es directamente proporcional al voltaje e inversamente proporcional a la resistencia”* (Ruiza et al., 2004).

Matemáticamente la ley de Ohm se define por la ecuación (2.7) y en la Figura 2.22a se muestra cómo se aplica para una fuente de voltaje y una resistencia.

$$I = \frac{V}{R} \quad (2.7)$$

Donde:

I = Corriente en amperes (A)
 V = Voltaje en volts (V)
 R = Resistencia en ohms (Ω)

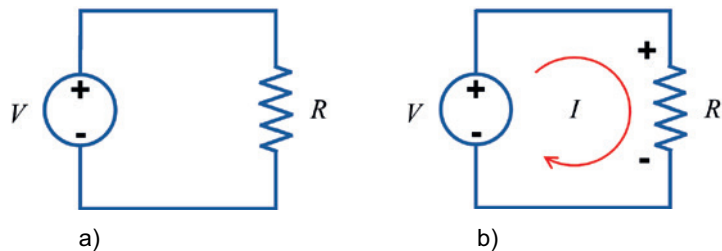


Figura 2.22. Ley de Ohm con la fuente de voltaje y una resistencia eléctrica.

Observe de la Figura 2.22a que la fuente de voltaje es el elemento activo (el que entrega energía al circuito) mientras que la resistencia es el elemento pasivo (el que consume la energía), ambos conectados a través de hilos conductores. En la Figura 2.22b se observa cómo se establece la dirección de la corriente y los signos del voltaje para la resistencia, respetando la convención de signos pasiva.

LEY DE OHM Y POTENCIA

Como ya se mencionó, la ley de Ohm es la principal ley para el análisis de los circuitos eléctricos. Cuando esta ley se combina con la fórmula de la potencia para analizar resistencias, entonces surgen nuevas ecuaciones que relacionan con mayor facilidad la potencia en una resistencia con el voltaje aplicado o con la corriente que circula a través de ellas.

De la ecuación (1.1) para calcular la potencia eléctrica tenemos que:

$$P = VI$$

Donde:

P = Potencia en watts (W)

V = Voltaje en volts (V)

I = Corriente en amperes (A)

Si sustituimos la ecuación (2.7) directamente en la ecuación (1.1) de la potencia, entonces resulta la fórmula que relaciona la potencia, con el valor de una resistencia y su voltaje aplicado, tal como queda expresado en la ecuación (2.8).

$$P = VI = V \left(\frac{V}{R} \right) = \frac{V^2}{R}$$

$$\therefore P = \frac{V^2}{R} \quad (2.8)$$

De la misma manera, si despejamos el voltaje V de la ecuación (2.7) obtendremos como resultado la ecuación (2.9); al sustituir los datos en la ecuación (1.1) de la potencia, entonces resultará una fórmula que relaciona directamente la potencia con el valor de una resistencia y la corriente que circula a través de ella, tal como queda expresado en la ecuación (2.10).

$$V = IR \quad (2.9)$$

Sustituimos la ecuación (2.9) en la ecuación (1.1) de potencia y resulta la ecuación (2.10):

$$P = VI = (IR)I = I^2R$$

$$\therefore P = I^2R \quad (2.10)$$

LEY DE OHM Y CIRCUITOS SIMPLES

Los circuitos más simples de resolver son aquellos en los que se tienen únicamente resistencias y en los que se involucra una sola fuente de alimentación. A continuación, se presenta una serie de ejemplos resueltos que te ayudarán a comprender cómo resolver un circuito eléctrico y cómo calcular el o los parámetros que se te pidan.

Ejemplo 2-4. Calcular la potencia que consume la resistencia del circuito en la Figura 2.23.

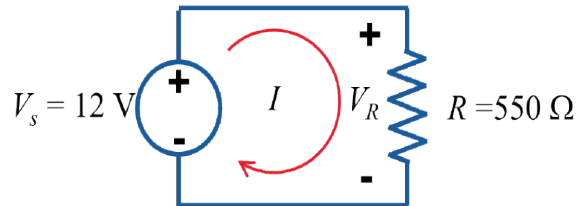


Figura 2.23. Circuito para calcular potencia.

Solución.

Observamos que el voltaje aplicado a la resistencia es el mismo que el de la fuente de alimentación, por lo tanto, con la ecuación (2.8), para calcular la potencia de la resistencia con un voltaje aplicado, queda:

$$P = \frac{V_s^2}{R} = \frac{V_R^2}{R} = \frac{(12 \text{ V})^2}{550 \Omega}$$

$$P = 0.261,818 \text{ W}$$

$$P = 261.818 \text{ mW}$$

Ejemplo 2-5. Calcular la corriente que circula a través de la resistencia en la Figura 2.24 y expresar el resultado en mA y μA .

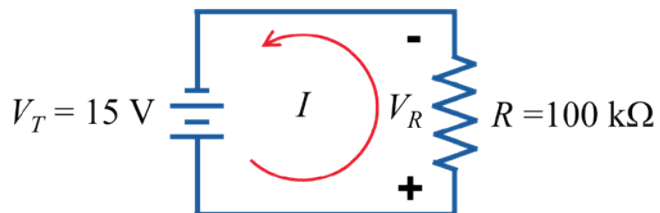


Figura 2.24. Circuito para calcular corriente.

Solución:

Aplicamos la ecuación (2.7) de la ley de Ohm quedando:

$$I = \frac{V_T}{R} = \frac{15 \text{ V}}{100 \times 10^3 \Omega}$$

En amperes $I = 0.000,15 \text{ A}$

En miliamperes $I = 0.15 \text{ mA}$

En microamperes $I = 150 \mu\text{A}$

Ejemplo 2-6. Un calentador de agua de inmersión está construido básicamente por una resistencia eléctrica que se conecta a la red eléctrica de 127 V y consume una potencia promedio de 2000 W. Preguntas:

¿Cuál será el valor de la resistencia?
¿Cuánta será la corriente que demanda de la red eléctrica cada vez que se conecta?



Figura 2.25. Calentador de agua de inmersión (Fuente: Jaramillo, 2021).

Solución.

- a) Utilizando la ecuación (2.8) para despejar la resistencia resulta la ecuación (2.11)

$$P = \frac{V^2}{R}$$

Despejamos:

$$R = \frac{V^2}{P} \quad (2.11)$$

Sustituimos los valores de voltaje y potencia, resultando:

$$R = \frac{(127 \text{ V})^2}{2,000 \text{ W}}$$

$$R = 8.064 \Omega$$

- a) La corriente se puede calcular con la ecuación (2.7) de ley de Ohm o despejándola de la ecuación (1.1) de la potencia. Con esta última opción tenemos:

$$P = VI$$

$$I = \frac{P}{V} \quad (2.12)$$

Sustituimos los valores de potencia y voltaje, resultando:

$$I = \frac{2,000 \text{ W}}{127 \text{ V}}$$

$$I = 15.748 \text{ A}$$

Ejemplo 2-7. Para el circuito mostrado en la Figura 2.26 calcular:

- a) La potencia que entrega la fuente de corriente.
b) El voltaje que se está aplicando a la resistencia R .

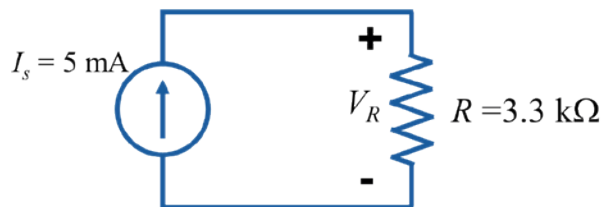


Figura 2.26. Circuito formado por una fuente de corriente y una resistencia.

Solución.

- a) Toda la potencia que está entregando la fuente de corriente es la misma que está consumiendo la resistencia, por lo tanto, si se calcula la potencia en la resistencia, entonces estamos calculando también la potencia de la fuente de corriente.

Dado que la corriente que entrega la fuente es la misma que circula a través de la resistencia, entonces utilizamos la ecuación (2.10) para calcular la potencia, resultando:

$$P = I_s^2 R = (5 \times 10^{-3} \text{ A})^2 (3.3 \times 10^3 \Omega)$$

$$P = 0.082,5 \text{ W}$$

$$P = 82.5 \text{ mW}$$

- b) Para calcular el voltaje en la resistencia utilizamos la ecuación (2.9) de la ley de Ohm quedando:

$$V_R = I_S R = (5 \times 10^{-3} \text{ A})(3.3 \times 10^3 \Omega)$$

$$V_R = 16.5 \text{ V}$$

Ejemplo 2-8. Para el circuito de la Figura 2.27 calcular el valor de la resistencia que consume o demande una corriente de 380 mA de la fuente de alimentación de 5 V.

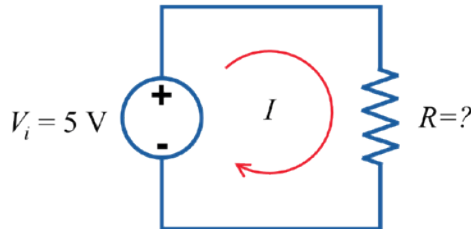


Figura 2.27. Circuito para calcular resistencia.

Solución.

Ya que tenemos el voltaje y la corriente que se quiere que circule en el circuito, con la ecuación (2.7) de la ley de Ohm despejamos la resistencia, quedando:

$$I = \frac{V}{R}$$

$$R = \frac{V}{I} \quad (2.13)$$

Sustituimos los valores y resulta:

$$R = \frac{V_i}{I} = \frac{5 \text{ V}}{0.38 \text{ A}}$$

$$R = 13.157 \Omega$$

Ejemplo 2-9. Una autoclave es un recipiente metálico de paredes gruesas con cierre hermético que permite trabajar con vapor de agua a alta presión y a alta temperatura, que sirve para esterilizar instrumental (material médico, de laboratorio, etc.) o alimentos. El vapor se produce básicamente a partir de resistencias eléctricas y los hay en potencias que van desde 1,350 W hasta 3,000 W (TuttNauer, 2009). Se pueden encontrar para voltajes de 120 volts o 230 volts. ¿Cuál es la corriente máxima y la corriente mínima que puede consumir este tipo de autoclave?



Figura 2.28. Autoclave para esterilización de instrumental médico. (Fuente: (TuttNauer, 2009))

Solución.

Utilizando la ecuación (2.12) se puede deducir que la máxima potencia y el mínimo voltaje producirán la máxima corriente y que la mínima potencia y el máximo voltaje producirán la mínima corriente quedando:

$$I_{max} = \frac{P_{max}}{V_{min}}$$

$$I_{max} = \frac{3,000 \text{ W}}{120 \text{ V}} = 25 \text{ A}$$

$$I_{min} = \frac{P_{min}}{V_{max}}$$

$$I_{min} = \frac{1,350 \text{ W}}{230 \text{ V}} = 5.869 \text{ A}$$

Ejemplo 2-10. Para el circuito de la Figura 2.29 calcular:

- La corriente.
- La potencia en la resistencia R .



Figura 2.29. Circuito para calcular corriente y potencia.

Solución.

- Comenzamos trazando la dirección de la corriente y los signos de voltaje en la resistencia. La convención pasiva de signos establece que la corriente positiva sale por la terminal positiva de la fuente de alimentación (Figura 2.30).

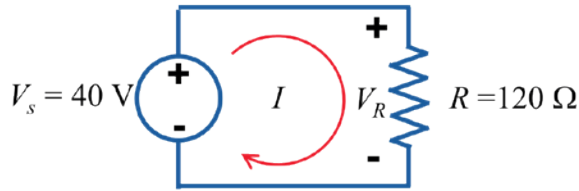


Figura 2.30. Dirección de la corriente positiva y signos del voltaje en la resistencia.

Se observa que el voltaje de la resistencia V_R es el mismo que la fuente de alimentación V_s ya que ambos elementos se encuentran conectados en paralelo.

Por lo tanto, para calcular la corriente en la resistencia, aplicamos la ley de Ohm con la ecuación (2.5) resultando:

$$I = \frac{V_s}{R}$$

$$I = \frac{40 \text{ V}}{120 \Omega} = 0.333,3 \text{ A}$$

$$I = 333.33 \text{ mA}$$

$$P = VI$$

$$P = (40 \text{ V})(0.333,3 \text{ A}) = 13.33 \text{ W}$$

- a) Para calcular la potencia en la resistencia podemos aplicar cualquiera de las tres ecuaciones (1.1), (2.8) o (2.10). En este caso calcularemos la potencia utilizando la ecuación (1.1), dejando al estudiante que compruebe el resultado con las otras dos ecuaciones.

$$P = VI = (40 \text{ V})(0.333,3 \text{ A}) = 13.33 \text{ W}$$

Ejemplo 2-11. En la Figura 2.31 se sabe que la potencia que está entregando la fuente de corriente es de 7 W, calcular:

- El voltaje aplicado a la resistencia.
- La corriente que entrega la fuente de alimentación.



Figura 2.31. Cálculo de voltaje y corriente.

Solución.

- a) Antes de comenzar a resolver el circuito, dibujamos la dirección de la corriente y colocamos los signos del voltaje de acuerdo con la convención pasiva de signos. Incluimos los nombres de los elementos del circuito que ya se tienen y colocamos los que faltan incluyendo las incógnitas de los valores buscados. En la Figura 2.32 se muestra cómo queda completado el circuito con toda la información disponible para comenzar a resolverlo.

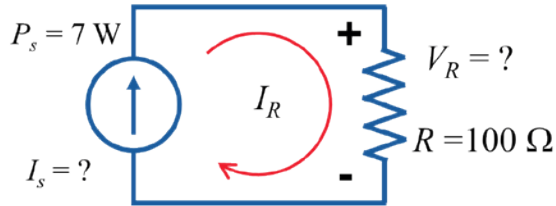


Figura 2.32. Circuito completado con la información proporcionada, colocación de signos e identificación de incógnitas.

Obsérvese que estrictamente no hemos comenzado a resolver el circuito, es decir, hacer cálculos, sólo lo preparamos para tener toda la información a la mano y saber qué decisión tomar para calcular lo que se pide del problema.

Ya que conocemos la potencia de la fuente, y dado que debe ser la misma que consume la resistencia, por ser el único elemento conectado a la fuente, entonces podemos utilizar la ecuación (2.8) que relaciona la potencia, el voltaje y la resistencia.

La ecuación con los nombres de las variables del problema queda:

$$P_s = \frac{V_R^2}{R}$$

Despejamos el voltaje V_R de la ecuación y resulta:

$$V_R = \sqrt{PR} \quad (2.14)$$

Sustituimos los valores del problema en la ecuación (2.14) quedando:

$$V_R = \sqrt{(7 \text{ W})(100 \Omega)} = \sqrt{700 \text{ V}^2}$$

$$V_R = 26.457 \text{ V}$$

Ahora, ya con el valor del voltaje, se puede calcular la corriente que circula por la resistencia; como es la misma que circula por la fuente de alimentación, entonces habremos terminado el problema.

Con la ecuación (2.7) de la ley de Ohm resulta:

$$I_s = I_R = \frac{V_R}{R}$$

Sustituimos los valores quedando:

$$I_s = \frac{26.457 \text{ V}}{100 \Omega} = 0.264,57 \text{ A}$$

$$I_s = 264.57 \text{ mA}$$

CIRCUITOS EN SERIE Y SUS CARACTERÍSTICAS

Un circuito en serie es aquel que está formado por elementos que se conectan uno detrás de otro para brindar un solo camino por el cual circule la corriente eléctrica. La Figura 2.33 muestra un circuito en serie formado por una fuente de alimentación y varias resistencias.

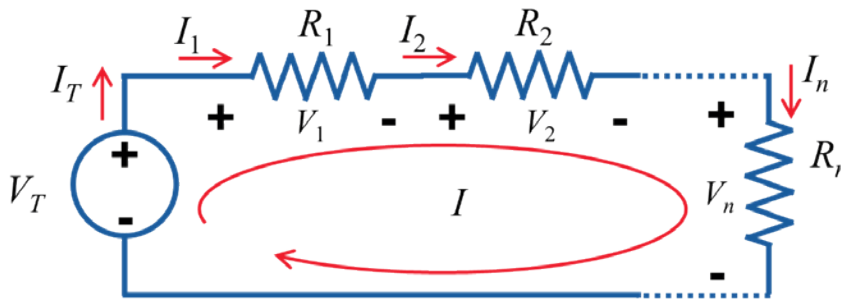


Figura 2.33 Ejemplo de circuito serie de resistencias.

Observemos que se especifica para la fuente y para cada resistencia su respectiva corriente ($I_T, I_1, I_2, \dots, I_n$) y su respectivo voltaje ($V_T, V_1, V_2, \dots, V_n$). Con estas especificaciones, es posible explicar cuáles son las características principales de los circuitos eléctricos en serie.

Características de los circuitos en serie

De acuerdo a Zapata (2021), las principales características son:

1. La corriente es la misma para todos los elementos del circuito que lo integran.

$$I_T = I_1 = I_2 = \dots = I_n \quad (2.15)$$

2. Si el circuito se abre o se daña en cualquiera de los elementos, entonces deja de circular la corriente para todos los elementos conectados.

$$I_s = I_1 = I_2 = \dots = I_n = 0 \text{ A} \quad (2.16)$$

3. La resistencia total del circuito en serie es exactamente igual que la ecuación (2.1) para arreglos de resistencias en serie.

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

4. Si sólo hay una fuente de voltaje conectada en el circuito, entonces la suma de todos los voltajes en las resistencias es igual al voltaje de la fuente.

$$V_T = V_1 + V_2 + \dots + V_n \quad (2.17)$$

A continuación, se presentan una serie de ejercicios resueltos que te ayudarán a comprender cómo resolver un circuito eléctrico en serie y cómo calcular el o los parámetros que se pidan.

En todo momento, debemos tener presentes las características de los circuitos serie, ya que la mayoría de las veces nos ayudan a simplificar enormemente el análisis del circuito.

Ejemplos. Calcular lo que se pida en cada ejercicio.

Ejemplo 2-12. En la Figura 2.34, calcular:

- La resistencia total del circuito.
- Determinar cuál de las resistencias tiene menor y mayor caída de tensión.
- La potencia de la fuente y de cada resistencia.
- Comparar la potencia de la fuente con la de las resistencias.

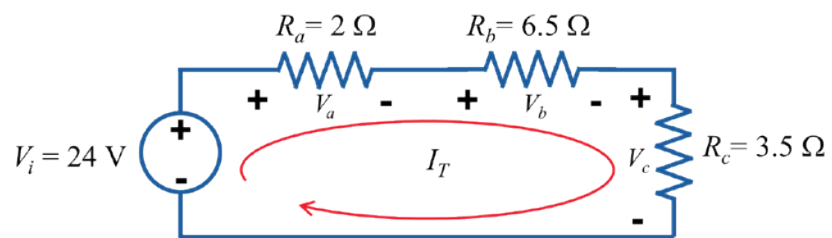


Figura 2.34. Circuito serie de una fuente y tres resistencias.

Solución.

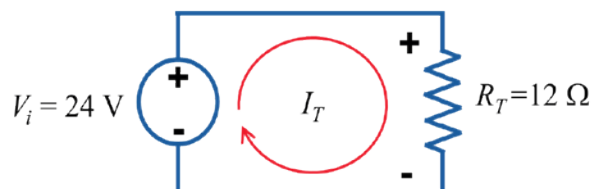
- Con la ecuación (2.1) calculamos la resistencia total.

$$R_T = R_a + R_b + R_c$$

$$R_T = 2\ \Omega + 6.5\ \Omega + 3.5\ \Omega$$

$$R_T = 12\ \Omega$$

- Para calcular la caída de tensión o voltaje en cada resistencia, es necesario conocer primero la corriente que circula a través de ellas. Para conocer esta corriente, construimos el circuito equivalente con la resistencia total.



Calculamos la corriente total, que es la misma para todas las resistencias al estar conectadas en serie.

$$I_T = \frac{V_i}{R_T} = \frac{24 \text{ V}}{12 \Omega} = 2 \text{ A}$$

$$I_T = 2 \text{ A}$$

Para saber cuál resistencia tiene menor o mayor caída de tensión (voltaje), entonces calculamos el voltaje en cada una de ellas y los comparamos entre sí.

$$V_a = I_T R_a = (2 \text{ A})(2 \Omega) = 4 \text{ V}$$

$$V_b = I_T R_b = (2 \text{ A})(6.5 \Omega) = 13 \text{ V}$$

$$V_c = I_T R_c = (2 \text{ A})(3.5 \Omega) = 7 \text{ V}$$

Observamos que la menor de las resistencias tiene la menor caída de tensión (4 V) mientras que la mayor de las resistencias tiene la mayor caída de tensión (13 V).

- c) Calculamos la potencia de la fuente con la corriente y el voltaje totales quedando.

$$P_T = I_T V_T = (2 \text{ A})(24 \text{ V}) = 48 \text{ W}$$

Ahora calculamos la potencia en cada resistencia con la ecuación (2.10), aprovechamos que la corriente es la misma para todas ellas, resultando.

$$P_a = I_T^2 R_a = (2 \text{ A})^2 (2 \Omega) = 8 \text{ W}$$

$$P_b = I_T^2 R_b = (2 \text{ A})^2 (6.5 \Omega) = 26 \text{ W}$$

$$P_c = I_T^2 R_c = (2 \text{ A})^2 (3.5 \Omega) = 14 \text{ W}$$

- d) Sumamos las potencias de las resistencias y la comparamos con la potencia de la fuente de alimentación.

$$P_T = P_a + P_b + P_c$$

$$48 \text{ W} = 8 \text{ W} + 26 \text{ W} + 14 \text{ W}$$

$$48 \text{ W} = 48 \text{ W}$$

La suma de la potencia de las resistencias es igual a la potencia de la fuente.

Ejemplo 2-13. En el circuito de la Figura 2.35, calcular:

- El valor de la resistencia R_3 .
- El voltaje V_1 si se sabe que la potencia que consume el circuito es de 495 W.

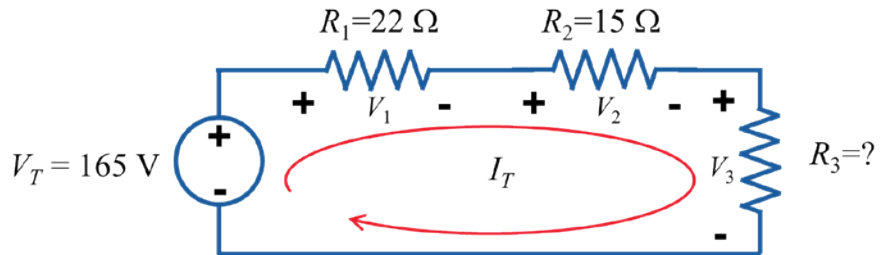


Figura 2.35. Circuito serie de una fuente y tres resistencias.

Solución.

La potencia que consumen las resistencias es igual a la potencia que entrega la fuente de alimentación; podemos utilizar este valor, junto con el voltaje de la fuente de alimentación, para calcular la resistencia total del circuito o la corriente total del circuito. La resistencia total nos servirá para calcular el valor de R_3 y la corriente total nos servirá para calcular el voltaje V_1 .

- Para calcular la resistencia total utilizamos la ecuación (2.8) de la potencia.

$$P_T = \frac{V_T^2}{R_T}$$

Despejamos el valor de la resistencia y nos queda:

$$R_T = \frac{V_T^2}{P_T} = \frac{(165\text{ V})^2}{495\text{ W}} = 55\ \Omega$$

Del cálculo de la resistencia total en serie despejamos R_3 y nos queda:

$$R_T = R_a + R_b + R_c$$

$$R_3 = R_T - R_1 - R_2$$

$$R_3 = 55\ \Omega - 22\ \Omega - 15\ \Omega = 18\ \Omega$$

- Para calcular la corriente total utilizamos la ecuación (1.1) con voltaje y corrientes totales.

$$P_T = V_T I_T$$

Despejamos la corriente y tenemos:

$$I_T = \frac{P_T}{V_T} = \frac{495\text{ W}}{165\text{ V}} = 3\text{ A}$$

Ya que la corriente es la misma para todos los elementos conectados en el circuito serie, de la ley de Ohm despejamos el voltaje V_1 quedando:

$$I_T = I_1 = \frac{V_1}{R_1}$$

Despejamos V_1 y resulta:

$$V_1 = I_T R_1 = (3 \text{ A})(22 \Omega) = 66 \text{ V}$$

Ejemplo 2-14. En el circuito de la Figura 2.36, calcular:

- El voltaje en la resistencia R_2 .
- El voltaje en los extremos de la fuente de alimentación para el sentido de la corriente positiva.

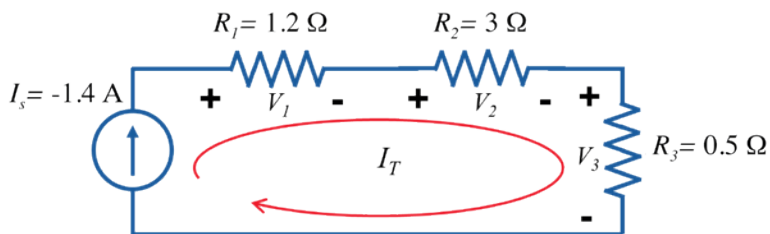


Figura 2.36. Circuito serie de una fuente de corriente y tres resistencias.

Solución.

Antes de resolver el ejemplo, tenemos que recordar que la corriente en serie es la misma para todos los elementos, por lo tanto:

$$I_T = I_s$$

- El problema es muy sencillo ya que, para calcular el voltaje de la resistencia R_2 , bastará sólo con aplicar la ley de Ohm para el voltaje quedando.

$$V_2 = I_s R_2 = (-1.4 \text{ A})(3 \Omega) = -4.2 \text{ V}$$

El valor negativo indica que el voltaje realmente tiene polaridad opuesta a la señalada en la figura.

- Para el voltaje total en la fuente, primero se obtiene la resistencia total sumando todas las resistencias y después se multiplica por la corriente de la fuente, tal como se aprecia en la Figura 2.37.

$$R_T = R_1 + R_2 + R_3$$

$$R_T = 1.2 \Omega + 3 \Omega + 0.5 \Omega = 4.7 \Omega$$

Pero el problema indica que se debe calcular el voltaje para la dirección de la corriente positiva, por lo tanto, y para conseguir que la corriente sea positiva, sólo tenemos que invertir el sentido

del flujo de la corriente en la fuente de alimentación, quedando como se indica en la Figura 2.38.

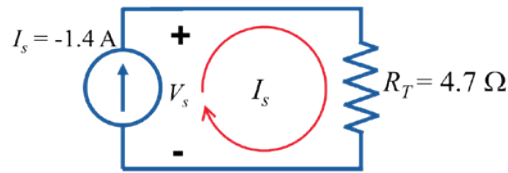


Figura 2.37. Circuito equivalente con fuente de corriente.

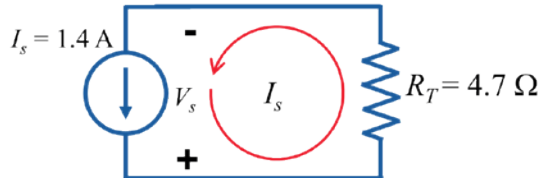


Figura 2.38. Circuito invirtiendo el sentido de la fuente de corriente para hacerla positiva.

Por lo tanto, el voltaje de la fuente resulta.

$$V_s = I_s R_T = (1.4 \text{ A})(4.7 \Omega) = 6.58 \text{ V}$$

Es muy importante notar que el voltaje es positivo y con la polaridad en los signos que se indican en la Figura 2.38.

CIRCUITOS EN PARALELO Y SUS CARACTERÍSTICAS

Un circuito paralelo es una conexión de dispositivos (resistencias, capacitores, bobinas, etc.) en la que todas las terminales de entrada de todos los dispositivos coinciden entre sí, al igual que todas sus terminales de salida. (Cabrerizo *et al.*, 2008). En un circuito en paralelo cada elemento está conectado de forma independiente a la fuente de alimentación, por lo tanto, tienen la misma tensión (“Circuito en paralelo”, 2014). En un circuito en paralelo, cuando la corriente sale de la fuente de alimentación sigue distintos caminos antes de regresar a la fuente.

El aspecto de un circuito en paralelo se muestra en la Figura 2.39. Observemos que se especifica para la fuente y para cada resistencia su respectiva corriente ($I_T, I_1, I_2, \dots, I_n$) y su respectivo voltaje ($V_T, V_1, V_2, \dots, V_n$). Con estas especificaciones, es posible explicar cuáles son las características principales de los circuitos eléctricos en paralelo.

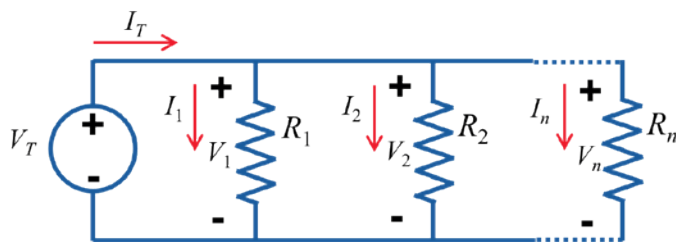


Figura 2.39. Circuito en paralelo de n -resistencias.

Características de la conexión en paralelo

1. La tensión o voltaje es el mismo en todos los elementos del circuito.

$$V_T = V_1 = V_2 = \dots = V_n \quad (2.18)$$

2. A cada uno de los caminos por los que puede seguir la corriente eléctrica se le denomina "rama".
3. La suma de las corrientes de rama es igual a la corriente total del circuito.

$$I_T = I_1 + I_2 + \dots + I_n \quad (2.19)$$

4. La resistencia total equivalente es menor que la menor de las resistencias del circuito.

A continuación, se presentan una serie de ejemplos resueltos que te ayudarán a comprender cómo resolver un circuito eléctrico en paralelo y cómo calcular el o los parámetros que se pidan. En todo momento, debemos tener presentes las características de los circuitos en paralelo, ya que la mayoría de las veces nos ayudan a simplificar enormemente el análisis del circuito.

Ejemplo 2-15. Del problema de la Figura 2.40, calcular:

- a) La resistencia total del circuito.
- b) ¿Cuál de las resistencias tiene menor y mayor corriente?
- c) La potencia de la fuente y de cada una de las resistencias.
- d) Comparar la potencia de la fuente con la de las resistencias.

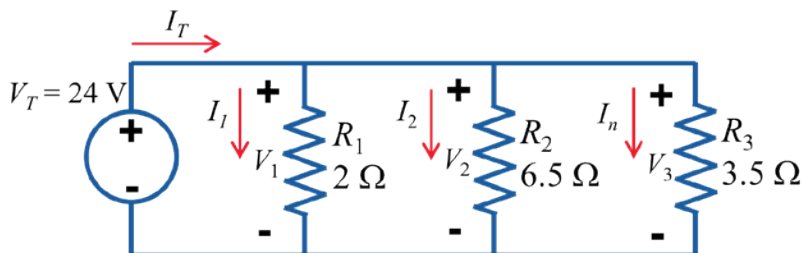


Figura 2.40. Circuito paralelo de una fuente y tres resistencias.

Solución.

- a) Calculamos la resistencia equivalente utilizando la ecuación (2.3) de resistencias en paralelo.

$$R_T = \frac{1}{\frac{1}{2 \Omega} + \frac{1}{6.5 \Omega} + \frac{1}{3.5 \Omega}}$$

Y resulta

$$R_T = 1.064 \Omega$$

- b) Para saber cuál resistencia tiene mayor y menor corriente, es necesario que calculemos las corrientes de las resistencias con la ecuación (2.7) de la ley de Ohm.

$$I_1 = \frac{V_T}{R_1} = \frac{24 \text{ V}}{2 \Omega} = 12 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{V_T}{R_2} = \frac{24 \text{ V}}{6.5 \Omega} = 3.692 \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{V_T}{R_3} = \frac{24 \text{ V}}{3.5 \Omega} = 6.857 \text{ A}$$

Observemos que la corriente mayor corresponde para la menor de las resistencias, mientras que la mayor de las corrientes corresponde para la resistencia de menor valor.

- c) Para calcular la potencia de la fuente y de cada resistencia, podemos utilizar la ecuación (2.8) de la potencia.

$$P_T = \frac{V_T^2}{R_T} = \frac{(24 \text{ V})^2}{1.064 \Omega} = 541.353 \text{ W} \quad P_2 = \frac{V_2^2}{R_2} = \frac{(24 \text{ V})^2}{6.5 \Omega} = 88.615 \text{ W}$$

$$P_1 = \frac{V_1^2}{R_1} = \frac{(24 \text{ V})^2}{2 \Omega} = 288 \text{ W} \quad P_3 = \frac{V_3^2}{R_3} = \frac{(24 \text{ V})^2}{3.5 \Omega} = 164.571 \text{ W}$$

- d) Sumamos la potencia de las resistencias y la comparamos con la potencia de la fuente de alimentación.

$$P_T = P_1 + P_2 + P_3$$

$$541.353 \text{ W} \approx 288 \text{ W} + 88.615 \text{ W} + 164.571 \text{ W}$$

$$541.353 \text{ W} \approx 541.18 \text{ W}$$

Se observa que prácticamente la suma de la potencia de las resistencias es igual a la potencia de la fuente de alimentación.

Ejemplo 2-16. Del problema de la Figura 2.41, calcular:

- La resistencia total del circuito.
- El voltaje V_x .
- La corriente en cada resistencia y compruebe que la suma de todas ellas es la corriente total.
- La potencia de cada una de las resistencias y de la fuente.
- Comparar la potencia de la fuente con la de las resistencias.

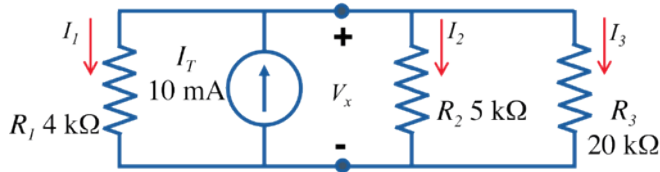


Figura 2.41. Circuito paralelo de una fuente de corriente y tres resistencias.

Solución.

- a) Calculamos la resistencia equivalente utilizando la ecuación (2.3).

$$R_T = \frac{1}{\frac{1}{4 \text{ k}\Omega} + \frac{1}{5 \text{ k}\Omega} + \frac{1}{20 \text{ k}\Omega}}$$

$$R_T = 2 \text{ k}\Omega$$

Y el circuito que resulta se muestra en la Figura 2.42.

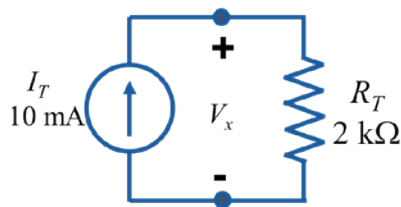


Figura 2.42. Circuito equivalente con una resistencia.

- b) Para calcular el voltaje V_x lo hacemos con la ley de Ohm despejando el voltaje.

$$V_x = I_T R_T = (10 \text{ mA})(2 \text{ k}\Omega)$$

$$V_x = 20 \text{ V}$$

- c) La corriente de cada resistencia se calcula con la ley de Ohm.

$$I_1 = \frac{V_x}{R_1} = \frac{20 \text{ V}}{4 \text{ k}\Omega} = 0.005 \text{ A} = 5 \text{ mA}$$

$$I_2 = \frac{V_x}{R_2} = \frac{20 \text{ V}}{5 \text{ k}\Omega} = 0.004 \text{ A} = 4 \text{ mA}$$

$$I_3 = \frac{V_x}{R_3} = \frac{20 \text{ V}}{20 \text{ k}\Omega} = 0.001 \text{ A} = 1 \text{ mA}$$

Las sumamos y comparamos.

$$I_1 + I_2 + I_3 = I_T$$

$$5 \text{ mA} + 4 \text{ mA} + 1 \text{ mA} = 10 \text{ mA}$$

$$\therefore 10 \text{ mA} = 10 \text{ mA}$$

Observamos que se cumple que la corriente total es la suma de las corrientes de todas las ramas del circuito en paralelo.

- d) Para calcular la potencia de la fuente y de cada resistencia, utilizamos la ecuación (2.8) de la potencia.

$$P_1 = \frac{V_x^2}{R_1} = \frac{(20 \text{ V})^2}{4 \text{ k}\Omega} = 0.1 \text{ W} = 100 \text{ mW}$$

$$P_2 = \frac{V_x^2}{R_2} = \frac{(20 \text{ V})^2}{5 \text{ k}\Omega} = 0.08 \text{ W} = 80 \text{ mW}$$

$$P_3 = \frac{V_x^2}{R_3} = \frac{(20 \text{ V})^2}{20 \text{ k}\Omega} = 0.02 \text{ W} = 20 \text{ mW}$$

Para calcular la potencia de la fuente de corriente lo hacemos con la ecuación (1.1) de la potencia.

$$P_T = V_T I_T = (20 \text{ V})(10 \text{ mA}) = 200 \text{ mW}$$

- e) Sumamos la potencia en las resistencias y la comparamos con la potencia de la fuente de alimentación.

$$P_T = P_1 + P_2 + P_3$$

$$200 \text{ mW} = 100 \text{ mW} + 80 \text{ mW} + 20 \text{ mW}$$

$$\therefore 200 \text{ mW} = 200 \text{ mW}$$

La potencia que se consume en las resistencias es igual a la potencia que entrega la fuente de alimentación.

CIRCUITOS EN CONEXIÓN MIXTA Y SUS CARACTERÍSTICAS

Un circuito en conexión mixta es aquel en el que una parte de las resistencias está conectada en serie y otra parte lo está en paralelo. No hay regla para establecer cómo construir un circuito mixto. Para resolver este tipo de circuitos, se aplican las reglas de solución de los circuitos en serie y de los circuitos en paralelo de forma combinada o alternada (ElectronicaOnline, 2020).

El aspecto de un circuito mixto se muestra en la Figura 2.43.

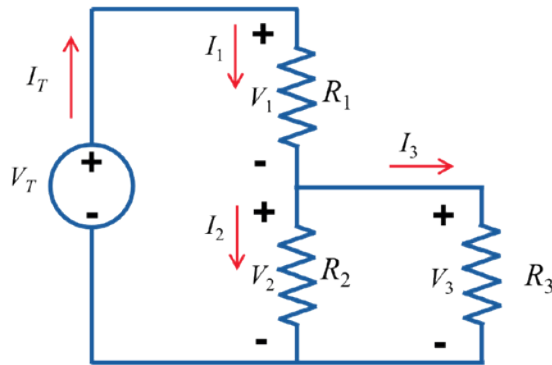


Figura 2.43. Circuito mixto de resistencias.

Características de la conexión mixta

1. Está compuesta por arreglos de resistencias en serie y/o paralelo.
2. El voltaje en cada punto de conexión varía dependiendo de las caídas de tensión en cada resistencia.
3. La corriente también varía dependiendo de la conexión.
4. La resistencia equivalente se obtiene con las fórmulas de resistencias en serie y en paralelo de forma combinada o alternada.

A continuación, se presenta una serie de ejemplos resueltos que te ayudarán a comprender cómo resolver un circuito eléctrico mixto y cómo calcular el o los parámetros que se pidan. Es importante tener presentes las características de los circuitos serie y de los circuitos en paralelo ya que éstas serán las bases principales para poder resolver los mixtos.

Ejemplo 2-17. Del circuito de la Figura 2.44, calcular:

- a) La resistencia total del circuito.
- b) La corriente total.
- c) El voltaje V_A y el Voltaje V_B .
- d) La corriente en cada resistencia.
- e) La potencia de la fuente, la potencia de todas las resistencias y compararlas.

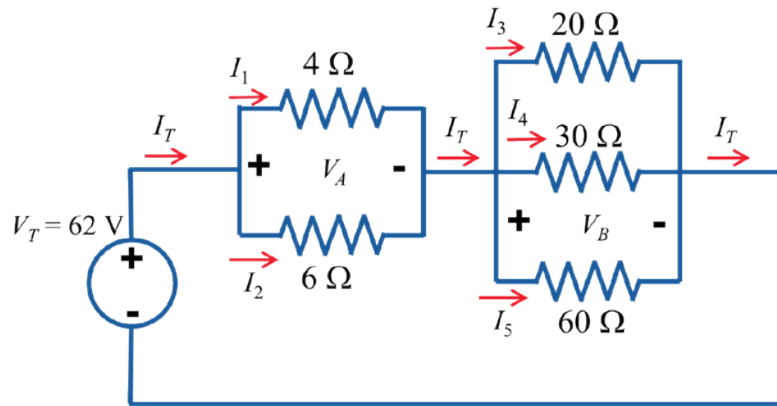


Figura 2.44. Circuito mixto de resistencias.

Solución.

- a) Identificamos dos grupos de resistencias en paralelo, uno de dos y otro de tres resistencias, los cuales reducimos por separado con la ecuación (2.3).

$$R_A = \frac{1}{\frac{1}{4\ \Omega} + \frac{1}{6\ \Omega}}$$

$$R_B = \frac{1}{\frac{1}{20\ \Omega} + \frac{1}{30\ \Omega} + \frac{1}{60\ \Omega}}$$

$$R_A = 2.4\ \Omega$$

$$R_B = 10\ \Omega$$

El circuito equivalente después de reducir los grupos de resistencias queda como se muestra en la Figura 2.45.

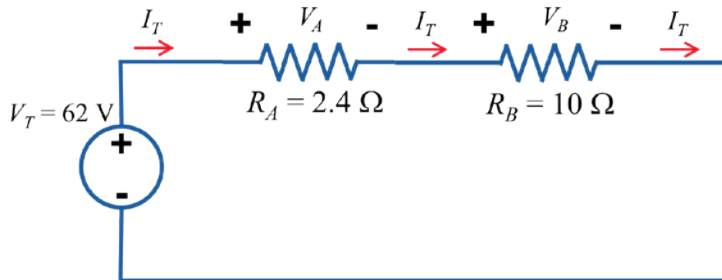


Figura 2.45. Circuito mixto en una primera simplificación.

Observamos que ahora se tienen dos resistencias conectadas en serie y por lo tanto el circuito se puede reducir con la ecuación (2.1) quedando como se aprecia en la Figura 2.46.

$$R_T = R_A + R_B = 2.4 \Omega + 10 \Omega$$

$$R_T = 12.4 \Omega$$

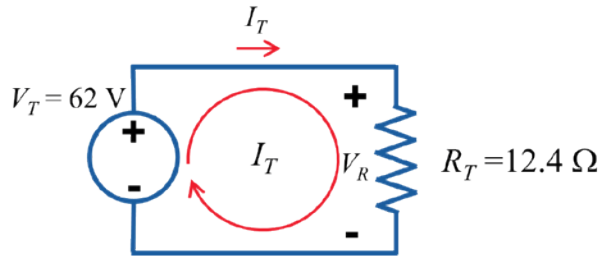


Figura 2.46. Circuito equivalente reducido a una sola resistencia.

- b) A partir de la Figura 2.46, la corriente total se calcula con la ley de Ohm (2.12) quedando.

$$I_T = \frac{V_T}{R_T} = \frac{62 \text{ V}}{12.4 \Omega}$$

$$I_T = \frac{V_T}{R_T} = 5 \text{ A}$$

- c) Los voltajes V_A y V_B se calculan con la corriente total y con la ayuda del circuito de la Figura 2.45. Ya que las resistencias se encuentran conectadas en serie, entonces la corriente total es la misma para las dos resistencias R_A y R_B . Luego, con la ley de Ohm para el voltaje –ecuación (2.9)– se calcula cada uno de los dos voltajes.

$$V_A = I_T R_A = (5 \text{ A})(2.4 \Omega) \quad V_B = I_T R_B = (5 \text{ A})(10 \Omega)$$

$$V_A = 12 \text{ V}$$

$$V_B = 50 \text{ V}$$

- d) Puesto que las resistencias están conectadas en paralelo, y el voltaje en paralelo es el mismo para todos los elementos que están conectados entre sí, entonces el voltaje V_A es el mismo para las resistencias de 4Ω y 6Ω . Lo mismo sucede con el voltaje V_B , es el mismo para las resistencias de 20Ω , 30Ω y 60Ω . Entonces, para calcular las corrientes en cada una de las resistencias les aplicamos la ley de Ohm con su respectivo voltaje.

$$I_1 = \frac{V_A}{4\Omega} = \frac{12\text{ V}}{4\Omega} = 3\text{ A}$$

$$I_3 = \frac{V_B}{20\Omega} = \frac{50\text{ V}}{20\Omega} = 2.5\text{ A}$$

$$I_2 = \frac{V_A}{6\Omega} = \frac{12\text{ V}}{6\Omega} = 2\text{ A}$$

$$I_4 = \frac{V_B}{30\Omega} = \frac{50\text{ V}}{30\Omega} = 1.666\text{ A}$$

$$I_5 = \frac{V_B}{30\Omega} = \frac{50\text{ V}}{60\Omega} = 0.833\text{ A}$$

e) Ya que disponemos de la información de voltajes y corrientes en todas las resistencias y en la fuente, entonces podemos calcular todas las potencias.

La potencia en las resistencias es:

$$P_2 = V_A I_2 = (12\text{ V})(2\text{ A}) = 24\text{ W}$$

$$P_1 = V_A I_1 = (12\text{ V})(3\text{ A}) = 36\text{ W}$$

$$P_4 = V_B I_4 = (50\text{ V})(1.666\text{ A}) = 83.33\text{ W}$$

$$P_2 = V_A I_2 = (12\text{ V})(2\text{ A}) = 24\text{ W}$$

$$P_3 = V_B I_3 = (50\text{ V})(0.833\text{ A}) = 41.66\text{ W}$$

La suma de las potencias en las resistencias es:

$$P_R = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = 309.999\text{ W}$$

La potencia en la fuente de voltaje es:

$$P_T = V_T I_T = (62\text{ V})(5\text{ A}) = 310\text{ W}$$

La potencia de las resistencias es igual a la potencia de la fuente.

Ejemplo 2-18. Del circuito de la Figura 2.47, calcular:

- El voltaje de la resistencia de $20\ \Omega$.
- La resistencia total del circuito.
- La potencia de la resistencia de $105\ \Omega$.

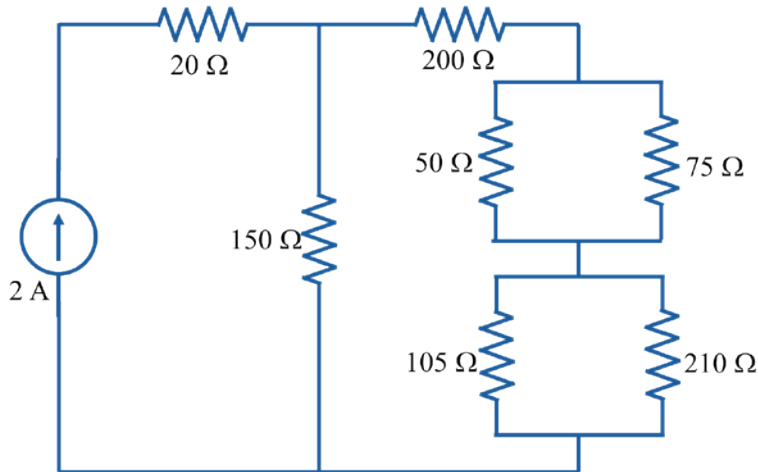


Figura 2.47. Circuito mixto de resistencias, únicamente con valores de fuente y resistencias.

Notas antes de comenzar

- Es muy común que se presente un circuito en estas condiciones, es decir, sólo con los valores de las resistencias, el valor de la fuente y con lo que se pida calcular, en este caso un voltaje, la resistencia total y una potencia.
- Antes de comenzar a resolver el circuito, te recomiendo que pongas nombre a todas las resistencias, esto te ayudará a saber qué es lo que necesitas calcular y te dará una idea de cómo comenzar a resolver el problema.
- Recuerda que los nombres tú los puedes escoger como mejor te parezca, pero es mejor si lo haces de forma ordenada, de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo, para que sepas ubicar rápidamente dónde se encuentra cada componente.
- De igual manera, marca las corrientes y sus direcciones, así como los voltajes y sus polaridades, recuerda hacerlo con la convención pasiva de signos.
- Una vez hecho esto, puedes empezar a resolver el circuito y tomar las decisiones de cómo y por dónde comenzar.
- En la Figura 2.48 te propongo una sugerencia de cómo se pueden nombrar todos los elementos del circuito.

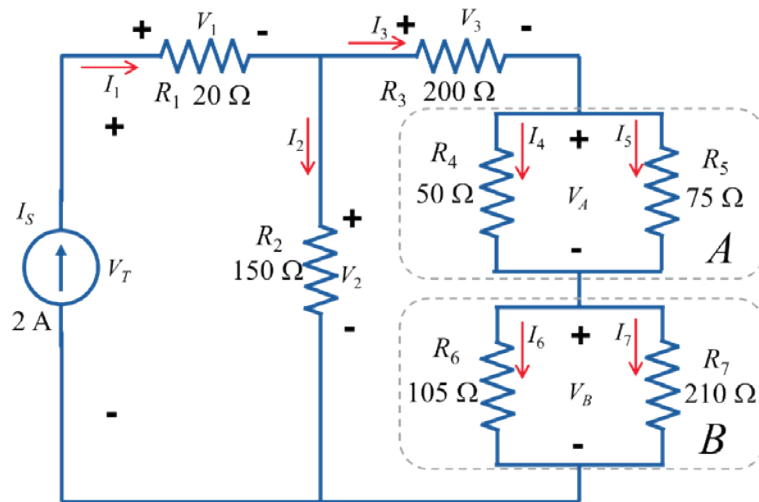


Figura 2.48. Circuito mixto en el que se definen las corrientes y voltajes para todos sus componentes.

- En otras circunstancias, es aquí donde comenzaría el problema y donde simplemente se nos pediría el voltaje V_1 , la resistencia total R_T y la potencia en R_6 .
- Observa que para las resistencias R_4 y R_5 definí un solo voltaje, el cual llamé V_A , ya que se encuentran conectadas en paralelo y el voltaje es el mismo para las dos. Lo mismo ocurrió para las resistencias R_6 y R_7 donde solo definí el voltaje V_B .

Solución.

- a) El voltaje de la resistencia de 20Ω con la nomenclatura que sugerí corresponde a V_1 . Observa con atención porque la fuente de corriente I_S y la resistencia R_1 están conectadas en serie. Esto significa que la corriente de la fuente es igual a la corriente de la resistencia R_1 y, por lo tanto, el voltaje V_1 se puede calcular inmediatamente con la ley de Ohm para el voltaje con la ecuación (2.9) quedando.

$$V_1 = I_1 R_1 = I_S R_1 = (2 \text{ A})(20 \Omega)$$

$$V_1 = 40 \text{ V}$$

- b) Para calcular la resistencia equivalente, observamos que las resistencias R_4 y R_5 están conectadas en paralelo del mismo modo que lo están las resistencias R_6 y R_7 . Entonces iniciamos simplificando estos arreglos con la ecuación (2.4) para dos resistencias en paralelo quedando.

$$R_A = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} = \frac{(50 \Omega)(75 \Omega)}{50 \Omega + 75 \Omega} \quad R_B = \frac{R_6 R_7}{R_6 + R_7} = \frac{(105 \Omega)(210 \Omega)}{105 \Omega + 210 \Omega}$$

$$R_A = 30 \Omega$$

$$R_B = 70 \Omega$$

El circuito se simplifica (Figura 2.49) y ahora quedan conectadas las resistencias R_3 , R_A y R_B en serie, resistencia que llamaré R_C .

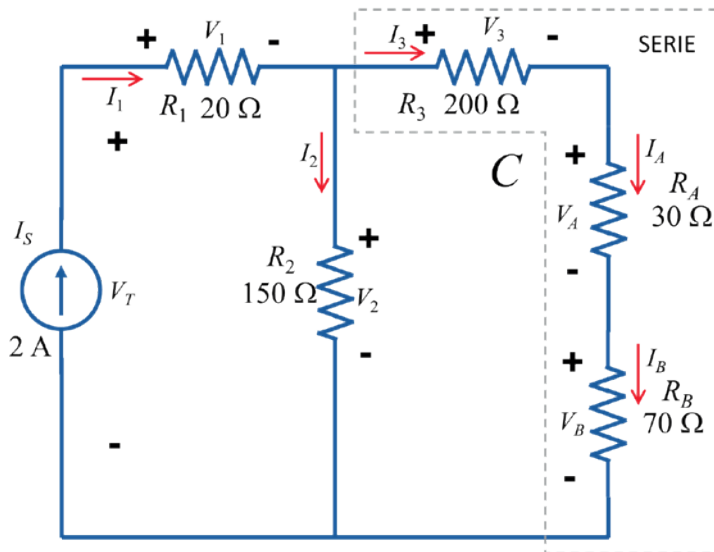


Figura 2.49. Circuito equivalente después de reducir dos grupos de resistencias en paralelo.

$$R_C = R_3 + R_A + R_B = 200 \Omega + 30 \Omega + 70 \Omega$$

$$R_C = 300 \Omega$$

Al simplificar las resistencias, el circuito se reduce aún mucho más, quedando como se muestra en la Figura 2.50.

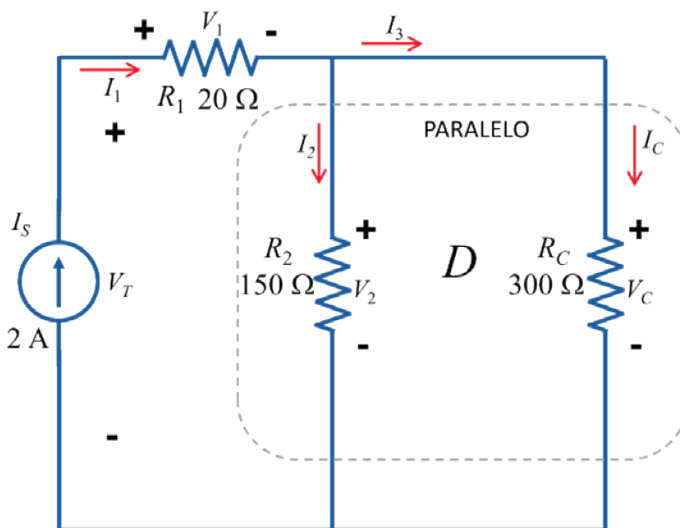


Figura 2.50. Circuito mixto reduciendo resistencias en serie.

Ahora aparecen las resistencias R_2 y R_C conectadas en paralelo las cuales llamaremos simplemente R_D , las simplificamos y redibujamos el circuito equivalente.

$$R_D = \frac{R_2 R_C}{R_2 + R_C} = \frac{(150 \Omega)(300 \Omega)}{150 \Omega + 300 \Omega}$$

$$R_D = 100 \Omega$$

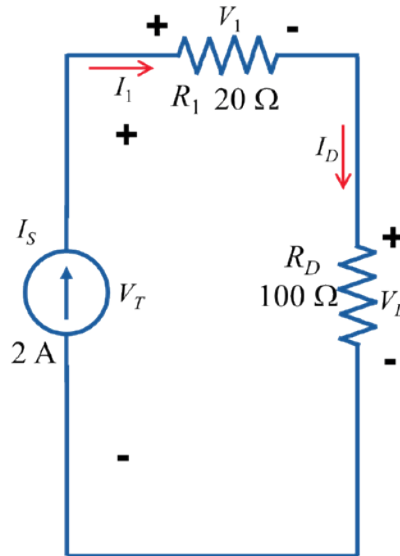


Figura 2.51. Circuito mixto simplificado a dos resistencias en serie.

En la Figura 2.51 se puede ver con claridad que las resistencias R_1 y R_D están conectadas en serie, por lo tanto, la resistencia total del circuito se puede calcular como:

$$R_T = R_1 + R_D = 20 \Omega + 100 \Omega$$

$$R_T = 120 \Omega$$

- c) Para calcular la potencia en R_6 (105Ω) necesitamos la corriente o el voltaje de esta resistencia y no tenemos ninguno de los dos. Entonces, debemos pensar cómo poder obtener cualquiera de estos dos valores a partir del resto de los valores presentes en el circuito original o en los circuitos equivalentes que hemos construido.

Por ejemplo, de la Figura 2.49, si conociéramos el valor de la corriente I_3 , sería la misma corriente que I_B y por lo tanto podríamos calcular el voltaje de la resistencia R_B . Y como la resistencia R_B está formada por el paralelo de las resistencias R_6 y R_7 , entonces el voltaje de la resistencia R_B sería también el voltaje de la resistencia R_6 . De este modo, con el voltaje de R_B ya podríamos calcular la potencia en R_6 .

Pero, para poder calcular el valor de la corriente I_3 , en la Figura 2.50 necesitamos conocer el voltaje V_C ya que con este voltaje podemos calcular la corriente I_C , que es la misma que I_3 .

Ahora, si observamos bien, el voltaje de la resistencia R_C es también el voltaje de la resistencia R_2 , ya que se encuentran conec-

tadas en paralelo y, al mismo tiempo, es el voltaje de la resistencia R_D puesto que esta resistencia se forma con el paralelo de R_2 y R_C .

Entonces, si calculamos el voltaje V_D podemos calcular la corriente I_3 , para después calcular el voltaje V_B que es el mismo para la resistencia R_6 . De este modo ya sería posible calcular la potencia en la resistencia R_6 . La ecuación (2.20) muestra la secuencia que debemos seguir para poder calcular la potencia en la resistencia R_6 .

$$V_D \rightarrow V_C \rightarrow I_C \rightarrow I_3 \rightarrow I_B \rightarrow V_B \rightarrow V_6 \rightarrow P_{R6} \quad (2.20)$$

El voltaje V_D lo podemos calcular directamente del último circuito equivalente en la Figura 2.51 con la ecuación (2.9) ya que todos los elementos están conectados en serie. Entonces la corriente de la fuente I_S es la misma que para R_1 y para R_D , por lo tanto, queda de la siguiente manera:

$$V_D = I_D R_D = I_S R_D = (2 \text{ A})(100 \Omega) = 200 \text{ V}$$

Y como el voltaje en R_C es igual que el voltaje de R_D , queda:

$$V_C = V_D = 200 \text{ V}$$

Ahora, calculamos el valor de la corriente I_C , y la igualamos con I_3 y con I_B quedando como:

$$I_C = \frac{V_C}{R_C} = \frac{200 \text{ V}}{300 \Omega} = 0.666 \text{ A}$$

$$I_B = I_3 = I_C = 0.666 \text{ A}$$

Ya con el valor de la corriente I_B podemos calcular el voltaje V_B .

$$V_B = I_B R_B = (0.666 \text{ A})(70 \Omega) = 46.666 \text{ V}$$

Este voltaje es el mismo que el de la resistencia R_6

$$V_6 = V_B = 46.666 \text{ V}$$

Por último, calculamos la potencia en la resistencia R_6 con la ecuación (2.8) de la potencia.

$$P_{R6} = \frac{V_6^2}{R_6} = \frac{(46.666 \text{ V})^2}{105 \Omega}$$

$$P_{R6} = 20.74 \text{ W}$$

RESISTENCIAS CONECTADAS EN ESTRELLA Y DELTA

En ocasiones, aparecen circuitos eléctricos que no están conectados en serie ni en paralelo porque no es posible reducirlos a una sola resistencia equivalente utilizando las fórmulas de serie y paralelo que aprendimos con anterioridad. A este tipo de conexiones se les llama conexión estrella o ye (Y) y conexión delta o triángulo (Δ). Estas conexiones aparecen con más frecuencia en las aplicaciones industriales para motores y transformadores de corriente alterna trifásicos (APCE, 2017), pero en ocasiones pueden aparecer mientras analizamos un circuito de corriente directa con resistencias y debemos saber qué hacer para poder resolverlo. En la Figura 2.52 se muestran las conexiones de resistencias en estrella y en delta.

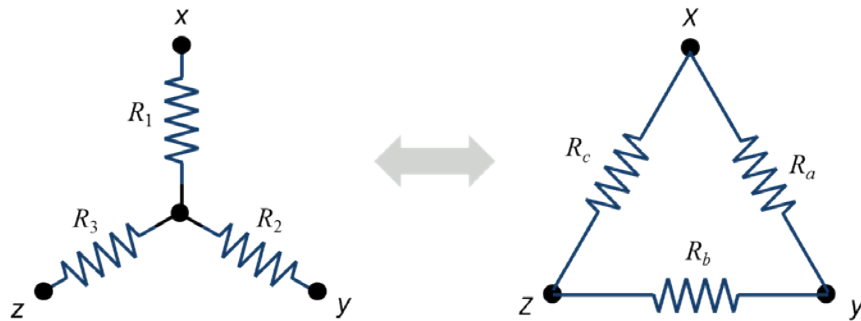


Figura 2.52. Conexión estrella o delta de resistencias.

Características de la conexión en estrella y delta en circuitos de corriente directa

1. Si un circuito en estrella está conectado a una fuente de alimentación, este circuito se puede transformar en un nuevo circuito en delta conservando el mismo nivel de consumo de potencia de la fuente.
2. Si se desea calcular la corriente, el voltaje o la potencia en una resistencia que se encuentre conectada dentro de una estrella o de una delta, esta resistencia no se debe transformar para que siga conservando las mismas características eléctricas que tiene en el circuito original.
3. Si se construye un circuito en estrella y otro en delta, ambos con todas las resistencias de los mismos valores, el circuito en delta consume 3 veces la potencia que consume el circuito en estrella.

Resistencias en estrella (Y) y delta (Δ)

Un ejemplo de circuito que está conectado en estrella o delta es el que se muestra en la Figura 2.53. En este circuito ninguna de las resistencias se encuentra conectada en serie por no compartir la misma corriente con ninguna otra ni tampoco en paralelo porque ningún par de resistencias comparten las dos mismas terminales conectadas de forma común entre sí. En este circuito, se presentan dos posibles conexiones en delta Δ , una formada por las resistencias R_a , R_b y R_c la que llamaremos delta uno (Δ_1) o la otra que se for-

ma con las resistencias R_b , R_e y R_d la que llamaremos delta dos (Δ_2). De igual manera, se podría decir que se pueden tener dos posibles conexiones en estrella o ye (Y), una formada por las resistencias R_c , R_b y R_d la cual llamaremos (Y_1) o la otra que se forma con las resistencias R_a , R_b y R_e la cual llamaremos (Y_2). En la Figura 2.54 se indican gráficamente las conexiones en delta y estrella que se acaban de mencionar.

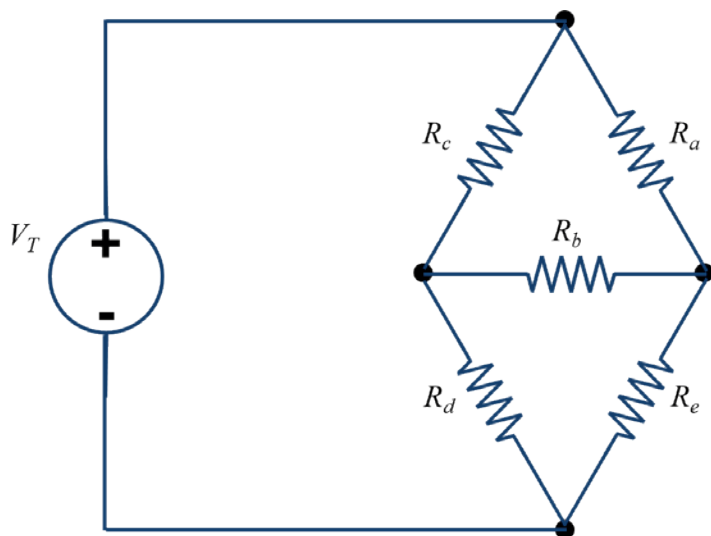


Figura 2.53. Circuito de corriente directa que cuenta con resistencias en estrella y delta.

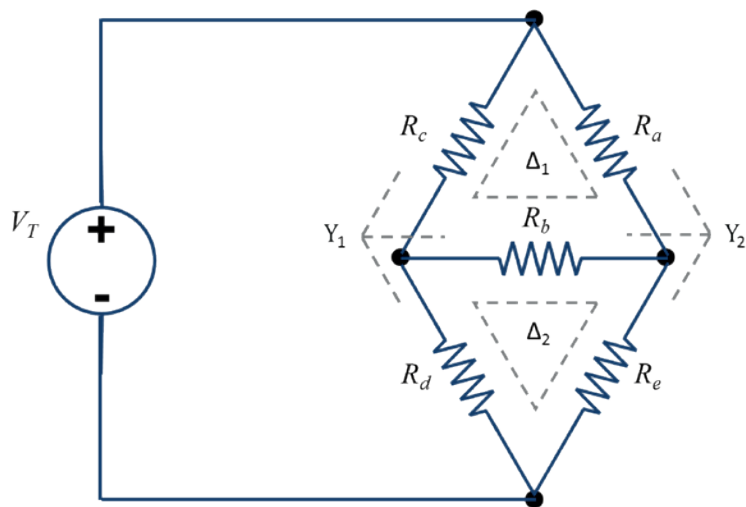


Figura 2.54. Identificación de conexiones en estrella o delta en el circuito.

Transformación estrella – delta ($Y \rightarrow \Delta$) y delta – estrella ($\Delta \rightarrow Y$)

Según convenga, para su análisis, es posible transformar el tipo de conexión de un circuito de estrella a delta ($Y \rightarrow \Delta$) o de delta a estrella ($\Delta \rightarrow Y$). Para conseguir la transformación de una forma a otra, se utiliza la Figura 2.55, que relaciona las resistencias R_a , R_b y R_c conectadas en delta (Δ), con las resistencias R_1 , R_2 y R_3 conectadas en estrella (Y).

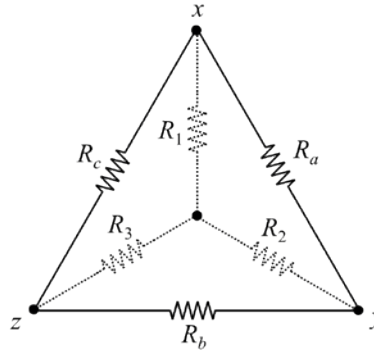


Figura 2.55. Relación entre la estrella y la delta para hacer la conversión de una a otra.

Transformación de estrella a delta ($Y \rightarrow \Delta$)

Si se tienen conectadas las resistencias en estrella y se desea o se necesita obtener a la conexión en delta, entonces se deben llevar a cabo los siguientes pasos:

1. De las resistencias conectadas en estrella, calcular la Y del sistema con la ecuación (2.21).

$$Y = R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1 \quad (2.21)$$

2. Después, calcular las resistencias R_a , R_b y R_c de la delta de acuerdo con la siguiente secuencia, y basados en la Figura 2.55, a partir de las siguientes ecuaciones.

$$R_a = \frac{Y}{R_3} \quad (2.22)$$

$$R_b = \frac{Y}{R_1} \quad (2.23)$$

$$R_c = \frac{Y}{R_2} \quad (2.24)$$

Observar la secuencia para el cálculo de las resistencias de la delta. Se aprecia que, por ejemplo, la resistencia R_a se calcula con la Y del sistema dividida entre la resistencia que es perpendicular a R_a en la Figura 2.55, en este caso es la resistencia R_3 . Del mismo modo y con la misma secuencia, si se desea calcular la resistencia

R_b se calcula con la Y del sistema dividida entre la resistencia que es perpendicular a R_b en la Figura 2.55, en este caso es la resistencia R_1 .

Transformación de delta a estrella ($\Delta \rightarrow Y$)

Si se tienen conectadas las resistencias en delta, y se desea o se necesita obtener la conexión en estrella, entonces se deben llevar a cabo los siguientes pasos:

1. De las resistencias conectadas en delta, calcular la Δ del sistema con la ecuación (2.25).

$$\Delta = R_a + R_b + R_c \quad (2.25)$$

2. Después, calcular las resistencias R_1 , R_2 y R_3 de la estrella de acuerdo con la siguiente secuencia, y basados en la Figura 2.55, a partir de las siguientes ecuaciones.

$$R_1 = \frac{R_c R_a}{\Delta} \quad (2.26)$$

$$R_2 = \frac{R_a R_b}{\Delta} \quad (2.27)$$

$$R_3 = \frac{R_b R_c}{\Delta} \quad (2.28)$$

Observar que también existe una relación entre la localización física de las resistencias y la ecuación que se debe utilizar para cada una de ellas. En la secuencia para el cálculo de las resistencias de la estrella, se aprecia que para calcular la resistencia R_1 se multiplican las resistencias entre las que se encuentra R_1 , en este caso las resistencias R_c y R_a de la Figura 2.55, y se dividen por la Δ calculada. Del mismo modo y con la misma secuencia, para calcular la resistencia R_2 se multiplican las resistencias entre las que se encuentra R_2 , en este caso las resistencias R_a y R_b de la Figura 2.55, y se dividen por la Δ calculada.

Ejercicios de resistencias en estrella (Y) y delta (Δ)

A continuación, se presentan ejemplos en los que es necesario utilizar las transformaciones estrella-delta o delta-estrella para calcular algún parámetro del circuito.

Ejemplo 2-19. Del circuito de la Figura 2.56, calcular:

- a) La resistencia total del circuito transformando la delta R_a , R_b , R_c en estrella equivalente.
- b) La resistencia total del circuito transformando la delta R_b , R_d , R_e en estrella equivalente.
- c) La corriente y la potencia total del circuito.

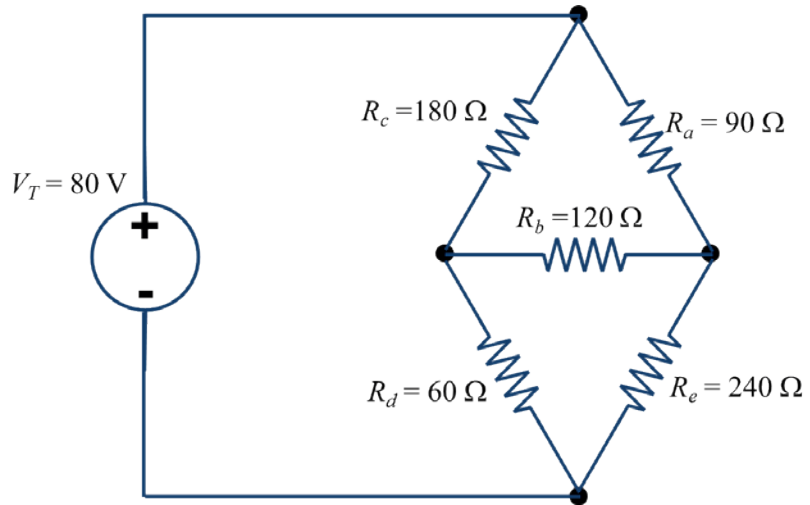


Figura 2.56. Circuito en conexión estrella delta con fuente de voltaje.

Solución.

- a) Obtenemos la delta a partir de las resistencias R_a , R_b , R_c con la ecuación (2.25) la cual llamaremos Δ_1 y nos queda.

$$\Delta_1 = R_a + R_b + R_c = 90 \Omega + 120 \Omega + 180 \Omega$$

$$\Delta_1 = 390 \Omega$$

Ya que tenemos la delta de las resistencias, ahora calculamos las respectivas resistencias de la estrella equivalente utilizando las ecuaciones (2.26), (2.27) y (2.28) quedando.

$$R_1 = \frac{R_c R_a}{\Delta_1} = \frac{(180 \Omega)(90 \Omega)}{390 \Omega} = 41.538 \Omega$$

$$R_2 = \frac{R_a R_b}{\Delta_1} = \frac{(90 \Omega)(120 \Omega)}{390 \Omega} = 27.692 \Omega$$

$$R_3 = \frac{R_b R_c}{\Delta_1} = \frac{(120 \Omega)(180 \Omega)}{390 \Omega} = 55.384 \Omega$$

Ahora, igual que sucede con los circuitos en serie y paralelo, sustituimos los valores calculados y se construye el circuito equivalente con las resistencias R_1 , R_2 y R_3 , tal como se muestra en la Figura 2.57.

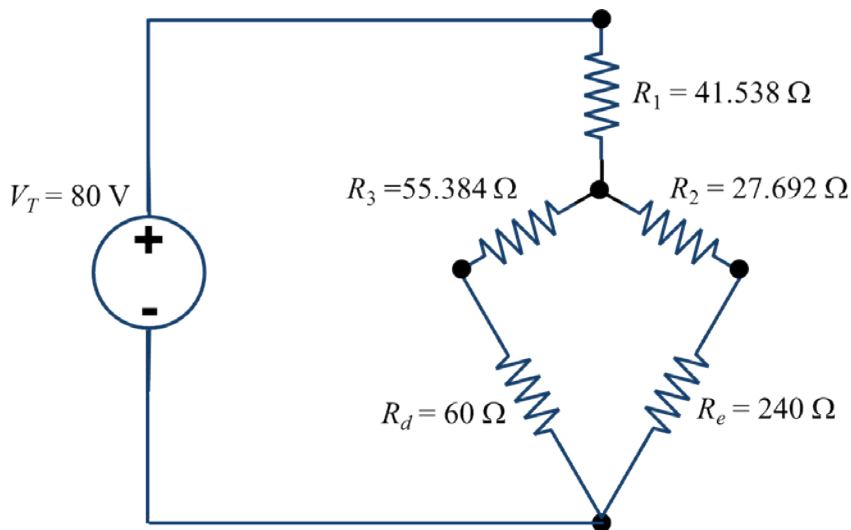


Figura 2.57. Circuito equivalente después de sustituir la delta por la estrella equivalente.

Notamos que el circuito ha cambiado y ya se puede calcular la resistencia equivalente total pues nos quedan en paralelo la suma de las resistencias R_3 y R_d con la suma de las resistencias R_2 y R_e para al final sumarse simplemente con R_1 . Con la ecuación (2.29) se calcula la resistencia total del circuito.

$$R_T = R_1 + [(R_3 + R_d) \parallel (R_2 + R_e)]$$

$$R_T = R_1 + \frac{(R_3 + R_d)(R_2 + R_e)}{(R_3 + R_d) + (R_2 + R_e)} \quad (2.29)$$

Sustituimos los valores resultando:

$$R_T = 41.538 \, \Omega + \frac{(55.384 \, \Omega + 60 \, \Omega)(27.692 \, \Omega + 240 \, \Omega)}{(55.384 \, \Omega + 60 \, \Omega) + (27.692 \, \Omega + 240 \, \Omega)}$$

$$R_T = 41.538 \, \Omega + 80.629 \, \Omega = 122.167 \, \Omega$$

$$R_T = 122.167 \, \Omega$$

- b) Calculamos la delta a partir de las resistencias R_b , R_e , R_d con la ecuación (2.25) la cual llamaremos Δ_2 y nos queda.

$$\Delta_2 = R_b + R_e + R_d = 120 \, \Omega + 240 \, \Omega + 60 \, \Omega$$

$$\Delta_2 = 420 \, \Omega$$

Ya que tenemos la delta de las resistencias, ahora calculamos las respectivas resistencias de la segunda estrella equivalente uti-

lizando las ecuaciones (2.26), (2.27) y (2.28), utilizaremos * para distinguir la segunda estrella de la primera.

Tomaremos la pareja de resistencias $R_e R_d$ para colocar ahí la resistencia R_1 , y a partir de ese punto en adelante, en favor de las manecillas del reloj, colocamos las otras dos resistencias. Entonces queda $R_d R_b$ para colocar ahí la resistencia R_2 y $R_b R_e$ para colocar ahí la resistencia R_3 .

$$R_1^* = \frac{R_e R_d}{\Delta_2} = \frac{(240 \Omega)(60 \Omega)}{420 \Omega} = 34.285 \Omega$$

$$R_2^* = \frac{R_d R_b}{\Delta_2} = \frac{(60 \Omega)(120 \Omega)}{420 \Omega} = 17.142 \Omega$$

$$R_3^* = \frac{R_b R_e}{\Delta_2} = \frac{(120 \Omega)(240 \Omega)}{420 \Omega} = 68.571 \Omega$$

Ahora, sustituimos los valores calculados y se construye el circuito equivalente con las resistencias R_1^* , R_2^* y R_3^* tal como se muestra en la Figura 2.58.

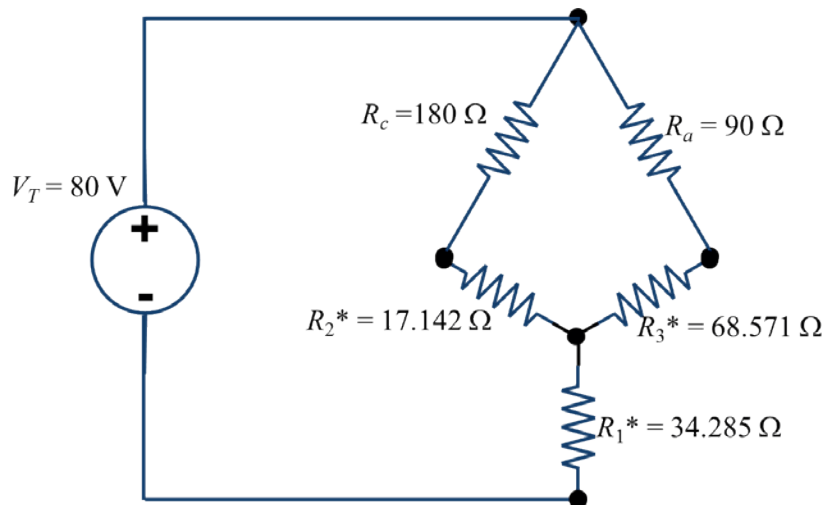


Figura 2.58. Circuito equivalente después de sustituir la delta por la segunda estrella equivalente.

Al igual que en el inciso anterior, el circuito ha cambiado y ya se puede calcular la resistencia equivalente total, pues ahora nos quedan en paralelo la suma de las resistencias R_c y R_2^* con la suma de las resistencias R_a y R_3^* , para al final sumarse simplemente con R_1^* . Con la ecuación (2.30) se calcula la resistencia total del circuito luego de haber transformado la delta en la segunda estrella.

$$R_T = R_1^* + [(R_c + R_2^*) \parallel (R_a + R_3^*)]$$

$$R_T = R_1^* + \frac{(R_c + R_2^*)(R_a + R_3^*)}{(R_c + R_2^*) + (R_a + R_3^*)} \quad (2.30)$$

Sustituimos los valores resultando:

$$R_T = 34.285 \, \Omega + \frac{(180 \, \Omega + 17.142 \, \Omega)(90 \, \Omega + 68.571 \, \Omega)}{(180 \, \Omega + 17.142 \, \Omega) + (90 \, \Omega + 68.571 \, \Omega)}$$

$$R_T = 34.285 \, \Omega + 87.882 \, \Omega = 122.167 \, \Omega$$

$$R_T = 122.167 \, \Omega$$

Observe que cualquiera de las dos sustituciones de las deltas nos produce exactamente el mismo resultado en la resistencia total equivalente.

- c) Para calcular la corriente y la potencia total construimos el circuito equivalente quedando como se muestra en la Figura 2.59.

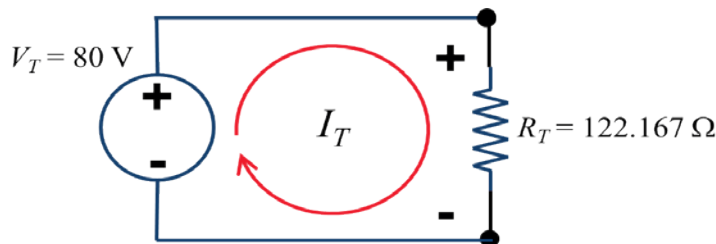


Figura 2.59. Circuito equivalente del arreglo de resistencias en estrella-delta.

Observamos que se trata simplemente de una fuente de voltaje conectada a la resistencia y la forma de calcular la corriente es mediante la ley de Ohm con la ecuación (2.7), y la potencia con cualquiera de las fórmulas de la potencia (1.1), (2.8) ó (2.10).

La corriente resulta:

$$I_T = \frac{V_T}{R_T} = \frac{80 \text{ V}}{122.167 \, \Omega} = 0.654,84 \text{ A}$$

$$I_T = 654.84 \text{ mA}$$

La potencia resulta:

$$P_T = V_T I_T = (80 \text{ V})(0.654,84 \text{ A})$$

$$P_T = 52.387 \text{ W}$$

Ejemplo 2-20. Del circuito de la Figura 2.60, calcular:

- La resistencia total transformando la estrella, formada por las resistencias R_1 , R_2 y R_3 , en delta.
- El voltaje y la potencia total del circuito.

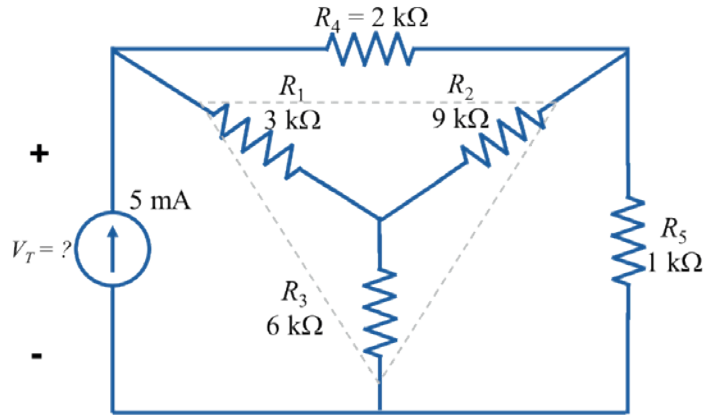


Figura 2.60. Circuito en conexión estrella delta con fuente de corriente.

Solución.

- Para transformar la estrella formada por las resistencias R_1 , R_2 y R_3 en delta, se debe calcular primero la Y del arreglo para posteriormente calcular los valores de las resistencias R_a , R_b y R_c . En aspecto de cómo quedaría la conversión a delta se muestra en la Figura 2.61.

A partir de la Figura 2.60 sustituimos las resistencias en la ecuación (2.21) para calcular la Y del arreglo, quedando.

$$Y = R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1$$

$$Y = (3 \text{ k}\Omega)(9 \text{ k}\Omega) + (9 \text{ k}\Omega)(6 \text{ k}\Omega) + (6 \text{ k}\Omega)(3 \text{ k}\Omega)$$

$$Y = 9.9 \times 10^7 \Omega^2$$

Con este valor y con las ecuaciones (2.22), (2.23) y (2.24) resulta.

$$R_a = \frac{Y}{R_3} = \frac{9.9 \times 10^7 \Omega^2}{6 \times 10^3 \Omega} = 16,500 \Omega = 16.5 \text{ k}\Omega$$

$$R_b = \frac{Y}{R_1} = \frac{9.9 \times 10^7 \Omega^2}{3 \times 10^3 \Omega} = 33,000 \Omega = 33 \text{ k}\Omega$$

$$R_c = \frac{Y}{R_2} = \frac{9.9 \times 10^7 \Omega^2}{9 \times 10^3 \Omega} = 11,000 \Omega = 11 \text{ k}\Omega$$

Construimos el circuito equivalente a partir de los resultados anteriores y nos queda la Figura 2.61.

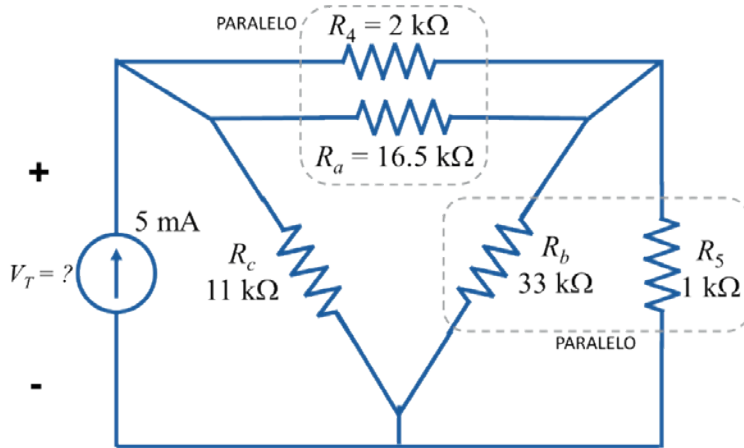


Figura 2.61. Transformación de estrella a delta.

Notamos que con la transformación se pueden agrupar en paralelo las resistencias R_4 y R_a , del mismo modo que R_5 y R_b , para posteriormente conectarse en serie entre los dos resultados. La resistencia R_c se encuentra conectada en paralelo con la fuente de corriente. La Figura 2.62 muestra el aspecto de cómo se va transforma el circuito.

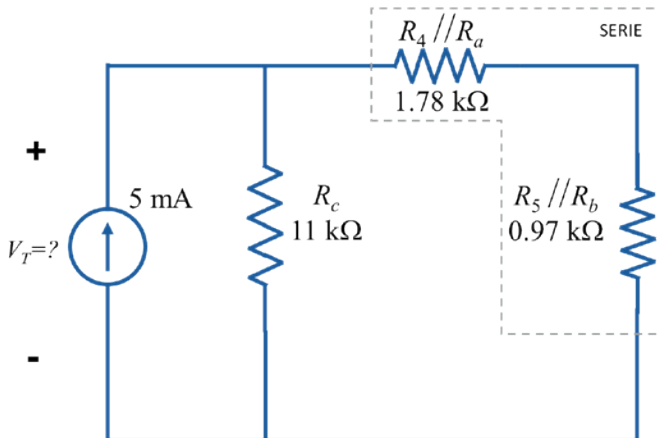


Figura 2.62. Circuito intermedio para calcular la resistencia total.

Agrupamos las resistencias en serie para formar una resistencia que llamaremos R_d y estará en paralelo con la resistencia R_c tal como se aprecia en la Figura 2.63.

$$R_d = (R_4 \parallel R_a) + (R_5 \parallel R_b)$$

$$R_d = 1.78 \text{ k}\Omega + 0.97 \text{ k}\Omega$$

$$R_d = 2.75 \text{ k}\Omega$$

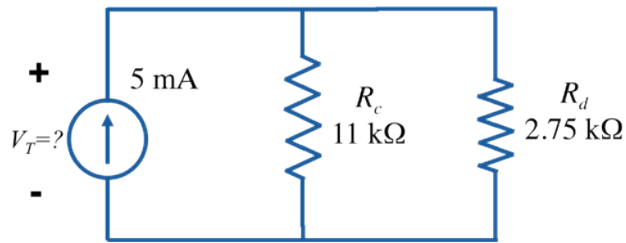


Figura 2.63. Circuito estrella delta simplificado.

Para finalizar, calculamos la resistencia total con el paralelo de estas dos últimas resistencias quedando.

$$R_T = \frac{R_c R_d}{R_c + R_d} = \frac{(11 \text{ k}\Omega)(2.75 \text{ k}\Omega)}{11 \text{ k}\Omega + 2.75 \text{ k}\Omega}$$

$$R_T = 2.2 \text{ k}\Omega$$

- b) Para calcular el voltaje total es suficiente con multiplicar la resistencia total por la corriente total, de acuerdo con la ley de Ohm para el voltaje en la ecuación (2.9).

$$V_T = I_T R_T = (5 \text{ mA})(2.2 \text{ k}\Omega)$$

$$V_T = 11 \text{ V}$$

La potencia total queda:

$$P_T = V_T I_T$$

$$P_T = (11 \text{ V})(5 \text{ mA}) = 55 \text{ mW}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

A continuación, se proponen una serie de problemas para poner en práctica todo lo aprendido sobre la ley de Ohm y las conexiones serie, paralelo, mixtas y estrella-delta.

Prob. 2.1. De la Figura 2.64 calcular: R_T .

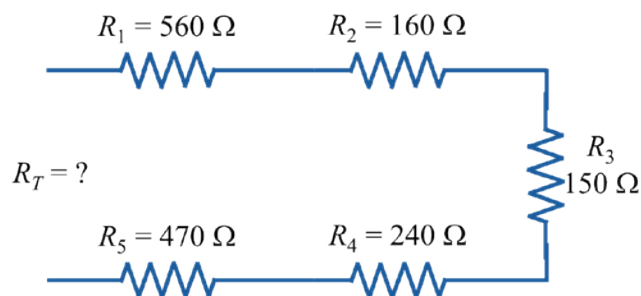


Figura 2.64.

Sol. $R_T = 1580 \Omega = 1.58 \text{ k}\Omega$.

Prob. 2.2. De la Figura 2.65 calcular: R_T .

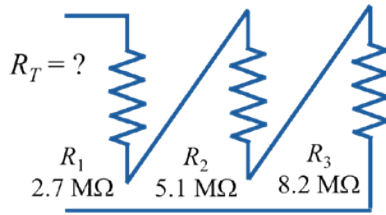


Figura 2.65.

Sol. $R_T = 16 \text{ M}\Omega$.

Prob. 2.3. De la Figura 2.66 calcular: R_T .

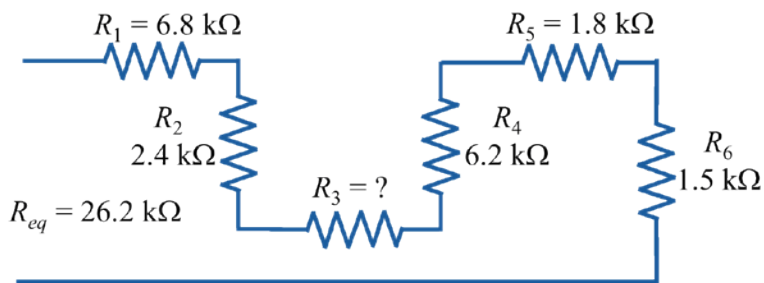


Figura 2.66.

Sol. $R_3 = 7.5 \text{ k}\Omega$.

Prob. 2.4. En el circuito de la Figura 2.67 calcular: R_T , V_T , I_1 , I_2 , V_1 , V_2 y la potencia en cada elemento.

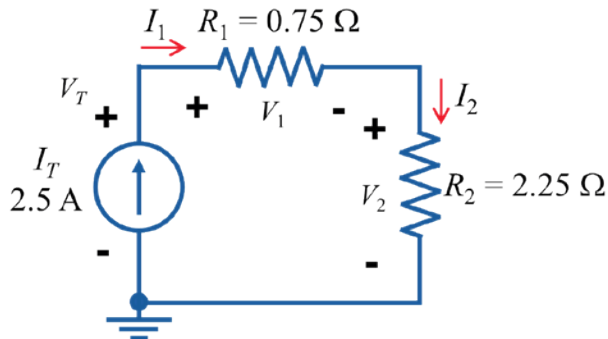


Figura 2.67.

Sol. $R_T = 3 \Omega$, $V_T = 7.5 \text{ V}$, $I_1 = 2.5 \text{ A}$, $I_2 = 2.5 \text{ A}$, $V_1 = 1.875 \text{ V}$, $V_2 = 5.625 \text{ V}$, $P_{R1} = 4.68 \text{ W}$, $P_{R2} = 14.06 \text{ W}$, $P_{IT} = 18.75 \text{ W}$.

Prob. 2.5. En el circuito de la Figura 2.68 calcular: R_T , la corriente, el voltaje y la potencia en cada elemento del circuito.

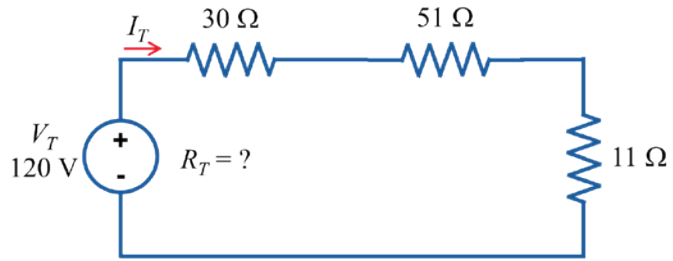


Figura 2.68.

Sol. $R_T = 92 \Omega$, $I_T = I_{R1} = I_{R2} = I_{R3} = 1.304 \text{ A}$, $V_{R1} = 39.13 \text{ V}$, $V_{R2} = 66.52 \text{ V}$, $V_{R3} = 14.34 \text{ V}$, $P_{R1} = 51.03 \text{ W}$, $P_{R2} = 86.76 \text{ W}$, $P_{R3} = 14.06 \text{ W}$, $P_T = 156.52 \text{ W}$.

Prob. 2.6. Con la información que se encuentra en el circuito de la Figura 2.69 calcular: R_T , I_T y V_T .

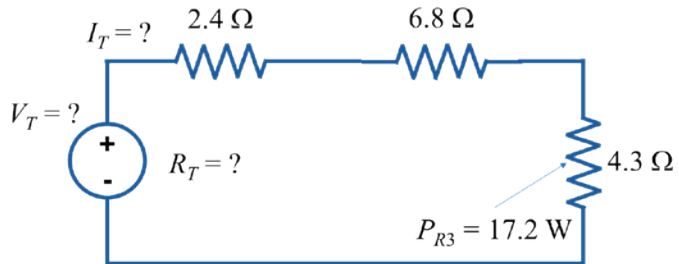


Figura 2.69.

Sol. $R_T = 92 \Omega$, $I_T = 2 \text{ A}$, y $V_T = 27 \text{ V}$.

Prob. 2.7. En el circuito de la Figura 2.70 calcular: R_T , I_T , I_1 , I_2 y la potencia en cada elemento.

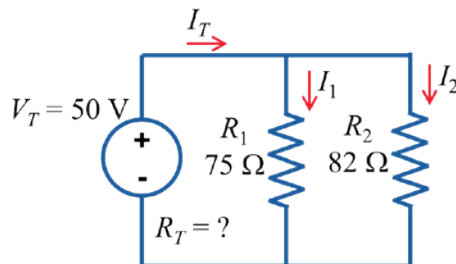


Figura 2.70.

Sol. $R_T = 39.17 \Omega$, $I_T = 1.276 \text{ A}$, $I_1 = 0.666 \text{ A}$ y $I_2 = 0.6097 \text{ A}$, $P_{R1} = 33.33 \text{ W}$, $P_{R2} = 30.48 \text{ W}$, $P_T = 63.82 \text{ W}$.

Prob. 2.8. En el circuito de la Figura 2.71 calcular: R_T , I_T , I_A , I_B , I_C , I_D , I_E , e I_F .

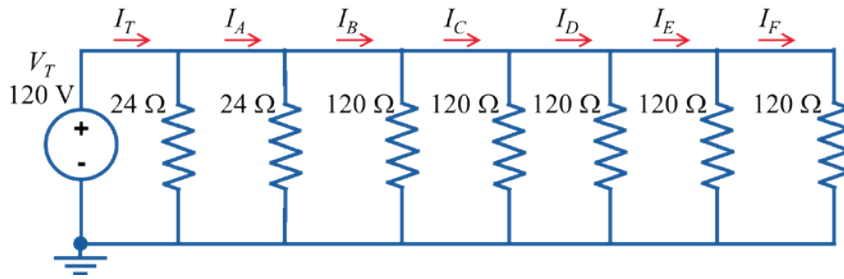


Figura 2.71.

Sol. $R_T = 8 \Omega$, $I_T = 15 \text{ A}$, $I_A = 10 \text{ A}$, $I_B = 5 \text{ A}$, $I_C = 4 \text{ A}$, $I_D = 3 \text{ A}$, $I_E = 2 \text{ A}$, $I_F = 1 \text{ A}$.

Prob. 2.9. En el circuito de la Figura 2.72 Calcular: las corrientes y las potencias en cada uno de los elementos.

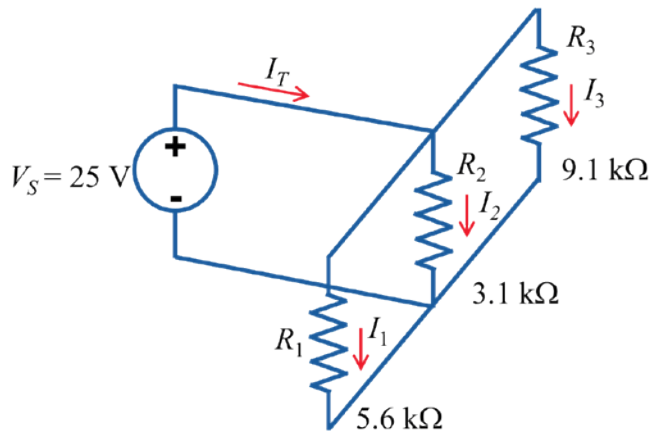


Figura 2.72.

Sol. $I_1 = 4.464 \times 10^{-3} \text{ A}$, $I_2 = 8.064 \times 10^{-3} \text{ A}$, $I_3 = 2.747 \times 10^{-3} \text{ A}$, $I_T = 1.527 \times 10^{-2}$, $P_{R1} = 0.1116 \text{ W}$, $P_{R2} = 0.2016 \text{ W}$, $P_{R3} = 6.868 \times 10^{-2}$ y $P_S = 0.3819 \text{ W}$.

Prob. 2.10. En el circuito de la Figura 2.73 todas las resistencias se encuentran conectadas en paralelo. Calcular: I_1, I_2, I_3, I_4 .

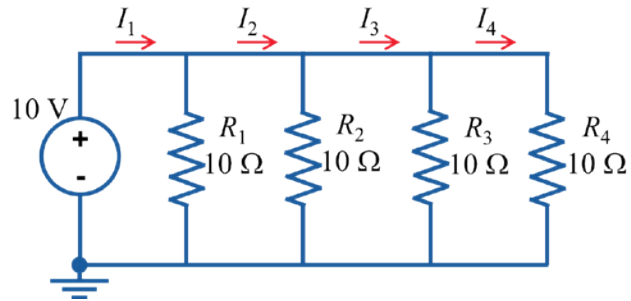


Figura 2.73.

Sol. $I_1 = 4 \text{ A}, I_2 = 3 \text{ A}, I_3 = 2 \text{ A}, I_4 = 1 \text{ A}$.

Prob. 2.11. En el circuito de la Figura 2.74 todas las resistencias se encuentran conectadas en paralelo. Calcular: I_1, I_2, I_3, I_4 .

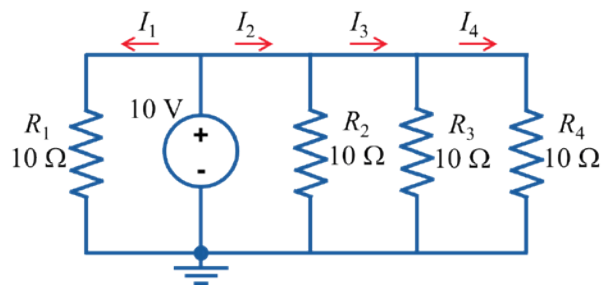


Figura 2.74.

Sol. $I_1 = 1 \text{ A}, I_2 = 3 \text{ A}, I_3 = 1 \text{ A}$.

Prob. 2.12. En el circuito de la Figura 2.75 todas las resistencias se encuentran conectadas en paralelo. Calcular: I_1, I_2, I_3, I_4 .

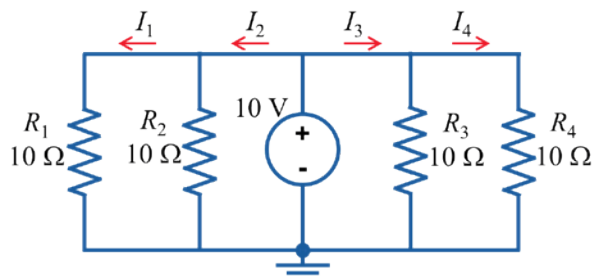


Figura 2.75.

Sol. $I_1 = 1 \text{ A}, I_2 = 2 \text{ A}, I_3 = 2 \text{ A}, I_4 = 1 \text{ A}$.

Prob. 2.13. En el circuito de la Figura 2.76 todas las resistencias se encuentran conectadas en paralelo. Calcular cuánto vale I_1, I_2, I_3, I_4 e I_5 .

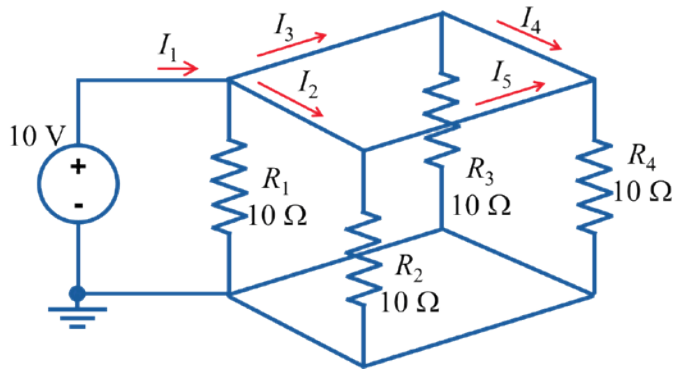


Figura 2.76.

Sol. $I_1 = 4 \text{ A}$, $I_2 = 1.5 \text{ A}$, $I_3 = 1.5 \text{ A}$, $I_4 = 0.5 \text{ A}$, $I_5 = 0.5 \text{ A}$.

Prob. 2.14. Repita los problemas 2.9 al 2.13 pero ahora sustituya la fuente de voltaje de 10 V por una fuente de corriente de 4 A con dirección positiva hacia arriba. ¿Cambian los valores de las corrientes?, Explique con sus palabras lo que ocurre en cada caso.

Prob. 2.15. En el circuito de la Figura 2.77 calcular: $R_T, I_T, I_1, V_1, V_2, V_3, I_2, I_3$ y la potencia en cada elemento.

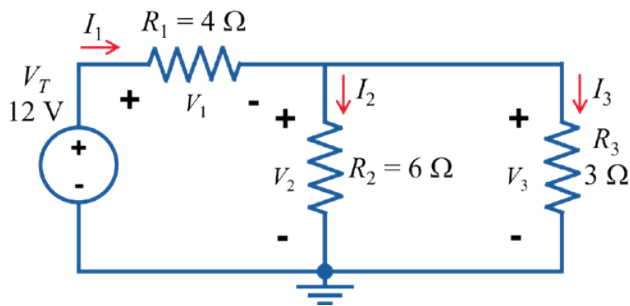


Figura 2.77.

Sol. $R_T = 6 \Omega$, $I_1 = 2 \text{ A}$, $V_1 = 8 \text{ V}$, $V_2 = 4 \text{ V}$, $V_3 = 4 \text{ V}$, $I_2 = 0.666 \text{ A}$, $I_3 = 1.333 \text{ A}$, $P_{R1} = 16 \text{ W}$, $P_{R2} = 2.666 \text{ W}$, $P_{R3} = 5.333 \text{ W}$, $P_{VT} = 84 \text{ W}$.

Prob. 2.16. En el circuito de la Figura 2.78 calcular: R_T , I_T , V_1 , I_1 , I_2 , I_3 , V_2 , V_3 y la potencia en cada elemento.

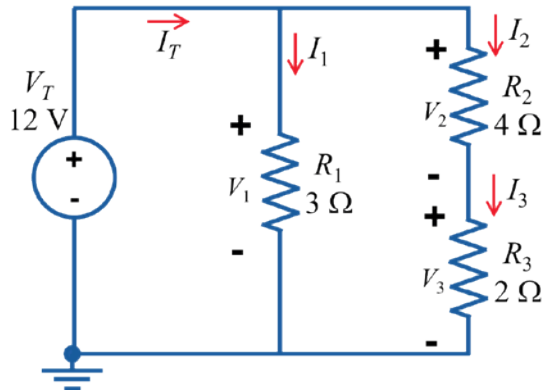


Figura 2.78.

Sol. $R_T = 2 \Omega$, $I_T = 6 \text{ A}$, $V_1 = 12 \text{ V}$, $I_1 = 4 \text{ A}$, $I_2 = 2 \text{ A}$, $I_3 = 2 \text{ A}$, $V_2 = 8 \text{ V}$, $V_3 = 4 \text{ V}$, $P_{R_1} = 48 \text{ W}$, $P_{R_2} = 16 \text{ W}$, $P_{R_3} = 8 \text{ W}$, $P_{V_T} = 72 \text{ W}$.

Prob. 2.17. En el circuito de la Figura 2.79 calcular: R_T , I_T , V_1 , V_2 , I_1 , I_2 , I_3 , V_3 y la potencia en cada elemento.

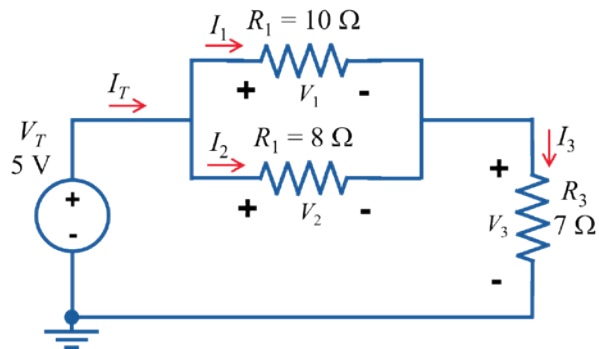


Figura 2.79.

Sol. $R_T = 11.44 \Omega$, $I_T = 0.4368 \text{ A}$, $V_1 = 1.94 \text{ V}$, $V_2 = 1.94 \text{ V}$, $I_1 = 0.1941 \text{ A}$, $I_2 = 0.2427 \text{ A}$, $I_3 = 0.4368 \text{ A}$, $V_3 = 3.05 \text{ V}$, $P_{R_1} = 0.376 \text{ W}$, $P_{R_2} = 0.47 \text{ W}$, $P_{R_3} = 1.335 \text{ W}$, $P_{V_T} = 2.18 \text{ W}$.

Prob. 2.18. En el circuito de la Figura 2.80 calcular: R_T , I_T , V_1 , V_2 , I_1 , I_2 , I_x , V_3 , V_4 , I_3 , I_4 y la potencia en cada elemento.

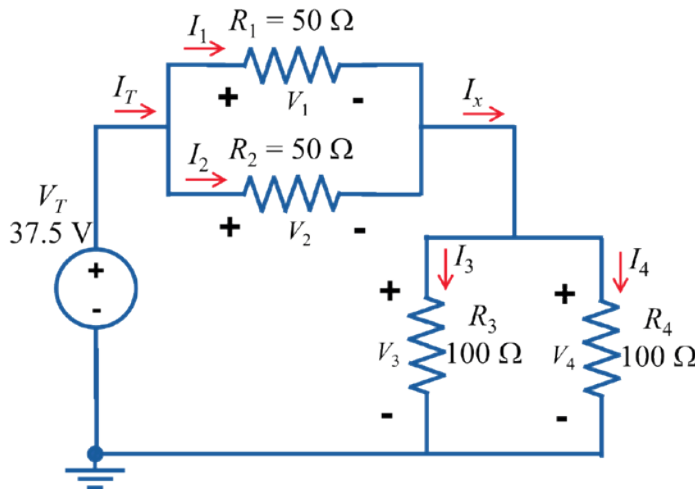


Figura 2.80.

Sol. $R_T = 75 \Omega$, $I_T = 0.5 \text{ A}$, $V_1 = 12.5 \text{ V}$, $V_2 = 12.5 \text{ V}$, $I_1 = 0.25 \text{ A}$, $I_2 = 0.25 \text{ A}$, $V_3 = 25 \text{ V}$, $V_4 = 25 \text{ V}$, $I_3 = 0.25 \text{ A}$, $I_4 = 0.25 \text{ A}$, $P_{R1} = 3.125 \text{ W}$, $P_{R2} = 3.125 \text{ W}$, $P_{R3} = 6.25 \text{ W}$, $P_{VT} = 18.75 \text{ W}$.

Prob. 2.19. En el circuito de la Figura 2.81 calcular: R_T , I_1 , V_1 , V_2 , V_3 , I_2 , I_3 , I_4 , V_4 y la potencia en cada elemento.

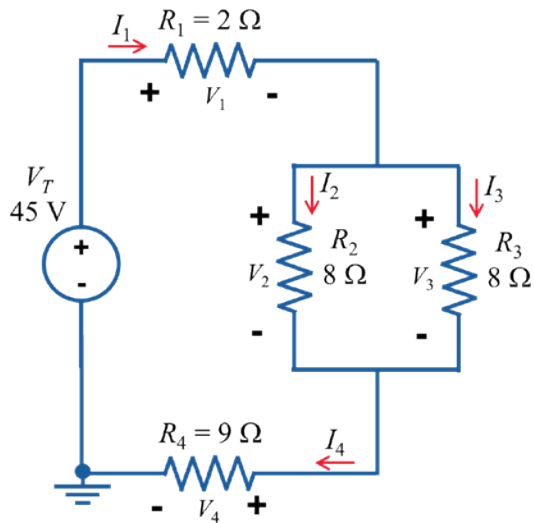


Figura 2.81.

Sol. $R_T = 15 \Omega$, $I_1 = 3 \text{ A}$, $V_1 = 6 \text{ V}$, $V_2 = 12 \text{ V}$, $V_3 = 12 \text{ V}$, $I_2 = 1.5 \text{ A}$, $I_3 = 1.5 \text{ A}$, $V_4 = 27 \text{ V}$, $I_4 = 3 \text{ A}$, $P_{R1} = 18 \text{ W}$, $P_{R2} = 18 \text{ W}$, $P_{R3} = 18 \text{ W}$, $P_{R4} = 81 \text{ W}$, $P_{VT} = 135 \text{ W}$.

Prob. 2.20. En el circuito de la Figura 2.82 Calcular: las corrientes I_1, I_2, I_3, I_4 y los voltajes V_x y V_y .

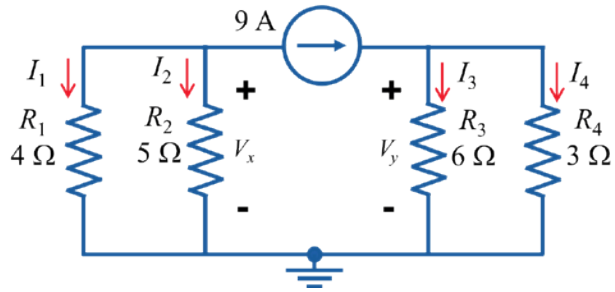


Figura 2.82.

Sol. $I_1 = -5 \text{ A}$, $I_2 = -4 \text{ A}$, $I_3 = 3 \text{ A}$, $I_4 = 6 \text{ A}$, $V_x = -20 \text{ V}$, $V_y = 18 \text{ V}$.

Prob. 2.21. En el circuito de la Figura 2.83 Calcular: las corrientes I_1, I_2, I_3, I_4 y los voltajes V_x y V_y .

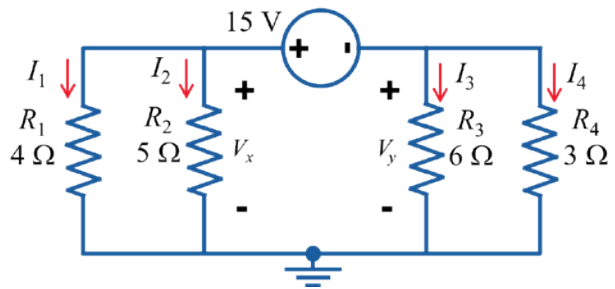


Figura 2.83.

Sol. $I_1 = 1.973 \text{ A}$, $I_2 = 1.578 \text{ A}$, $I_3 = -1.184 \text{ A}$, $I_4 = -2.368 \text{ A}$, $V_x = 7.89 \text{ V}$ y $V_y = -7.10 \text{ V}$.

Prob. 2.22. En el circuito de la Figura 2.84 calcular el voltaje, la corriente y la potencia que en la resistencia de carga R_L .

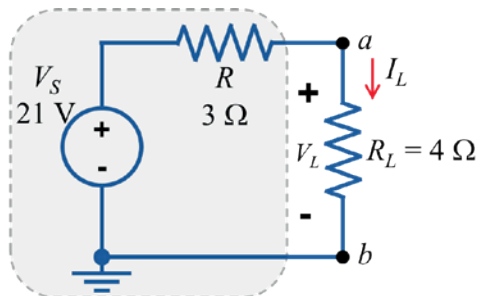


Figura 2.84.

Sol. $V_L = 12 \text{ V}$, $I_L = 3 \text{ A}$, $P_{RL} = 36 \text{ W}$.

Prob. 2.23. Calcular el valor de una fuente de corriente I_S para construir un circuito equivalente al de la parte sombreada de la Figura 2.84, en el que el voltaje, la corriente y la potencia de la resistencia de carga R_L se mantengan igual que en el Prob. 2.22, pero con la fuente de corriente I_S conectada en paralelo con la resistencia R_L tal como se muestra en la Figura 2.85.

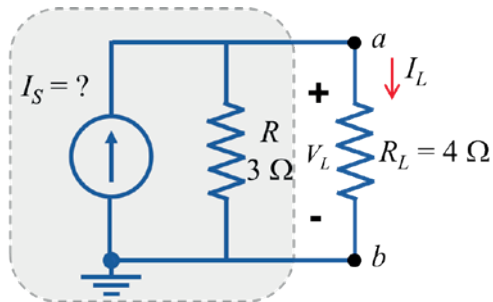


Figura 2.85.

Sol. $I_S = 7 \text{ A}$.

Prob. 2.24. Para el circuito de la Figura 2.86 calcular la corriente, el voltaje y la potencia en de la resistencia de carga R_L .

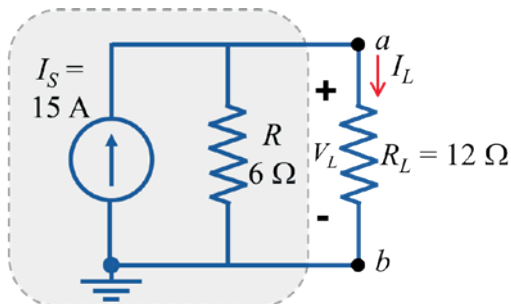


Figura 2.86.

Sol. $I_L = 5 \text{ A}$, $V_L = 60 \text{ V}$, $P_{RL} = 300 \text{ W}$.

Prob. 2.25. Calcular el valor de una fuente de voltaje V_S para construir un circuito equivalente al de la parte sombreada de la Figura 2.86, en el que el voltaje, la corriente y la potencia de la resistencia de carga R_L se mantengan igual que en el Prob. 2.24, pero con la fuente de voltaje V_S conectada en serie con la resistencia R tal como se muestra en la Figura 2.87.

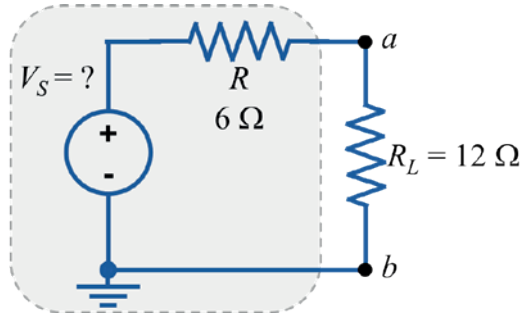


Figura 2.87.

Sol. $V_S = 90 \text{ V}$.

Prob. 2.26. En el circuito de la Figura 2.88 Calcular: R_T , I_T , V_{R2} , V_x , y P_{R5} .

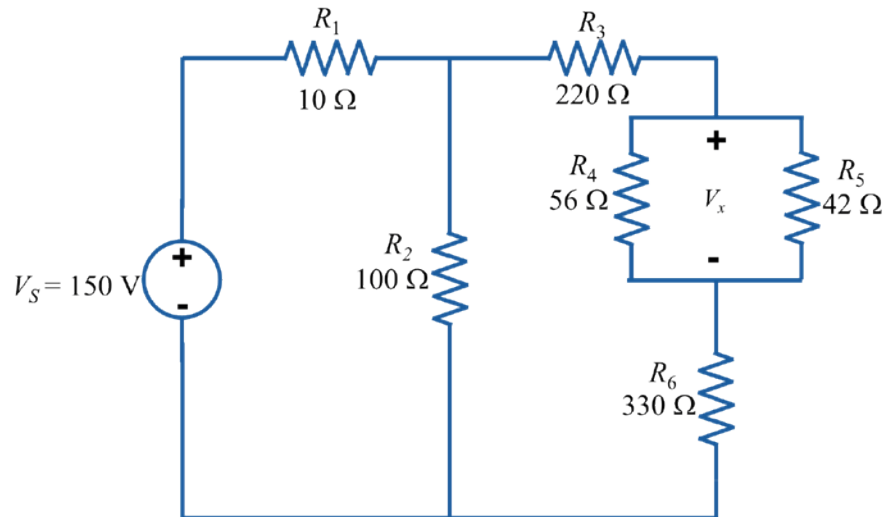


Figura 2.88.

Sol. $R_T = 95.163 \Omega$, $I_T = 1.576 \text{ A}$, $V_{R2} = 134.23 \text{ V}$, $V_x = 5.61 \text{ V}$ y $P_{R5} = 0.749,3 \text{ W}$.

Prob. 2.27. En el circuito de la Figura 2.89 Calcular: R_{ab} , R_{ac} , R_{ad} , R_{ae} y R_{bc} .

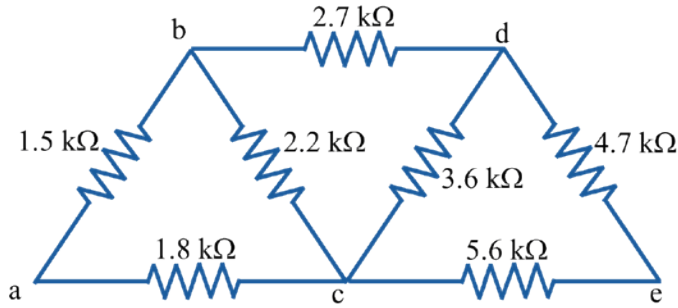


Figura 2.89.

Sol. $R_{ab} = 1,037.08 \Omega$, $R_{ac} = 1,133.39 \Omega$, $R_{ad} = 2,162.53 \Omega$, $R_{ae} = 3,850.44 \Omega$, $R_{bc} = 1,059.46 \Omega$ y $R_{ec} = 1,603.54 \Omega$.

Prob. 2.28. De la Figura 2.90 calcular la resistencia equivalente entre las terminales a y b considerando que todas las resistencias son iguales a R .

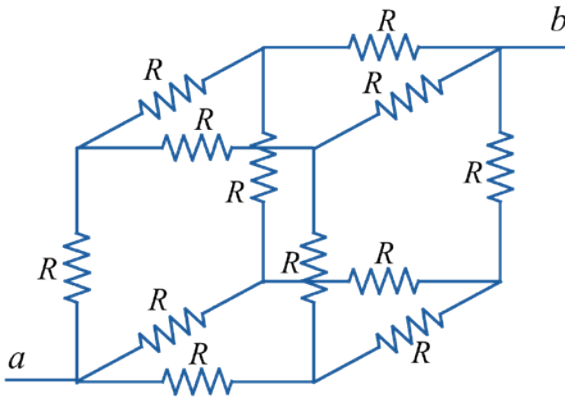


Figura 2.90.

Sol. $R_{ab} = 0.833R$.

Prob. 2.29. En el circuito de la Figura 2.91, Calcular: R_T , I_T , V_0 y P_{R_x} .

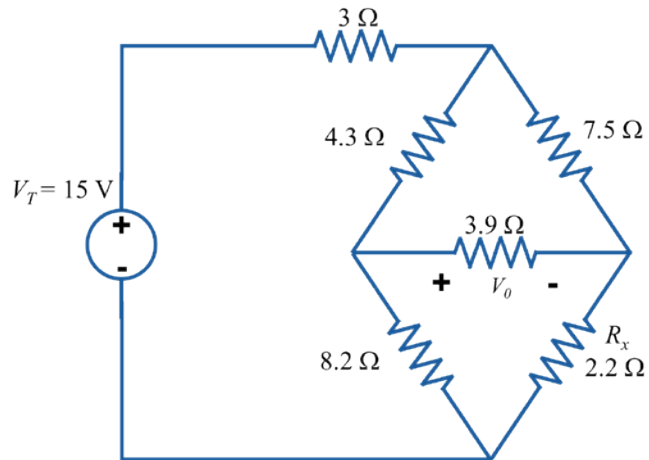


Figura 2.91.

Sol. $R_T = 7.87 \Omega$, $I_T = 1.903 \text{ A}$, $V_0 = 1.846 \text{ V}$ y $P_{R_x} = 3.85 \text{ W}$.

Prob. 2.30. En el circuito de la Figura 2.92 Calcular: R_T , V_i y $P_{3k\Omega}$.

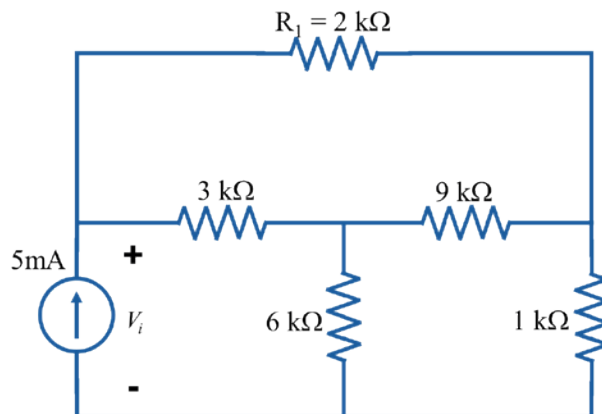


Figura 2.92.

Sol. $R_T = 2,202.8 \Omega$, $V_0 = 11 \text{ 014 V}$ y $P_{3k\Omega} = 6.16 \text{ mW}$.

REFERENCIAS DEL CAPÍTULO

- APCE. (16 de agosto de 2017). Conexiones eléctricas tipo estrella y delta, qué son y para qué nos sirven. Grupo APCE. Recuperado de: <http://www.apcotech.com/BLOG/uncategorized/conexiones-electricas-tipo-estrella-y-delta-que-son-y-para-que-nos-sirven/>
- Cabrerizo, D. M. A., Bozal, J. L. A., & Pérez, J. B. (2008). *Física y Química 1º Bachillerato*. Madrid: Editex.
- Circuito en paralelo. (2014). En *EcuRed*. Recuperado de: https://www.ecured.cu/Circuito_en_paralelo

- ElectrónicaOnline. (2020). Circuito eléctrico mixto. ElectrónicaOnline. Recuperado de: <https://electronicaonline.net/circuito-electrico/circuito-mixto/>
- Comercial Jaramillo. (s. f.). Sanelec calentador de agua eléctrico 1000 watts 1556. En image-4.png (Vol. 331x168, pp. El Calentador de agua eléctrico Sanelec modelo 1556 tiene la capacidad de 1530 litros). Comercial Jaramillo. Recuperado de: <https://comercial-jaramillo.com/producto/sanelec-calentador-de-agua-electrico-1000-watts-1556/>
- Mecatrónica LATAM. (28 de abril de 2021). Resistencia en serie. En Mecatrónica LATAM. Recuperado de: <https://www.mecatronicalatam.com/es/tutoriales/electronica/componentes-electronicos/resistor/resistencia-en-serie/>
- McAllister, W. (2008). Resistores en paralelo. En *Khan Academy*. Recuperado en 2021 de: <https://es.khanacademy.org/science/electrical-engineering/ee-circuit-analysis-topic/ee-resistor-circuits/a/ee-parallel-resistors>
- Fernández, T. y Tamaro, E. (2004). Georg Simon Ohm. En Biografías y vidas (sitio web). Recuperado de: <https://www.biografiasyvidas.com/biografia/o/ohm.htm>
- Tuttnauer. (2009). Autoclaves automáticos y Semiautomáticos. In *Autoclaves de mesa* (Vol. LTR330-0055/TTA/SP/V-2/04.09, pp. 11). Hauppauge, NY 11788: Tuttnauer USA Co.
- Zapata, F. (2021). Circuito en serie. Lifeder. Recuperado de: <https://www.lifeder.com/circuito-serie/>

**DIVISOR DE TENSIÓN,
DIVISOR DE CORRIENTE
Y LEYES DE KIRCHHOFF**

3

INTRODUCCIÓN

Mientras más se avanza en el estudio de los circuitos eléctricos, la forma de resolverlos será una tarea cada vez más complicada y tardada. La ley de Ohm y la simplificación de resistencias en serie y paralelo no serán suficientes para poder resolver circuitos que se tornen cada vez más complejos. Para solucionarlos, será necesario que nos apoyemos de otras herramientas como el divisor de tensión, el divisor de corriente y las leyes de Kirchhoff.

NODOS, RAMAS Y TRAYECTORIAS CERRADAS

Antes de continuar, es necesario definir algunos conceptos para que nos ayuden a comprender mejor las nuevas herramientas de cálculo y las leyes de Kirchhoff; estos conceptos son: nodo, rama, trayectoria cerrada y malla (McAllister, 2008a).

Nodo. Un nodo o nudo es aquel punto de conexión en donde se unen dos o más elementos de un circuito. Un nodo se representa con un círculo relleno para indicar que en ese punto se están uniendo los elementos del circuito. En la Figura 3.1a se muestra un circuito común y en la Figura 3.1b, el mismo circuito, pero con los nodos resaltados, en este caso el circuito cuenta con 4 nodos ($n = 4$).

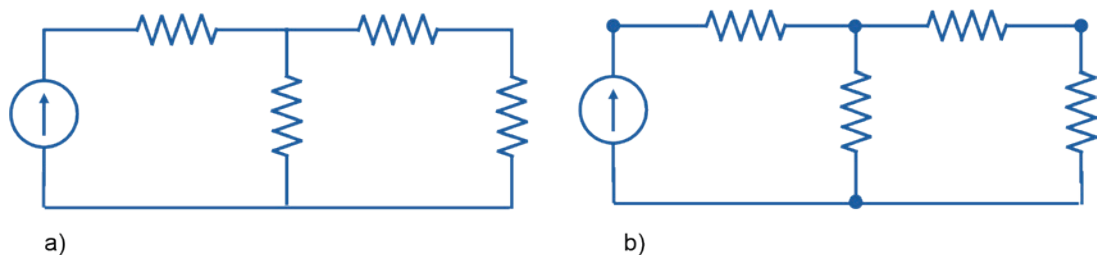


Figura 3.1. Circuito representado a) sin marcar los nodos, b) con los nodos marcados.

Se debe tener cuidado al momento de identificar los nodos porque es muy común que al principio se marquen puntos como nodos cuando en realidad no lo son. Por ejemplo, en el circuito de la Figura 3.1a, es muy común que se marquen los nodos como se aprecia en la Figura 3.2. Sin embargo, los dos nodos que se marcan en las esquinas inferiores no lo son porque entre esos puntos y el nodo central en la parte inferior no hay ningún elemento conectado tal como una resistencia, una fuente, un inductor, etc. El hilo conductor no cuenta como elemento, el hilo se considera en realidad como parte del nodo.

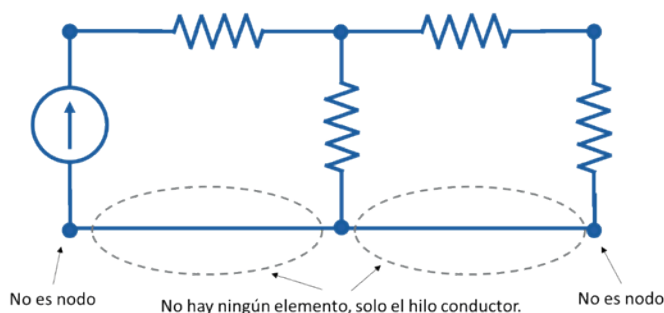


Figura 3.2. Forma errónea de identificar los nodos en un circuito.

Rama. Una rama es la conexión o camino entre dos nodos contiguos, por lo tanto, existe igual número de ramas como elementos en el circuito. En el ejemplo de la Figura 3.1b, existen 5 ramas.

Trayectoria cerrada. Una trayectoria cerrada o lazo es aquel camino que se puede dibujar partiendo de un nodo y siguiendo a través de las ramas del circuito hasta regresar al nodo de partida. Una trayectoria cerrada puede encerrar otras trayectorias cerradas, la única restricción es que no debe pasar dos veces por el mismo nodo.

Malla. Una malla también es una trayectoria cerrada, pero lo más corta que se pueda construir para encerrar una corriente. Una malla, por lo tanto, no encierra a otras trayectorias cerradas.

En la Figura 3.3 se muestran las tres trayectorias cerradas que se pueden construir del ejemplo, pero sólo las marcadas con 1 y 2 son mallas.

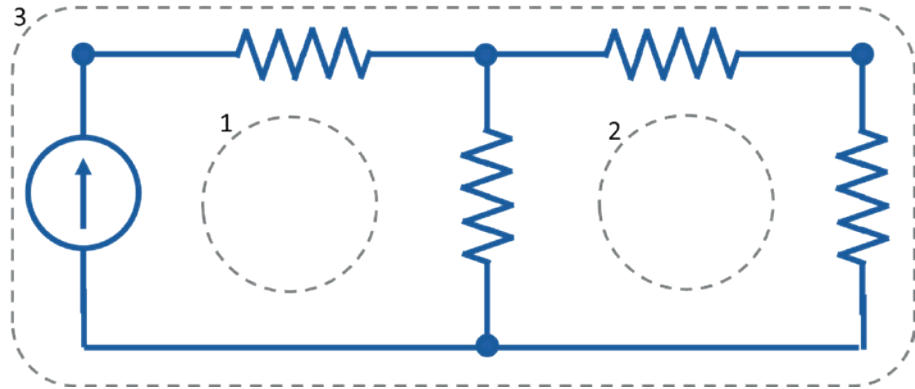


Figura 3.3. Trayectorias cerradas y mallas.

En resumen, en el circuito de la Figura 3.1a se tienen 4 nodos, 5 ramas, 2 mallas y 3 trayectorias cerradas.

Ejemplo 3-1. En el siguiente circuito, determinar cuántos nodos, ramas, mallas y trayectorias cerradas existen.

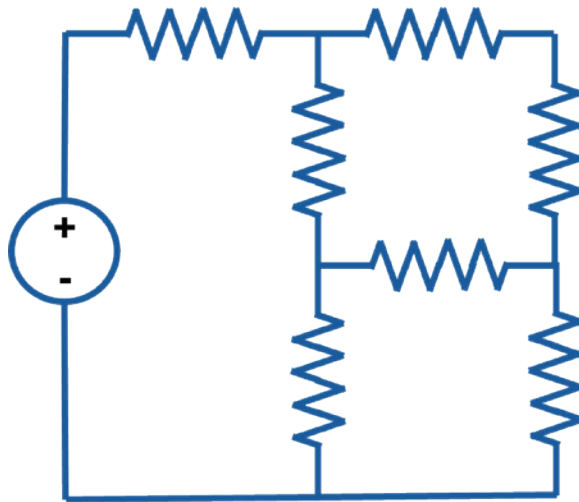


Figura 3.4. Circuito para cálculo de nodos, ramas, mallas y trayectorias cerradas.

Del circuito se aprecia la presencia de 6 nodos ($n = 6$), 8 ramas (elementos), 7 trayectorias cerradas de las cuales 3 son mallas. En la Figura 3.5 se muestra toda esta información representada en el circuito.

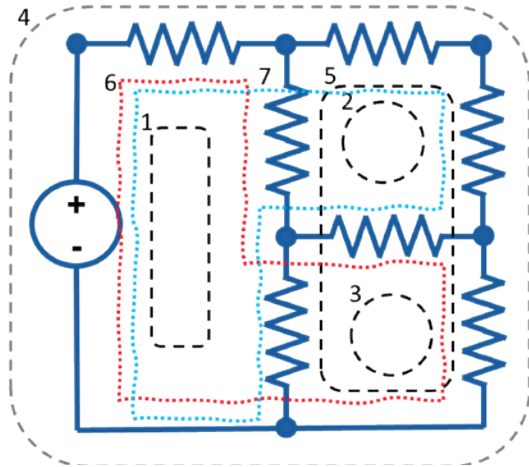


Figura 3.5. Nodos, ramas, mallas y trayectorias cerradas.

FUENTES DE VOLTAJE Y FUENTES DE CORRIENTE EN SERIE Y EN PARALELO

Hasta el momento, sólo se han resuelto problemas en los que aparece una sola fuente de voltaje o de corriente. Sin embargo, es común que en un circuito se presenten más de una fuente de alimentación, y en particular que estén conectadas entre sí en serie o en paralelo. Por lo anterior, es necesario aprender a simplificar las fuentes de voltaje y de corriente cuando se presentan en serie y en paralelo.

Fuentes de voltaje en serie y paralelo

Es muy común que se conecten fuentes de voltaje en serie, de esta manera se puede aumentar el nivel de voltaje en un circuito. El voltaje total en las terminales de las fuentes de voltaje es la suma algebraica de todos los voltajes en las fuentes de alimentación como queda expresado en la ecuación (3.1).

$$V_T = V_1 + V_2 + \dots + V_n \quad (3.1)$$

Donde:

V_1, V_2, \dots, V_n = fuentes de voltaje conectadas en serie.

En la Figura 3.6 se muestra un arreglo de fuentes de voltaje conectadas en serie y el cálculo del voltaje total equivalente de acuerdo con la manera en cómo se considere la polaridad del voltaje de salida.

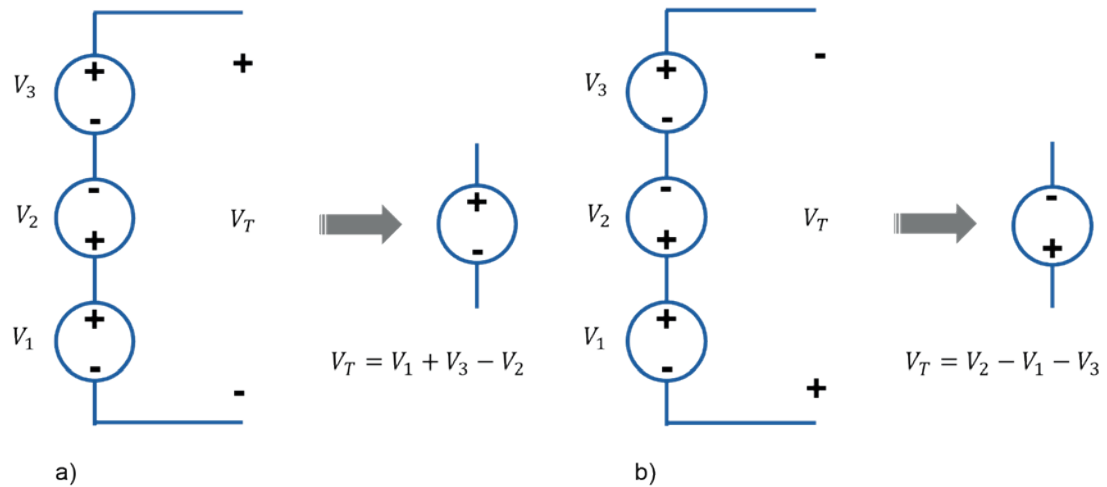


Figura 3.6. Fuentes de voltaje en serie y voltaje total equivalente a) con polaridad positiva, b) con polaridad invertida.

Si se conectan fuentes de voltaje en paralelo se aumenta la capacidad de corriente por parte de la fuente de alimentación. Sin embargo, se debe garantizar que las fuentes tengan las mismas características eléctricas, de este modo ambas fuentes entregarían a la carga la misma cantidad de corriente. Si no se garantiza que las fuentes de voltaje sean iguales, entonces se corre el riesgo de que una entregue más potencia que la otra a la carga y en el peor de los casos que una de las fuentes en lugar de entregar potencia se vuelva una carga para la fuente de mayor voltaje haciendo que todo el sistema se vuelva muy ineficiente (Sixto, 2015). Es por esta razón que no es común encontrar fuentes de voltaje conectadas en paralelo.

Fuentes de corriente en serie y paralelo

Es muy común que en los circuitos eléctricos se presenten fuentes de corriente conectadas en paralelo. Para obtener la corriente total, las fuentes de corriente se suman para obtener una corriente neta como se indica en la ecuación (3.2).

$$I_T = I_1 + I_2 + \dots + I_n \quad (3.2)$$

Donde:

I_1, I_2, \dots, I_n = fuentes de corriente conectadas en paralelo.

En la Figura 3.7 se muestra un arreglo de fuentes de corriente conectada en paralelo y la forma de calcular la corriente neta de la fuente de corriente equivalente.

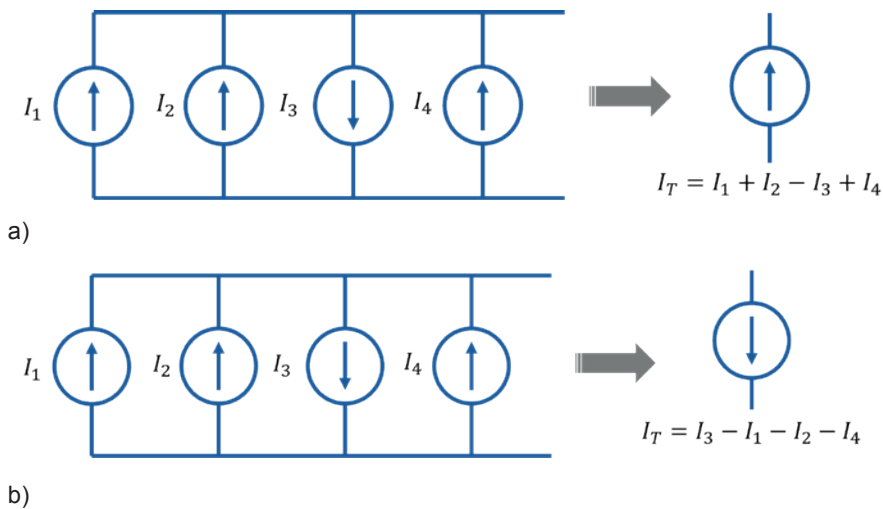


Figura 3.7. Fuentes de corriente en paralelo a) corriente ascendente b) corriente descendente.

Para conectar fuentes de corriente en serie deben ser exactamente iguales, de lo contrario no es posible hacerlo. Recordemos que, conceptualmente, la corriente es el movimiento de cargas eléctricas y la carga no se crea ni se destruye, solamente se transfiere, por lo que no es posible en una rama tener distintos valores de carga o corriente (Electrónica-Básica, 2019).

DIVISOR DE VOLTAJE Y DIVISOR DE CORRIENTE

El divisor de voltaje y el divisor de corriente son dos de las herramientas de cálculo que sirven de apoyo a la ley de Ohm para poder resolver ágilmente un circuito eléctrico.

Divisor de voltaje

El divisor de voltaje es una simplificación del análisis para calcular el voltaje en una resistencia que se encuentra conectada con otras en serie, como se muestra en la Figura 3.8a (Héctor-Hugo, 2018).

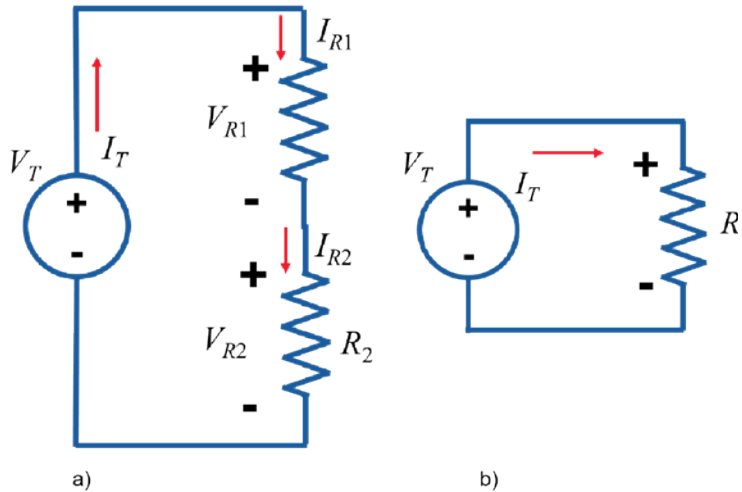


Figura 3.8. Secuencia para obtener el divisor de voltaje.

En el circuito de la Figura 3.8b calculamos la corriente total del circuito, quedando:

$$I_T = \frac{V_T}{R_T} = \frac{V_T}{R_1 + R_2}$$

Si se desea calcular el voltaje en la resistencia R_1 , entonces es suficiente con multiplicar la corriente total por la respectiva resistencia R_1 quedando:

$$V_{R1} = I_T R_1$$

Sustituimos la corriente total y nos queda:

$$V_{R1} = \left(\frac{V_T}{R_1 + R_2} \right) R_1$$

Para calcular el voltaje en la resistencia R_1 queda:

$$V_{R1} = V_T \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) \quad (3.3)$$

Para calcular el voltaje en la resistencia R_2 queda:

$$V_{R2} = V_T \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \quad (3.4)$$

De forma generalizada, se puede calcular el voltaje de cualquier resistencia R_x conectada en serie si se conoce el voltaje total que se les está aplicando.

La ecuación (3.5) define el divisor de voltaje de forma generalizada para cualquier cantidad de resistencias en serie.

$$V_{R_x} = V_T \left(\frac{R_x}{R_1 + R_2 + R_x + \dots + R_n} \right) = V_T \left(\frac{R_x}{R_T} \right) \quad (3.5)$$

Observamos que, en el numerador de la fórmula del divisor de voltaje, se utiliza la resistencia en la cual deseamos calcular el voltaje.

Por ejemplo, en la Figura 3.9, se puede calcular inmediatamente el voltaje de cualquiera de las resistencias.

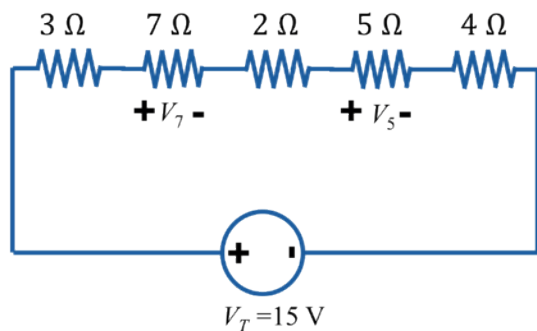


Figura 3.9. Ejemplo de divisor de tensión.

Para calcular los voltajes de las resistencias de 5 Ω y de 7 Ω resulta.

$$V_5 = V_T \left(\frac{R_5}{R_T} \right) = 15 \text{ V} \left(\frac{5 \Omega}{21 \Omega} \right) = 3.57 \text{ V}$$

$$V_7 = V_T \left(\frac{R_7}{R_T} \right) = 15 \text{ V} \left(\frac{7 \Omega}{21 \Omega} \right) = 5 \text{ V}$$

Divisor de corriente.

El divisor de corriente es una simplificación del análisis para calcular la corriente en una resistencia que se encuentra conectada con otras en paralelo (Área-Tecnología, 2021).

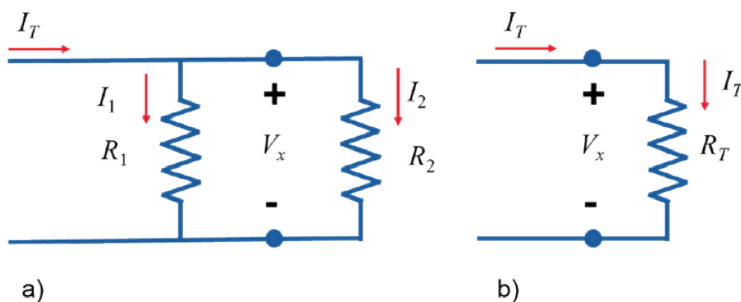


Figura 3.10. Secuencia para obtener el divisor de voltaje.

En el circuito de la Figura 3.1a calculamos la resistencia total, quedando:

$$R_T = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Con esta resistencia, podemos calcular el voltaje V_x ya que es el resultado de multiplicar la corriente total por la resistencia total, quedando:

$$V_x = I_T R_T$$
$$V_x = I_T \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right)$$

Si en la Figura 3.1a se desea calcular la corriente en la resistencia R_1 , entonces es suficiente con dividir el voltaje V_x entre la resistencia R_1 resultando:

$$I_1 = \frac{V_x}{R_1}$$

Sustituimos el voltaje V_x y nos queda:

$$I_1 = \frac{I_T \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right)}{R_1}$$

Para calcular I_1 simplificamos algebraicamente la expresión anterior y resulta:

$$I_1 = I_T \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \quad (3.6)$$

De forma semejante, para calcular la corriente I_2 la expresión quedaría de la siguiente manera:

$$I_2 = I_T \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) \quad (3.7)$$

Observamos que para calcular la corriente que nos interesa, a diferencia del divisor de tensión, debemos utilizar en el numerador la resistencia opuesta a la que le deseamos calcular la corriente.

Se podría generalizar la fórmula para un divisor de corriente, pero no tiene sentido ya que la expresión sólo aplica para dos resistencias en paralelo, entonces primero se tiene que simplificar el circuito para tener únicamente dos resistencias conectadas en paralelo y después aplicar la ecuación (3.6) o la ecuación (3.7).

Ejemplo 3-2. En la Figura 3.11, utilizando el divisor de corriente, calcular la corriente para cada resistencia.

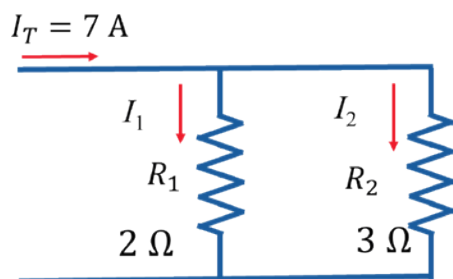


Figura 3.11. Ejemplo de divisor de corriente.

Solución.

Para calcular las corrientes aplicamos el divisor de corriente quedando:

$$I_1 = I_T \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) = (7 \text{ A}) \left(\frac{3 \Omega}{2 \Omega + 3 \Omega} \right) = 4.2 \text{ A}$$

$$I_2 = I_T \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) = (7 \text{ A}) \left(\frac{2 \Omega}{2 \Omega + 3 \Omega} \right) = 2.8 \text{ A}$$

Ejemplo 3-3. Si se deseara calcular la corriente de la resistencia R_3 del circuito de la Figura 3.12, ¿Cómo se debería aplicar el divisor de corriente?

Solución.

Primero se tendría que reducir a sólo dos resistencias, la resistencia de interés R_3 y el resto de las resistencias agrupadas en una sola resistencia en paralelo R_w , como se observa en la Figura 3.13.

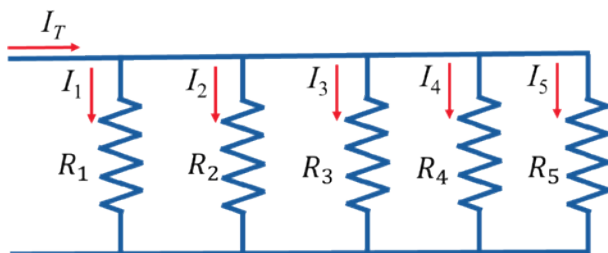


Figura 3.12. Divisor de corriente con varias resistencias en paralelo.

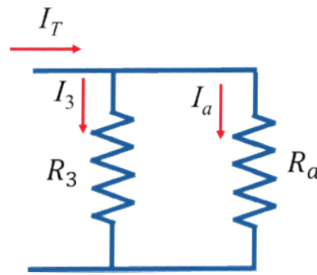


Figura 3.13. Reducción de resistencias para poder aplicar el divisor de corriente.

Las ecuaciones entonces se transformarían para quedar:

$$R_a = R_1 \parallel R_2 \parallel R_4 \parallel R_5$$

$$I_3 = I_T \frac{R_a}{R_a + R_3}$$

De esta manera sería posible aplica el divisor de corriente al circuito.

LEYES DE KIRCHHOFF

Gustav Kirchhoff enunció en 1845 las dos leyes que fortalecen a la ley de Ohm para el análisis de los circuitos eléctricos. Estas dos leyes están basadas principalmente en el principio de la conservación de la energía (Ruiza *et al.*, 2004). Existen varias formas de cómo enunciarlas, pero en esencia todas dan la misma idea.

Ley de corrientes de Kirchhoff (LCK)

La ley de corrientes de Kirchhoff de la corriente establece que la suma algebraica de todas las corrientes que entran en un nodo es igual a la suma algebraica de todas las corrientes que salen de él (McAllister, 2008b).

Matemáticamente queda expresada como:

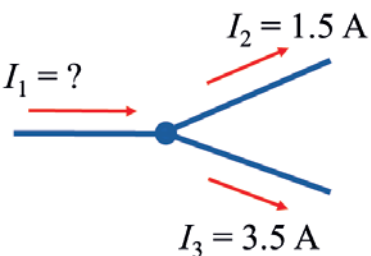
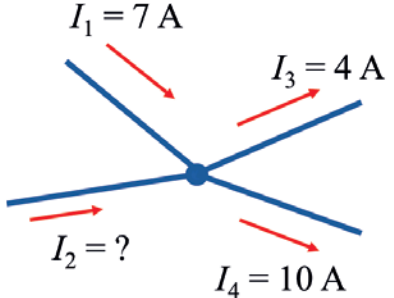
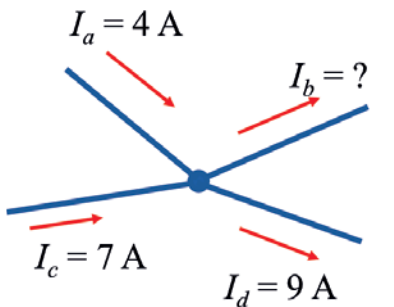
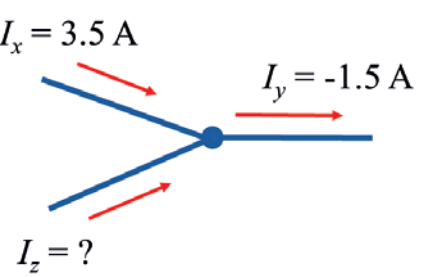
$$\sum I_{entran} = \sum I_{salen} \quad (3.8)$$

- Para poder aplicar la LCK en un nodo, es necesario que todas las ramas tengan identificada la dirección de la corriente y su nombre o valor.
- Las fuentes de corriente ya tienen asignado un sentido para la dirección de la corriente.
- En caso de que falte algún elemento en el cual se deba definir la dirección de la corriente, entonces ésta se definirá saliendo del nodo si es que se trata de elementos pasivos.

A continuación, se muestran algunos ejemplos de cómo aplicar la ley de corrientes de Kirchhoff en nodos y con resistencias.

Ejemplo 3-4. En la Tabla 3.1 se muestran distintos arreglos de nodos, aplicando la ley de corrientes de Kirchhoff, calcular la corriente que falta en cada caso.

Tabla 3.1 Ejemplos de nodos con desarrollo de respuesta.

| Nodo | Respuesta |
|---|--|
|  | $\sum I_{entran} = \sum I_{salen}$ $I_1 = I_2 + I_3$ $I_1 = 1.5 \text{ A} + 3.5 \text{ A}$ $I_1 = 5 \text{ A}$ |
|  | $\sum I_{entran} = \sum I_{salen}$ $I_1 + I_2 = I_3 + I_4$ <p>Despejamos I_2</p> $I_2 = I_3 + I_4 - I_1$ $I_2 = 4 \text{ A} + 10 \text{ A} - 7 \text{ A}$ $I_2 = 7 \text{ A}$ |
|  | $\sum I_{entran} = \sum I_{salen}$ $I_a + I_c = I_b + I_d$ <p>Despejamos I_b</p> $I_b = I_a + I_c - I_d$ $I_b = 4 \text{ A} + 7 \text{ A} - 9 \text{ A}$ $I_b = 2 \text{ A}$ |
|  | $\sum I_{entran} = \sum I_{salen}$ $I_x + I_z = I_y$ <p>Despejamos I_z</p> $I_z = I_y - I_x$ $I_z = (-1.5 \text{ A}) - 3.5 \text{ A}$ $I_z = -5 \text{ A}$ |

Ejemplo 3-5. En la Figura 3.14 se muestran distintas resistencias con diferentes valores de corriente entrando y saliendo por los nodos. Aplicando la ley de corrientes de Kirchhoff, calcular la corriente que falta en cada caso.

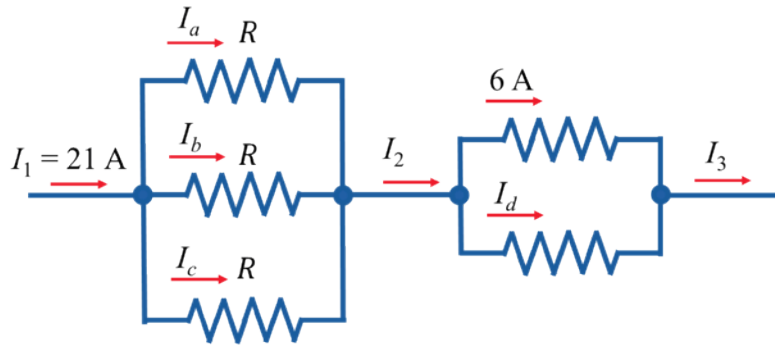


Figura 3.14. Resistencias en ley de corrientes de Kirchhoff.

Respuesta.

Observe que la corriente que está definida es I_1 con esta corriente se puede calcular el resto de los valores de corrientes.

Calculamos I_a , I_b e I_c :

Observar que $I_a = I_b = I_c$ porque las 3 resistencias son iguales, entonces:

$$I_a = \frac{21 \text{ A}}{3} = 7 \text{ A}$$

$$I_a = I_b = I_c = 7 \text{ A}$$

Calculamos I_2 :

$$I_2 = I_a = I_b = I_c$$

$$I_2 = 7 \text{ A} + 7 \text{ A} + 7 \text{ A}$$

$$I_2 = 21 \text{ A}$$

Calculamos I_d :

$$I_2 = 6 \text{ A} + I_d$$

$$I_d = I_2 - 6 \text{ A}$$

$$I_d = 21 \text{ A} - 6 \text{ A}$$

$$I_d = 15 \text{ A}$$

Calculamos I_3 :

$$6 \text{ A} + I_d = I_3$$

$$I_3 = 6 \text{ A} + I_d$$

$$I_3 = 6 \text{ A} + 15 \text{ A}$$

$$I_3 = 21 \text{ A}$$

Ley de voltajes o de tensiones de Kirchhoff (LVK)

La ley de voltajes de Kirchhoff establece que la suma algebraica de todos los voltajes en cualquier trayectoria cerrada de un circuito es igual a cero (McAllister, 2008b).

Matemáticamente queda expresada como:

$$\sum V_{trayectoria} = 0 \text{ V} \quad (3.9)$$

- Para poder aplicar la LVK, es necesario que todos los elementos de la trayectoria cerrada tengan definidos sus nombres o su valor y sus respectivos signos de voltaje.
- Las fuentes de voltaje ya los tienen definidos.
- Si algún elemento no tiene los signos definidos, entonces los estableceremos nosotros.
- Para definir las polaridades de los signos en los elementos faltantes, se utiliza la convención de signos pasiva.
- Si existen varias fuentes en el circuito, entonces se puede escoger cualquier sentido para la dirección de la corriente y con esta dirección se colocarán los signos en los elementos.
- Para construir las ecuaciones al aplicar la LVK se inicia en cualquier elemento al azar y se puede hacer en sentido horario o en sentido antihorario, el resultado final siempre debe ser el mismo o equivalente.
- A cada elemento que se anota en la ecuación, se le coloca el primer signo que aparece al hacer el recorrido en la trayectoria cerrada en el sentido que se escoja.

A continuación, se muestran algunos ejemplos de cómo aplicar la ley de voltajes de Kirchhoff para resolver circuitos eléctricos.

Ejemplo 3-6. En la Figura 3.15 se muestra un circuito formado por dos fuentes de voltaje y una resistencia. Aplicando la ley de tensiones o de voltajes de Kirchhoff, calcular el voltaje V_x que se indica.

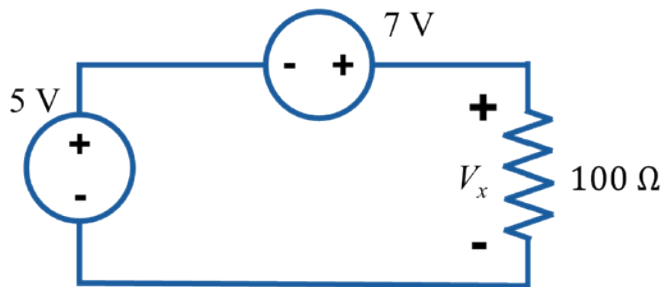


Figura 3.15. Ejemplo para aplicar la LTK.

Respuesta.

Comenzando en la fuente de 5 V y en favor de las manecillas de reloj, construimos la ecuación de esta trayectoria cerrada resultando:

$$\sum V_{trayectoria} = 0 \text{ V}$$

$$-5 \text{ V} - 7 \text{ V} + V_x = 0 \text{ V}$$

Despejamos V_x y nos queda:

$$V_x = 10 \text{ V}$$

Si comenzamos en la misma fuente de 5 V pero en contra de las manecillas del reloj resulta:

$$+5 \text{ V} - V_x + 7 \text{ V} = 0 \text{ V}$$

Despejamos V_x y nos vuelve a quedar:

$$V_x = 10 \text{ V}$$

Ejemplo 3-7. En la Figura 3.16, se muestra un circuito también formado por dos fuentes de voltaje y una resistencia. Aplicar la ley de tensiones o de voltajes de Kirchoff, para calcular V_y .

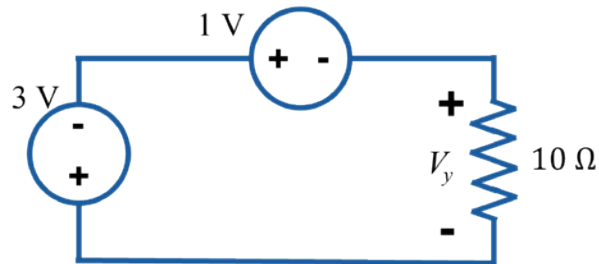


Figura 3.16. Ejemplo para aplicar la LTK.

Respuesta.

Comenzando en la fuente de 1 V y en favor de las manecillas de reloj, construimos la ecuación de esta trayectoria cerrada resultando:

$$\sum V_{trayectoria} = 0 \text{ V}$$
$$+1 \text{ V} + V_y + 3 \text{ V} = 0 \text{ V}$$

Despejamos V_y y nos queda:

$$V_y = -4 \text{ V}$$

Ejemplo 3-8. Calcular la corriente total del circuito y la potencia de todos los elementos que lo integran, determinar si los elementos generan o absorben potencia eléctrica.

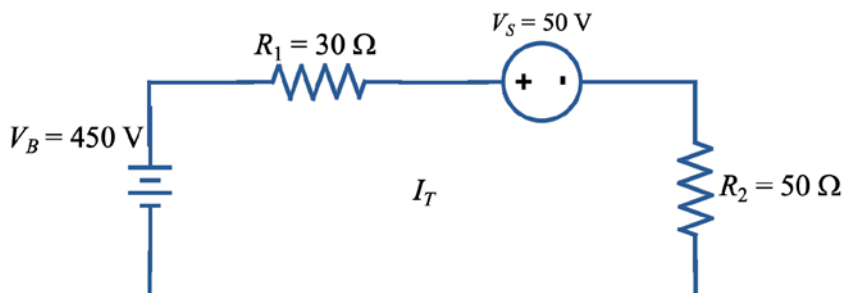


Figura 3.17. Circuito con dos fuentes de voltaje sin dirección de corriente especificada.

Respuesta.

Observamos que se tienen dos fuentes de alimentación en el circuito, una batería representada con V_B , y otra fuente de voltaje llamada simplemente V_S . Se nos pide calcular la corriente total del circuito I_T , pero no se nos indica en qué dirección se debe establecer dicha corriente, por lo tanto, es el estudiante quien debe establecer esta dirección o sentido. La dirección se puede establecer en sentido horario \curvearrowright (a favor de las manecillas del reloj) o en sentido antihorario \curvearrowleft (en contra de las manecillas del reloj). En realidad, el estudiante puede seleccionar cualquiera de las dos direcciones y el resultado le indicará si encontró la dirección de la corriente positiva o la dirección de la corriente negativa.

Cuando en el circuito exista una fuente de corriente no habrá duda de cuál es la dirección de ésta, así que no tendrá problemas para asignar la dirección en ese caso. Pero si sólo se tienen fuentes de voltaje y, además, éstas están conectadas en forma opuesta, es decir, con los signos haciendo suponer cada una impone una corriente en el circuito opuesta a la de la otra, entonces la dirección de la corriente se seleccionará de acuerdo con el valor de la fuente que cuente con mayor voltaje. La idea de establecer este criterio es para esperar que el resultado que se obtenga sea el resultado de la corriente positiva.

Se prefiere encontrar siempre la corriente positiva porque de esta manera se sabe con mayor facilidad si los elementos en el circuito generan o consumen potencia, pero si ese no es el objetivo, entonces cualquiera de las dos direcciones será correcta.

En general, cuando se desconoce la dirección de la corriente en un circuito, la dirección que se asigna por defecto es en sentido horario.

Entonces, y de acuerdo a lo explicado con anterioridad, estableceremos la dirección de la corriente en sentido horario por dos razones; la primera porque la fuente con mayor voltaje es V_B y la segunda porque es así como generalmente se establece cuando desconocemos el sentido de la corriente. De igual manera, con este sentido en la corriente y con la convención pasiva de los signos, establecemos el nombre y los signos para del voltaje en cada resis-

tencia. En la Figura 3.18 se muestra cómo queda el circuito con la corriente asignada.

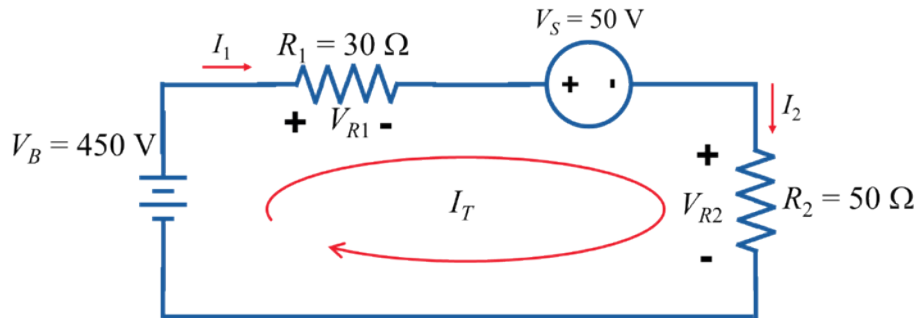


Figura 3.18. Dirección de corriente, nombre y signos de voltaje en las resistencias.

Para calcular la corriente del circuito, aplicamos la ley de voltajes de Kirchhoff (LVK) en el sentido que se estableció la corriente, quedando:

$$\sum V_{trayectoria} = 0 \text{ V}$$

$$-V_B + V_{R1} + V_S + V_{R2} = 0 \text{ V} \quad (3.10)$$

De acuerdo con la ley de Ohm, podemos sustituir cada voltaje de las resistencias por su respectivo producto IR , quedando:

$$-V_B + I_1 R_1 + V_S + I_2 R_2 = 0 \text{ V} \quad (3.11)$$

Pero como se trata de un circuito en serie, entonces:

$$I_T = I_1 = I_2$$

En la ecuación (3.11) sustituimos la corriente para cada voltaje de las resistencias, quedando:

$$-V_B + I_T R_1 + V_S + I_T R_2 = 0 \text{ V} \quad (3.12)$$

Despejamos I_T de la ecuación (3.12) y resulta:

$$I_T(R_1 + R_2) = V_B - V_S$$

$$I_T = \frac{V_B - V_S}{R_1 + R_2} \quad (3.13)$$

Con la ecuación (3.13) es posible calcular la corriente I_T y con este resultado calcular las potencias de todos los componentes del circuito.

Sustituimos los valores de voltajes y resistencias en la ecuación (3.13), quedando:

$$I_T = \frac{V_B - V_S}{R_1 + R_2} = \frac{450 \text{ V} - 50 \text{ V}}{30 \Omega + 50 \Omega}$$

$$I_T = 5 \text{ A}$$

Notamos que el valor de la corriente es de +5 A, lo cual significa que hemos encontrado el valor de la corriente positiva (+I) tal como se esperaba.

Una vez que se ha calculado el valor de la corriente I_T entonces ya es posible calcular la potencia en cada elemento del circuito. Hagamos dicho cálculo tal como se indica a continuación.

Potencia de la batería V_B .

$$P_B = V_B I_T = (450 \text{ V})(5 \text{ A}) = 2,250 \text{ W}$$

Potencia de la fuente V_S .

$$P_S = V_S I_T = (50 \text{ V})(5 \text{ A}) = 250 \text{ W}$$

Potencia de las resistencias R_1 y R_2 .

$$P_{R1} = I_1^2 R_1 = I_T^2 R_1 = (5 \text{ A})^2 (30 \Omega) = 750 \text{ W}$$

$$P_{R2} = I_2^2 R_2 = I_T^2 R_2 = (5 \text{ A})^2 (50 \Omega) = 1,250 \text{ W}$$

Ya calculamos la corriente total I_T , que es la misma para todos los elementos del circuito por estar en serie, y acabamos de calcular todas las potencias en los elementos del circuito. Ahora falta determinar qué elementos se encuentran generando potencia y qué elementos la están consumiendo o absorbiendo.

Pero, antes de continuar, se podría pensar que las dos fuentes de voltaje aportan la potencia al circuito y que la suma de las potencias de las resistencias debe ser igual a la suma de la potencia en las fuentes de alimentación. Sin embargo, la suma de la potencia en las fuentes es de 2,500 W mientras que la suma de las potencias en las resistencias es de 2,000 W; algo no está bien. ¿Dónde están los otros 500 W que están entregando teóricamente las fuentes de voltaje?

Se supone que el balance de las potencias debería ser igual, entonces, ¿qué ocurrió? Si todo lo hicimos bien, ¿qué es lo que estuvo mal en nuestro análisis? Son muchas preguntas y no tenemos respuestas aparentemente. Si revisamos los cálculos, veremos que no nos hemos equivocado, todo está bien, incluso hasta la corriente nos dio positiva, como lo esperábamos.

La respuesta a estas preguntas nos la proporciona la convención de signos pasiva. Recordemos que esta convención nos dice qué elementos consumen potencia y qué elementos la proporcionan, dependiendo de cómo fluye la corriente positiva respecto de las terminales del voltaje en cada elemento. La convención de signos pasiva nos establece que:

Si la corriente positiva (+I) sale por la terminal positiva (+) del voltaje en el elemento, indica que dicho elemento entrega o genera potencia, pero si la corriente positiva (+I) entra por la terminal positiva (+) del voltaje en el elemento, indica que dicho elemento consume o disipa la potencia.

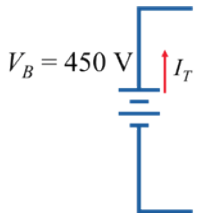
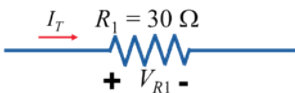
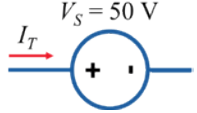
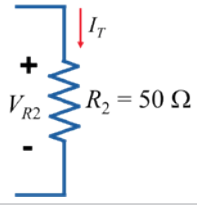
De la Figura 3.18 se analiza cada elemento para saber si genera o absorbe potencia. Entonces, de acuerdo con los signos de voltaje que tiene cada elemento, y sabiendo que la corriente que está representada en el circuito corresponde con la dirección de la corriente positiva, se averigua si dicho elemento genera potencia o la absorbe.

En la Tabla 3.2 se presenta un análisis de cada elemento que integra al circuito y en el que se determina si dicho elemento genera o consume potencia. Así como un balance entre los elementos que generan potencia y los que la consumen.

Si se revisa con detenimiento la Tabla 3.2 todo concuerda; resulta que la fuente de voltaje V_S en lugar de estar generando potencia realmente la está consumiendo, pero a simple vista esto no se puede apreciar. Un ejemplo donde se puede encontrar un circuito con estas características es en los circuitos cargadores de baterías donde las baterías necesitan tomar energía de otras fuentes de alimentación.

Es muy importante comprender el tipo de análisis que se acaba de realizar, ya que es fundamental para conocer qué es lo que ocurre eléctricamente con la potencia en cada elemento que integra un circuito eléctrico.

Tabla 3.2 Análisis de la potencia en cada elemento del circuito.

| Elemento | Dirección de la corriente positiva respecto de los signos de voltaje | Genera | Absorbe |
|-------------------|--|---------|---------|
| Fuente V_B |  | 2,250 W | — |
| Resistencia R_1 |  | — | 750 W |
| Fuente V_S |  | — | 250 W |
| Resistencia R_2 |  | — | 1,250 W |
| Suma de potencias | | 2,250 W | 2,250 W |

Ejemplo 3-9. Con los datos que se muestran en la Figura 3.19 y las leyes de Kirchoff, calcular los voltajes y las corrientes de todas las resistencias del circuito.

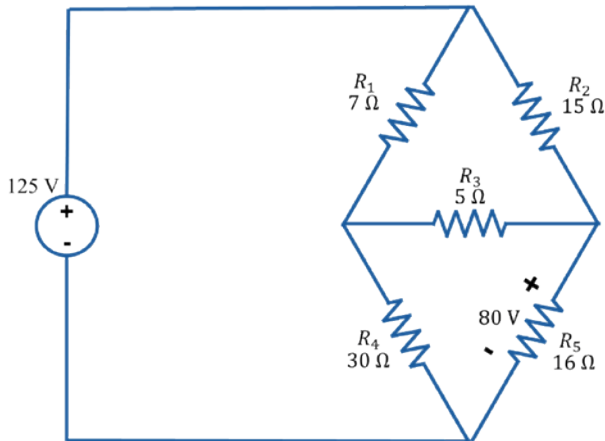


Figura 3.19. Ejemplo para aplicar las leyes de Kirchoff.

Respuesta.

Marcamos los nodos, colocamos las direcciones de la corriente y los signos de los voltajes en todos los elementos, como se observa en la Figura 3.20.

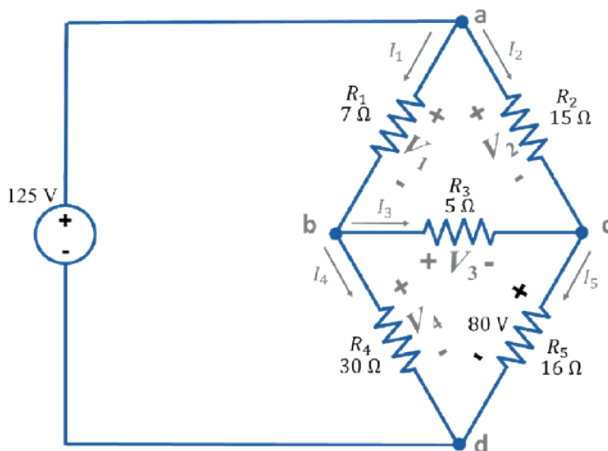


Figura 3.20. Colocación de voltajes y dirección de corrientes en el circuito.

Podemos calcular el voltaje V_2 aplicando la LVK si construimos una trayectoria cerrada por todo el perímetro del circuito con el voltaje de la resistencia R_5 , el voltaje de la fuente de alimentación y el voltaje V_2 de la resistencia R_2 tal como se indica en la Figura 3.21.

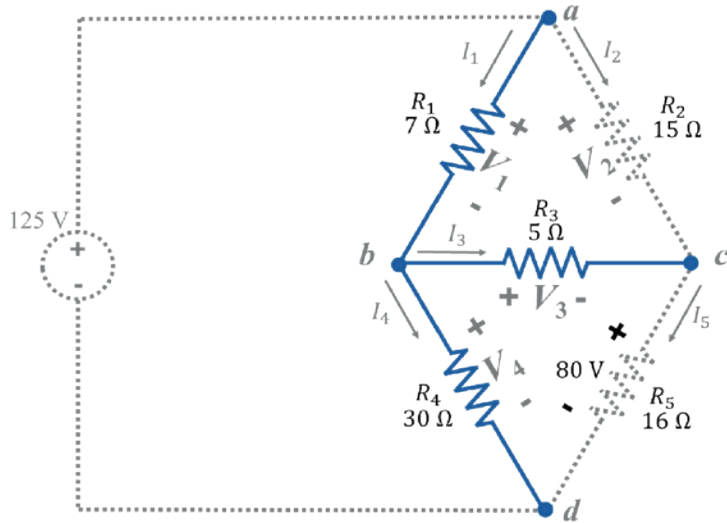


Figura 3.21. Trayectoria cerrada para calcular V_2 con la LVK.

Construimos la ecuación de la LVK en sentido horario \curvearrowright y comenzando en la fuente de alimentación.

$$\sum V_{trayectoria} = 0 \text{ V}$$

$$-125 \text{ V} + V_2 + 80 \text{ V} = 0 \text{ V}$$

Despejamos V_2 , quedando.

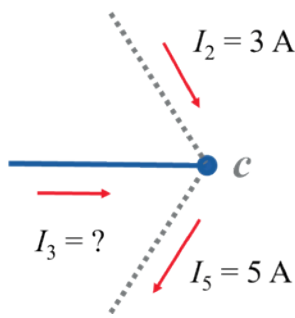
$$V_2 = 125 \text{ V} - 80 \text{ V}$$

$$V_2 = 45 \text{ V}$$

Con el voltaje de R_2 y de R_5 se pueden calcular los valores de sus respectivas corrientes aplicando la ley de Ohm.

$$I_2 = \frac{V_2}{R_2} = \frac{45 \text{ V}}{15 \Omega} = 3 \text{ A} \quad I_5 = \frac{V_5}{R_5} = \frac{80 \text{ V}}{16 \Omega} = 5 \text{ A}$$

Con estos valores de corrientes es posible determinar otros valores del circuito, por ejemplo, en el nodo "c" se puede calcular la corriente I_3 y con este valor de corriente se calcula el voltaje V_3 .



$$\sum I_{entran} = \sum I_{salen}$$

$$I_2 + I_3 = I_5$$

Despejamos I_3

$$I_3 = I_5 - I_2$$

$$I_3 = 5 \text{ A} - 3 \text{ A}$$

$$I_3 = 2 \text{ A}$$

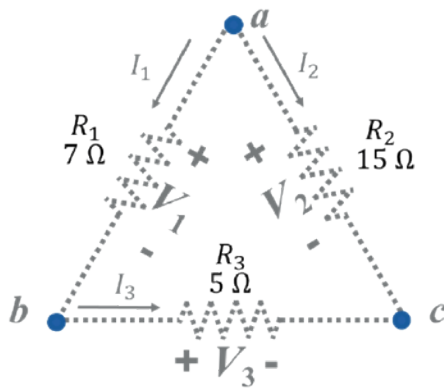
Calculamos entonces el voltaje V_3 con la ley de Ohm para el voltaje.

$$V_3 = I_3 R_3 = (2 \text{ A})(5 \Omega) = 10 \text{ V}$$

Ahora con el voltaje V_3 es posible calcular el resto de los voltajes en el circuito, así como con la corriente I_3 se pueden calcular el resto de las corrientes.

Para calcular el voltaje V_1 ahora construimos una trayectoria cerrada con los voltajes de las resistencias R_1, R_2 y R_3 como se aprecia en la Figura 3.22.

Construimos la ecuación de la LVK en sentido horario \curvearrowright y comenzamos en el voltaje de la resistencia R_2 .



$$\sum V_{trayectoria} = 0 \text{ V}$$

$$+ V_2 - V_3 - V_1 = 0 \text{ V}$$

Despejamos V_1 , quedando.

$$V_1 = V_2 - V_3$$

$$V_1 = 45 \text{ V} - 10 \text{ V}$$

$$V_1 = 35 \text{ V}$$

Figura 3.22. Ley de voltajes de Kirchhoff para calcular V_1 .

Ahora para calcular el voltaje V_4 construimos una trayectoria cerrada con los voltajes de las resistencias R_3, R_4 y R_5 como se aprecia en la Figura 3.23.

Construimos la ecuación de la LVK en sentido horario \curvearrowright y comenzamos en el voltaje de la resistencia R_5 .

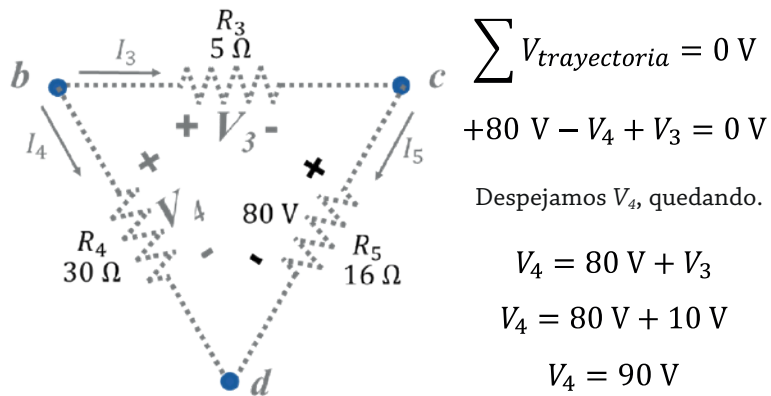


Figura 3.23. Ley de voltajes de Kirchhoff para calcular V_4 .

De esta manera se han calculado todos los voltajes del circuito, solo falta calcular las corrientes de las resistencias R_1 y R_4 . Para calcular las corrientes que faltan, utilizamos la ley de Ohm y los voltajes que acabamos de calcular.

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1} = \frac{35 \text{ V}}{7 \Omega} = 5 \text{ A} \quad I_5 = \frac{V_4}{R_4} = \frac{90 \text{ V}}{30 \Omega} = 3 \text{ A}$$

De esta manera se calcularon todos los voltajes y las corrientes en el circuito empleando las leyes de Kirchhoff y la ley de Ohm.

CIRCUITOS CON FUENTES DEPENDIENTES

Los circuitos con fuentes dependientes son una parte fundamental para el estudio de la electricidad y la electrónica. Las fuentes dependientes son de gran utilidad al momento de estudiar los transistores y los amplificadores operacionales (OpAmp) (Angel y Cristobal, 2015). De igual manera, las leyes de Kirchhoff son parte importante para comprender cómo resolver un circuito en el que se utilicen fuentes dependientes.

Antes de comenzar a resolver un circuito con fuentes dependientes, es muy importante aprender a distinguir y separar el valor de la fuente dependiente del valor del elemento que la controla (puede ser una corriente o un voltaje). Esto es algo en lo que muchos estudiantes se confunden y es la causa principal para comenzar erróneamente a resolver un circuito con fuentes dependientes.

El valor de la fuente dependiente es sólo una constante que multiplica una corriente o un voltaje que se encuentra en otra parte del circuito. La forma en cómo se mide dicha corriente o voltaje, puede o no coincidir con la dirección de la corriente o la polaridad del voltaje del elemento de donde se mide.

Es importante comprender esta diferencia porque es muy común que los estudiantes supongan la polaridad del voltaje o la dirección de la corriente del elemento donde se mide, con la forma en que se debe analizar el circuito y eso no es necesariamente obligatorio, aunque algunas veces resulta útil.

En los temas siguientes, se presentan ejemplos donde se hace énfasis en la igualdad o diferencia que existe entre el voltaje y la corriente del elemento, y el voltaje y la corriente que se debe utilizar para la fuente dependiente.

Los temas en donde se explica lo anterior corresponden con los circuitos de un solo lazo o trayectoria cerrada y los circuitos de dos nodos.

Análisis de circuitos de un solo lazo o trayectoria cerrada

Es muy común encontrar circuitos que tengan todos sus elementos conectados en serie y, por lo tanto, cuenten únicamente con un solo lazo o trayectoria cerrada (Hayt *et al.*, 2007). De igual manera, es común encontrar en este tipo de circuitos la presencia de alguna fuente dependiente.

Ejemplo 3-10. En el circuito que se muestra en la Figura 3.24 calcular el voltaje V_A y la potencia que genera o absorbe cada elemento que lo integra.

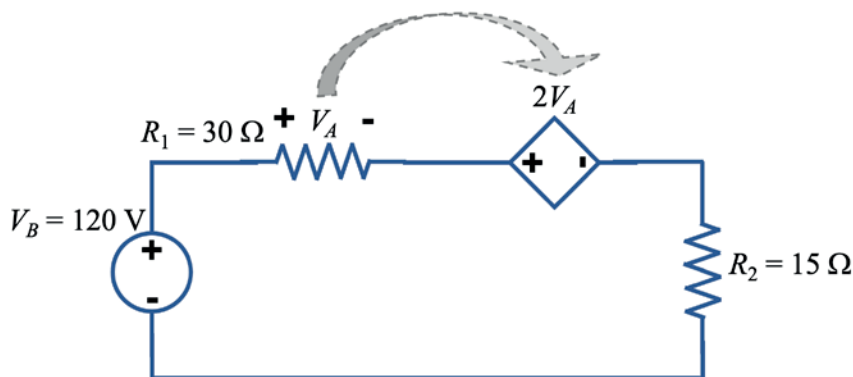


Figura 3.24. Circuito de un solo lazo con fuente dependiente.

Respuesta.

Se trata de un circuito con un solo lazo o trayectoria cerrada y una fuente de voltaje dependiente de voltaje, esto se sabe porque la constante 2 que aparece en la fuente dependiente está multiplicando otro voltaje, en este caso V_A . Si estuviera multiplicando una corriente, entonces sería una fuente de voltaje dependiente de corriente. Obsérvese que en el circuito se encuentran definidas las polaridades para los voltajes de las fuentes, tanto la fuente independiente como para la fuente dependiente (son los signos que están en el interior de los símbolos).

Lo que falta por definir es la dirección de la corriente y las polaridades de los voltajes en las resistencias. Es aquí donde, después de observar el circuito de la Figura 3.24, más de alguno se preguntará, ¿qué acaso no están definidos ya los signos del voltaje para la resistencia R_1 ? y la respuesta es ¡no! Lo que está definido es la polaridad de cómo se medirá el voltaje V_A para ser utilizado en la fuente dependiente.

Esta es la parte donde no se debe generar confusión ya que la fuente dependiente tendrá como valor el producto ($2 V_A$). Por ejemplo, si V_A valiera 5 V, entonces el valor de la fuente dependiente sería de 10 V; si V_A valiera -7 V, entonces el valor de la fuente dependiente sería de -14 V y así sucesivamente. El problema es que *a priori* no se sabe cuánto vale V_A y por lo tanto tampoco se sabe el valor de la fuente dependiente, sólo se sabe que valdrá dos veces el valor de V_A .

Entonces, lo que se debe definir para poder continuar con la solución del ejercicio es el sentido o dirección de la corriente y con ella los signos de los voltajes en las resistencias. Como ya se explicó con anterioridad, existe un criterio para asignar la dirección de la corriente, la fuente de mayor voltaje impondrá esa dirección. Pero, si no se sabe cuál es la fuente de mayor voltaje, entonces se puede seleccionar al azar la dirección de la corriente, esperando encontrar la dirección de la corriente positiva, en este caso se selecciona el sentido horario \odot .

En la Figura 3.25 se muestra el sentido de la corriente y con ella cómo quedan definidas las polaridades de los voltajes en las resistencias.

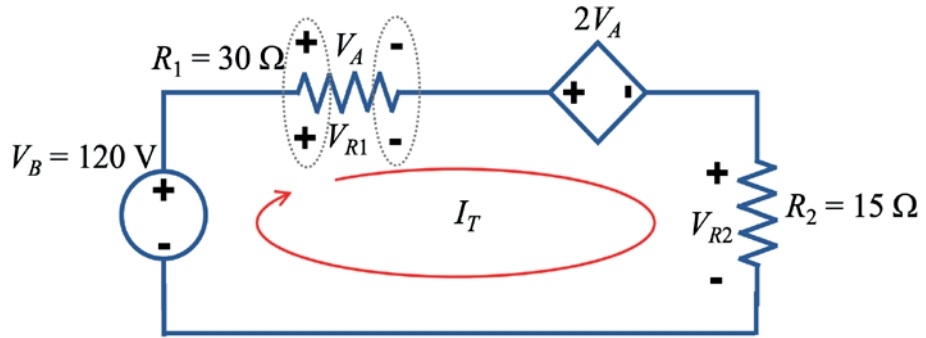


Figura 3.25. Asignación de corriente y signos de voltaje en el circuito con fuente dependiente.

Una vez que se asigna la dirección de la corriente y se colocan los signos en los elementos del circuito, se define el voltaje V_A en términos de los voltajes y corrientes que se han establecido. En este caso, se observa que el voltaje V_A tiene los mismos signos que el voltaje en la resistencia en R_1 , por lo tanto, el voltaje V_A se iguala con el voltaje V_{R1} y los dos voltajes quedan como se indica en la ecuación (3.14).

$$V_A = V_{R1}$$

Se sustituye el voltaje V_{R1} con la ley de Ohm quedando:

$$V_A = I_T R_1 \quad (3.14)$$

Este es el valor de V_A que se utilizará para hacer los cálculos en las ecuaciones que resulten del análisis del circuito.

Por lo tanto, a partir de la Figura 3.25 se construye la ecuación en sentido horario \odot aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff, quedando:

$$\sum V_{trayectoria} = 0 \text{ V}$$

$$-V_B + V_{R1} + 2V_A + V_{R2} = 0 \text{ V} \quad (3.15)$$

De acuerdo con la ley de Ohm, se puede sustituir cada voltaje de las resistencias por su respectivo producto IR considerando que la corriente es la misma por estar conectados en serie y el valor de V_A por la ecuación (3.14) resultando:

$$-V_B + I_T R_1 + 2(I_T R_1) + I_T R_2 = 0 \text{ V} \quad (3.16)$$

Se despeja el valor de I_T , quedando:

$$I_T(R_1 + 2R_1 + R_2) = V_B$$

$$I_T = \frac{V_B}{3R_1 + R_2} \quad (3.17)$$

Se sustituyen los valores de resistencias y voltaje en la ecuación (3.17) resultando.

$$I_T = \frac{V_B}{3R_1 + R_2} = \frac{120 \text{ V}}{3(30 \Omega) + 15 \Omega}$$

$$I_T = \frac{120 \text{ V}}{105 \Omega}$$

$$I_T = 1.142,8 \text{ A}$$

Obsérvese que la corriente es positiva, por lo tanto, con este valor se pueden calcular directamente los de las potencias en los elementos del circuito.

El voltaje V_A resulta:

$$V_A = I_T R_1 = (1.142,8 \text{ A})(30 \Omega)$$

$$V_A = 34.285 \text{ V}$$

Para calcular las potencias se procede de la siguiente manera:

En la fuente de voltaje V_B , la corriente positiva sale por la terminal positiva, por lo tanto, genera potencia.

$$P_B = V_B I_T = (120 \text{ V})(1.142,8 \text{ A}) = 137.14 \text{ W (Genera)}$$

En la fuente dependiente ($2V_A$), la corriente positiva entra por la terminal positiva, por lo tanto, absorbe potencia.

$$P_{2V_A} = (2V_A)I_T = [(2)(34.285 \text{ V})](1.142,8 \text{ A}) = 78.36 \text{ W (Absorbe)}$$

Para la potencia de las resistencias R_1 y R_2 , la corriente positiva entra por cada terminal positiva de las resistencias, por lo tanto, absorben potencia.

$$P_{R1} = I_1^2 R_1 = I_T^2 R_1 = (1.142,8 \text{ A})^2 (30 \Omega) = 39.18 \text{ W (Absorbe)}$$

$$P_{R2} = I_2^2 R_2 = I_T^2 R_2 = (1.142,8 \text{ A})^2 (15 \Omega) = 19.59 \text{ W (Absorbe)}$$

Obsérvese que la suma de las potencias que se absorben (la de las resistencias y la de la fuente dependiente) es de 137.13 W prácticamente igual que la potencia que genera la fuente de alimentación V_B que es de 137.14 W.

En este ejemplo, el valor del voltaje V_A de la fuente dependiente coincidió con los signos del voltaje V_{B1} .

Ejemplo 3-11. En el problema del ejemplo anterior invertir los signos de V_A tal como se aprecia en la Figura 3.26. Calcular el valor, la corriente total, los voltajes y la potencia que genera o absorbe cada elemento que integra el circuito.

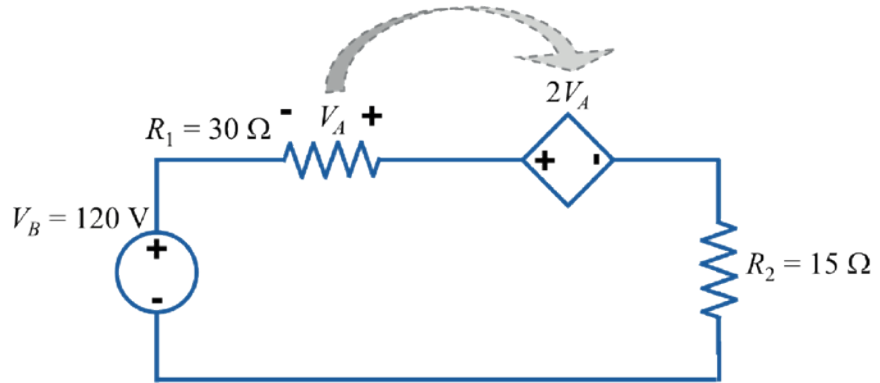


Figura 3.26. Circuito de un solo lazo con fuente dependiente.

Se procede de la misma manera, y se define la dirección de la corriente en el sentido horario tal como se observa en la Figura 3.27.

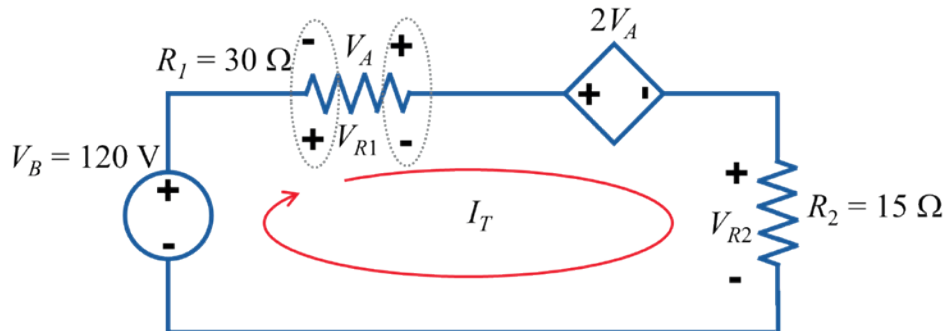


Figura 3.27. Inversión de signos para V_A en el circuito con fuente dependiente.

Al igual que con el ejemplo anterior, una vez que se propone la dirección de la corriente y se colocan los signos de las resistencias del circuito, se define el voltaje V_A en términos de los voltajes y la corriente que se ha establecido.

En este caso, se observa que el voltaje V_A tiene los signos invertidos, comparados con los signos del voltaje en la resistencia R_1 , por lo tanto, el voltaje V_A es negativo respecto del voltaje V_{R1} y, por esa razón, se coloca un signo menos en su definición. El voltaje V_A queda como se indica en la ecuación (3.18).

$$\begin{aligned} V_A &= -V_{R1} \\ V_A &= -I_T R_1 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Este es el valor de V_A que se utilizará para hacer los cálculos en las ecuaciones que resulten del análisis.

Esta es la parte en donde se debe apreciar que la definición de V_A tiene colocados los signos opuestos a los signos del voltaje en la resistencia R_1 y es importante distinguir entre ambos valores. Obsérvese que se pudo hacer que ambos signos coincidieran si en lugar de seleccionar la dirección de la corriente en sentido horario \mathcal{C} se hubiera seleccionado en sentido antihorario \mathcal{C}' , de esta manera, no hubiera sido necesario colocar el signo negativo en la ecuación (3.18).

Por lo tanto, a partir de la Figura 3.27 y aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff en sentido horario \mathcal{C} , se construye la ecuación (3.19).

$$\begin{aligned} \sum V_{trayectoria} &= 0 \text{ V} \\ -V_B + V_{R1} + 2V_A + V_{R2} &= 0 \text{ V} \end{aligned} \quad (3.19)$$

De acuerdo con la ley de Ohm, se puede sustituir cada voltaje de las resistencias por su respectivo producto IR considerando que la corriente total I_T es la misma para todos los elementos por estar conectados en serie. De igual manera, se sustituye el valor de V_A por la ecuación (3.18) resultando:

$$-V_B + I_T R_1 + 2(-I_T R_1) + I_T R_2 = 0 \text{ V} \quad (3.20)$$

Se despeja el valor de I_T , resultando:

$$\begin{aligned} I_T(R_1 - 2R_1 + R_2) &= V_B \\ I_T &= \frac{V_B}{R_2 - R_1} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Se calcula la corriente total I_T con los valores de la Figura 3.27 y con la ecuación (3.21) resultando.

$$\begin{aligned} I_T &= \frac{V_B}{R_2 - R_1} = \frac{120 \text{ V}}{15 \Omega - 30 \Omega} \\ I_T &= \frac{120 \text{ V}}{-15 \Omega} \\ I_T &= -8 \text{ A} \end{aligned}$$

Obsérvese que la corriente es negativa, por lo tanto, el sentido de la corriente positiva es opuesto al que fue trazado al inicio de este problema.

Se calcula el voltaje de V_A con la ecuación (3.18) y con el valor obtenido de I_T .

$$V_A = -I_T R_1 = -(-8 \text{ A})(30 \Omega)$$

$$V_A = 240 \text{ V}$$

Nótese que el valor de V_A es positivo y por lo tanto, al momento de calcular el valor de la fuente dependiente ($2V_A$), el resultado también es positivo.

$$2V_A = 480 \text{ V}$$

Por otro lado, los voltajes de las resistencias, de acuerdo con la ecuación (2.9) de la ley de Ohm, resultan:

$$V_{R1} = I_T R_1 = (-8 \text{ A})(30 \Omega) = -240 \text{ V}$$

$$V_{R2} = I_T R_2 = (-8 \text{ A})(15 \Omega) = -120 \text{ V}$$

Observar que los voltajes resultan negativos respecto de cómo se asignaron desde el inicio del problema. Esto tiene sentido ya que en realidad la corriente positiva circula en el sentido contrario a como se eligió inicialmente para el análisis.

Ahora se calculan las potencias en cada elemento:

Para la fuente de voltaje V_B la corriente negativa sale por la terminal positiva del voltaje o, dicho de otra manera, la corriente positiva entra por la terminal positiva de la fuente, por lo tanto la fuente absorbe potencia.

$$P_B = V_B I_T = (120 \text{ V})(+8 \text{ A}) = 960 \text{ W (Absorbe)}$$

Para la potencia de la fuente dependiente ($2V_A$) la corriente negativa entra por la terminal positiva del voltaje, entonces la corriente positiva sale de la terminal positiva de la fuente, por lo tanto, la fuente genera potencia.

$$P_{2V_A} = (2V_A) I_T = [(2)(240 \text{ V})](+8 \text{ A}) = 3,840 \text{ W (Genera)}$$

Las resistencias de cualquier circuito siempre consumen potencia y en este caso así lo comprueba el cálculo para R_1 y R_2 , con las tres ecuaciones conocidas para calcular la potencia en una resistencia.

Primero se calcula la potencia en las resistencias con la ecuación (1.1) de corriente y voltaje obteniendo:

$$P_{R1} = I_T V_{R1} = (-8 \text{ A})(-240 \text{ V}) = 1,920 \text{ W (Absorbe)}$$

$$P_{R2} = I_T V_{R2} = (-8 \text{ A})(-120 \text{ V}) = 960 \text{ W (Absorbe)}$$

Para la segunda forma, se calcula la potencia con la ecuación (2.8) con voltaje y resistencia obteniendo:

$$P_{R1} = \frac{V_{R1}^2}{R_1} = \frac{(-240 \text{ V})^2}{30 \Omega} = 1,920 \text{ W (Absorbe)}$$

$$P_{R2} = \frac{V_{R2}^2}{R_2} = \frac{(-120 \text{ V})^2}{15 \Omega} = 960 \text{ W (Absorbe)}$$

La tercer y última forma de calcular la potencia se hace con la ecuación (2.10) con corriente y resistencia obteniendo:

$$P_{R1} = I_T^2 R_1 = (-8 \text{ A})^2 (30 \Omega) = 1,920 \text{ W (Absorbe)}$$

$$P_{R2} = I_T^2 R_2 = (-8 \text{ A})^2 (15 \Omega) = 960 \text{ W (Absorbe)}$$

Con las tres formas para calcular la potencia eléctrica en las resistencias resulta exactamente lo mismo, no importa que la corriente y/o el voltaje sean valores negativos, la potencia en las resistencias siempre es positiva, es decir, siempre se absorbe potencia.

Nótese que la suma de las potencias que se absorben es de 3,840 W igual que la potencia que genera la fuente dependiente ($2V_A$) que también es de 3,840 W. Por lo tanto, el balance de la potencia que se genera y la potencia que se absorbe se mantiene.

Ejemplo 3-12. En el problema de la Figura 3.28, calcular la potencia que genera o absorbe cada elemento que integra el circuito.

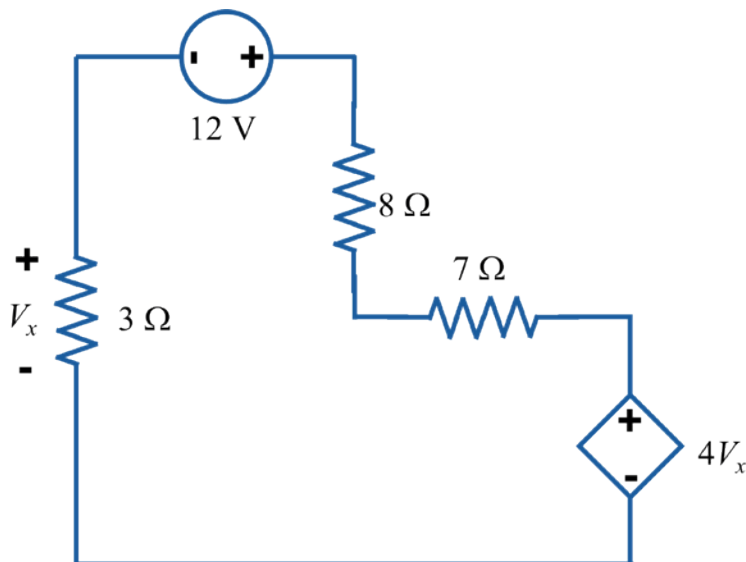


Figura 3.28. Circuito de un solo lazo con fuente dependiente.

Definimos la dirección de la corriente en sentido horario y los voltajes en cada resistencia de acuerdo con la dirección de la corriente.

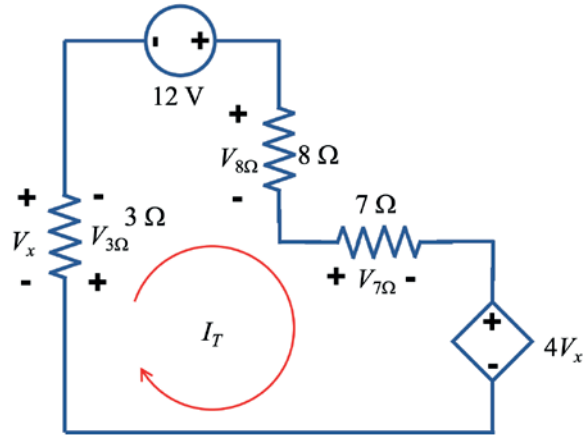


Figura 3.29. Signos en circuito de un solo lazo en sentido horario.

Al definir cuánto vale V_x , se observa que es el voltaje negativo de la resistencia de $3\ \Omega$, resultando:

$$V_x = -V_{3\Omega}$$

$$V_x = -I_T R_{3\Omega} \quad (3.22)$$

Este es el valor de V_x que se utilizará para hacer los cálculos en las ecuaciones que resulten del análisis.

A partir de la Figura 3.29 y aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff en sentido horario \mathcal{C} , se construye la ecuación (3.23).

$$\sum V_{trayectoria} = 0\text{ V}$$

$$+V_{3\Omega} - 12\text{ V} + V_{8\Omega} + V_{7\Omega} + 4V_x = 0\text{ V} \quad (3.23)$$

El signo del voltaje para la resistencia de $3\ \Omega$ corresponde al signo colocado con la convención de signos pasiva y no al signo marcado por V_x . Después, se sustituye el voltaje de cada resistencia por su respectivo producto IR , y el valor de V_x por la ecuación (3.22), quedando.

$$I_T R_{3\Omega} - 12\text{ V} + I_T R_{8\Omega} + I_T R_{7\Omega} + 4(-I_T R_{3\Omega}) = 0\text{ V} \quad (3.24)$$

a) Se despeja el valor de I_T .

$$I_T = \frac{12 \text{ V}}{R_{3\Omega} + R_{8\Omega} + R_{7\Omega} - 4R_{3\Omega}}$$
$$I_T(R_{3\Omega} + R_{8\Omega} + R_{7\Omega} - 4R_{3\Omega}) = 12 \text{ V}$$
$$I_T = \frac{12 \text{ V}}{R_{8\Omega} + R_{7\Omega} - 3R_{3\Omega}} \quad (3.25)$$

Se calcula la corriente total I_T con los valores de la Figura 3.28 y con la ecuación (3.25) resultando.

$$I_T = \frac{12 \text{ V}}{8 \Omega + 7 \Omega - 3(3 \Omega)} = \frac{12 \text{ V}}{15 \Omega - 9 \Omega} = \frac{12 \text{ V}}{6 \Omega}$$

$$I_T = 2 \text{ A}$$

Dado que se ha encontrado la corriente positiva, significa que se ha seleccionado correctamente la dirección para poder analizar la potencia que consumen o producen los elementos del circuito.

Se calcula el voltaje de V_x con la ecuación (3.22) y con el valor obtenido de I_T .

$$V_x = -I_T R_{3\Omega} = -(2 \text{ A})(3 \Omega)$$

$$V_x = -6 \text{ V}$$

Obsérvese que el valor de V_x es negativo, por lo tanto, al momento de calcular el valor de la fuente dependiente ($4V_x$) el resultado también es negativo.

$$4V_x = 4(-6 \text{ V}) = -24 \text{ V}$$

Los voltajes de las resistencias se calculan con la ecuación (2.9) de la ley de Ohm, los cuales resultan:

$$V_{3\Omega} = I_T R_{3\Omega} = (2 \text{ A})(3 \Omega) = 6 \text{ V}$$

$$V_{8\Omega} = I_T R_{8\Omega} = (2 \text{ A})(8 \Omega) = 16 \text{ V}$$

$$V_{7\Omega} = I_T R_{7\Omega} = (2 \text{ A})(7 \Omega) = 14 \text{ V}$$

Ahora se calcula la potencia en cada elemento:

Para la fuente de 12 V y con la ecuación (1.1) de la potencia se tiene:

$$P_{12\text{V}} = V_{12\text{V}} I_T = (12 \text{ V})(2 \text{ A}) = 24 \text{ W (Genera)}$$

Ya que el voltaje en la fuente dependiente es negativo, significa que la corriente positiva en la Figura 3.29 no está entrando realmente por la terminal positiva de la fuente de alimentación. La corriente positiva en realidad está saliendo por la terminal po-

sitiva de la fuente, lo cual significa que se encuentra “generando” potencia.

Si el valor del voltaje en cualquier fuente es negativo, significa que se deberán invertir los signos para indicar el voltaje positivo.

$$P_{4V_x} = V_{4V_x} I_T = (24 \text{ V})(2 \text{ A}) = 48 \text{ W (Genera)}$$

Se calcula la potencia en las resistencias con la ecuación (2.10) de corriente y resistencia obteniendo:

$$P_{3\Omega} = I_T^2 R_{3\Omega} = (2 \text{ A})^2 (3 \Omega) = 12 \text{ W (Absorbe)}$$

$$P_{8\Omega} = I_T^2 R_{8\Omega} = (2 \text{ A})^2 (8 \Omega) = 32 \text{ W (Absorbe)}$$

$$P_{7\Omega} = I_T^2 R_{7\Omega} = (2 \text{ A})^2 (7 \Omega) = 28 \text{ W (Absorbe)}$$

Nótese que la suma de las potencias que se absorben es de 72 W, igual que la suma de la potencia que genera la fuente de 12 V y la fuente dependiente ($4V_x$), que también es de 72 W. Por lo tanto, el balance de la potencia que se genera y la potencia que se absorbe se mantiene constante.

Ejemplo 3-13. Para el circuito de la Figura 3.30, calcular la corriente, el voltaje y la potencia en la resistencia de 5 k Ω .

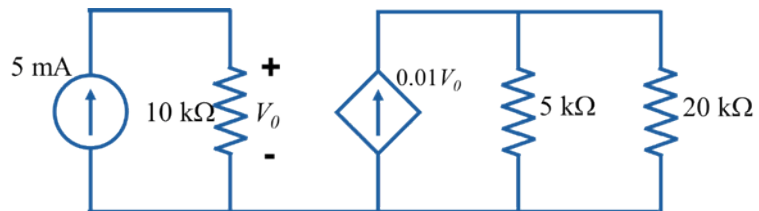


Figura 3.30. Circuito con fuente dependiente.

Respuesta.

No se trata de un circuito de un solo lazo, sin embargo, la forma de resolverlo es igual de simple como si lo fuera. Se observa que la resistencia de 5 k Ω se encuentra conectada en paralelo con la resistencia de 20 k Ω y con la fuente de corriente dependiente de voltaje que vale ($0.01V_0$). Para calcular lo que se pide, es necesario primero calcular el valor del voltaje V_0 , que depende de la resistencia de 10 k Ω y de la fuente de corriente de 5 mA. Con el voltaje V_0 se puede calcular la corriente de la fuente dependiente y, una vez que se tenga este valor, con un divisor de corriente –ecuación (3.6)– se calcula la corriente que circula a través de la resistencia de 5 k Ω . Por último, con este valor se puede calcular tanto el voltaje como la potencia de la resistencia.

Entonces, el valor del voltaje V_0 es:

$$V_0 = (5 \text{ mA})(10 \text{ k}\Omega) = 50 \text{ V}$$

El valor de la fuente de corriente dependiente de voltaje es:

$$0.01V_0 = \left(0.01 \frac{\text{A}}{\text{V}}\right) (50 \text{ V}) = 0.5 \text{ A}$$

A pesar de que no se indican las unidades en el valor de 0.01, se entiende que corresponden para que al final las unidades en la fuente dependiente sean amperes.

Con el valor de la corriente de la fuente dependiente y con el divisor de corriente se calcula ahora la corriente a través de la resistencia de $5 \text{ k}\Omega$ quedando:

$$I_{5\text{k}\Omega} = (0.5 \text{ A}) \left(\frac{20 \text{ k}\Omega}{5 \text{ k}\Omega + 20 \text{ k}\Omega}\right) = 0.4 \text{ A}$$

Con el valor de la corriente en la resistencia de $5 \text{ k}\Omega$, se calcula el voltaje y se tiene:

$$V_{5\text{k}\Omega} = I_{5\text{k}\Omega} R_{5\text{k}\Omega} = (0.4 \text{ A})(5 \text{ k}\Omega) = 2 \text{ kV}$$

Para finalizar, se calcula la potencia en la resistencia quedando:

$$P_{5\text{k}\Omega} = I_{5\text{k}\Omega}^2 R_{5\text{k}\Omega} = (0.4 \text{ A})^2 (5 \text{ k}\Omega) = 800 \text{ W}$$

Esta es sólo una forma de resolver el circuito y calcular lo que se pide, alguien más pudo haber decidido calcular la resistencia equivalente que resulta de las resistencias de $5 \text{ k}\Omega$ y $20 \text{ k}\Omega$ para multiplicarla por la corriente de la fuente dependiente y obtener el voltaje en paralelo. Una vez que se tiene el voltaje, éste se utiliza para calcular la corriente y la potencia de la resistencia de $5 \text{ k}\Omega$.

Ejemplo 3-14. Para la Figura 3.31, calcular la corriente total I_T que circula a través del circuito.

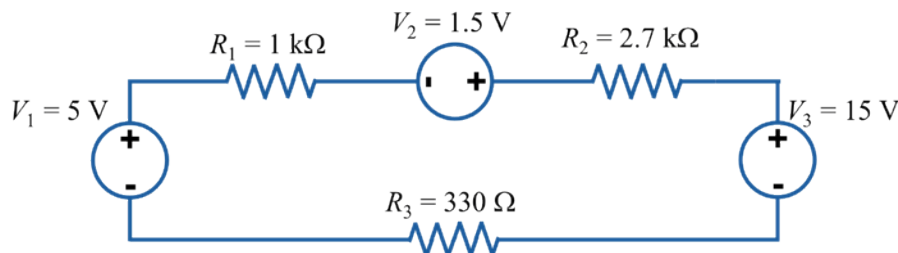


Figura 3.31. Circuito de un solo lazo con fuentes de voltaje independientes.

Respuesta.

Se observa que se trata de un circuito de un solo lazo y en el que se presentan tres resistencias y tres fuentes de voltaje. Como se encuentran presentes las tres fuentes de alimentación, no se sabe con certeza la dirección de la corriente positiva, por lo que una manera de suponer esta dirección es a partir de la fuente de mayor valor, en este caso la fuente V_3 de 15 V . Esta fuente establece que la dirección de la corriente es en contra de las manecillas del reloj \odot . En la Figura 3.32 se muestra la dirección establecida para la corriente

total con este criterio y los signos de los voltajes en cada una de las resistencias.

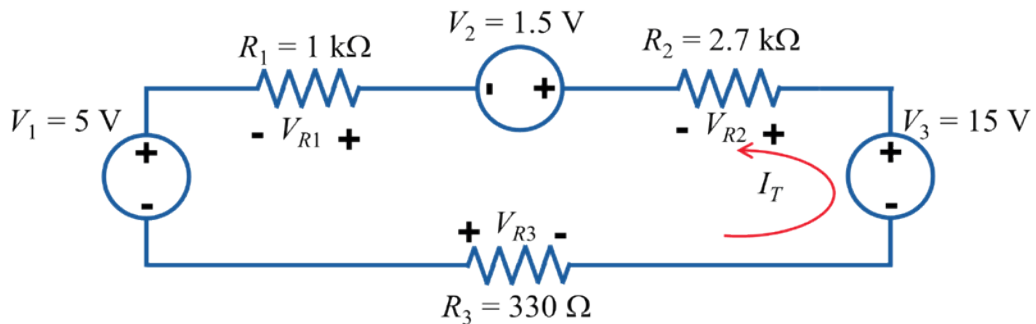


Figura 3.32. Dirección de la corriente para la fuente de mayor valor voltaje y establecimiento de los signos de los voltajes en las resistencias.

Aplicando la ley de voltajes de Kirchoff (LVK) en la dirección de la corriente establecida, y comenzando con la fuente V_3 , se construye la ecuación que resuelve el circuito.

$$\sum V_{trayectoria} = 0 \text{ V}$$

$$-V_3 + V_{R2} + V_2 + V_{R1} + V_1 + V_{R3} = 0 \text{ V} \quad (3.26)$$

Se sustituyen los voltajes de las resistencias por los respectivos productos IR de la ley de Ohm, resultando.

$$-V_3 + I_T R_2 + V_2 + I_T R_1 + V_1 + I_T R_3 = 0 \text{ V} \quad (3.27)$$

Se saca de factor común a la corriente total y se pasan al segundo miembro los valores de los voltajes.

$$I_T (R_2 + R_1 + R_3) = V_3 - V_2 - V_1 \quad (3.28)$$

Se despeja el valor de la corriente total.

$$I_T = \frac{V_3 - V_1 - V_2}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (3.29)$$

Se sustituyen los valores del circuito en la ecuación (3.29) para calcular la corriente total obteniendo:

$$I_T = \frac{V_3 - V_1 - V_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{15 \text{ V} - 5 \text{ V} - 1.5 \text{ V}}{1 \text{ k}\Omega + 2.7 \text{ k}\Omega + 330 \Omega}$$

$$I_T = \frac{8.5 \text{ V}}{4,030 \Omega} = 2.109 \times 10^{-3} \text{ A}$$

$$I_T = 2.109 \text{ mA}$$

Se observa que efectivamente el valor de la corriente es positiva, lo cual indica que la fuente de mayor voltaje es la que impone la dirección de esta.

Ejemplo 3-15. Para el problema anterior, calcular la corriente total I_T que circula a través del circuito obteniendo una única resistencia equivalente y una única fuente de voltaje.

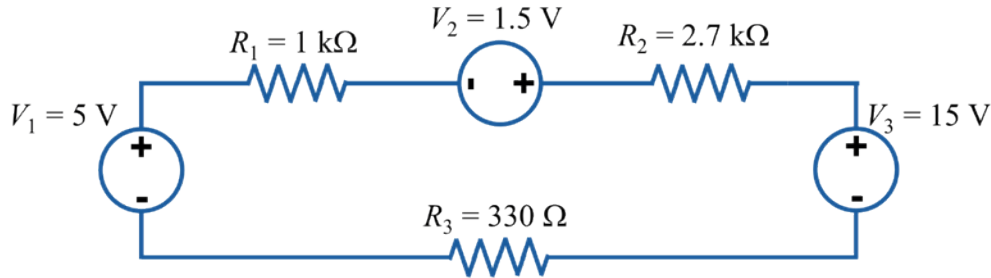


Figura 3.33. Circuito de un solo lazo con fuentes de voltaje independientes.

Respuesta.

Ya que todos los elementos están conectados en serie, y en este circuito no aparecen fuentes dependientes, se puede resolver uniendo todas las fuentes de voltaje en una sola fuente total V_T y en una sola resistencia total R_T tal como se aprecia en la Figura 3.34.

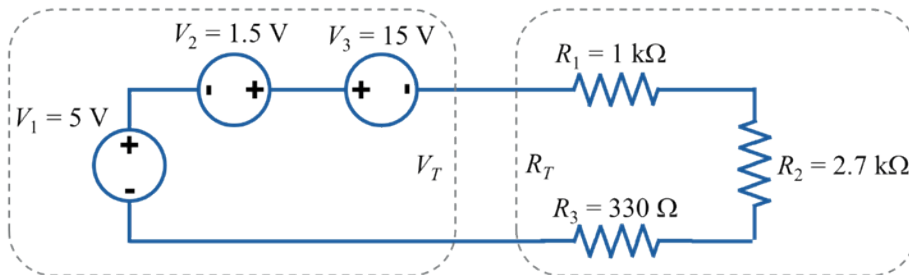


Figura 3.34. Circuito equivalente de resistencias en serie y fuentes de voltaje en serie.

Para calcular la resistencia total se tiene.

$$R_T = R_1 + R_2 + R_3$$

$$R_T = 1 \text{ k}\Omega + 2.7 \text{ k}\Omega + 0.33 \text{ k}\Omega = 4,030 \text{ }\Omega$$

Para calcular una sola fuente de voltaje, se tiene.

$$V_T = V_1 + V_2 - V_3$$

$$V_T = 5 \text{ V} + 1.5 \text{ V} - 15 \text{ V}$$

$$V_T = -8.5 \text{ V}$$

El circuito equivalente se representa en la Figura 3.35.

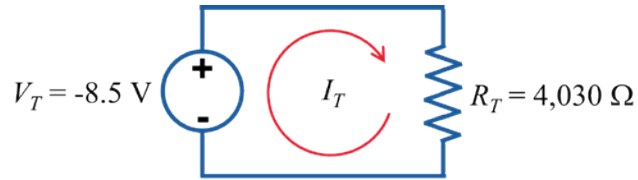


Figura 3.35. Circuito con una única fuente total y una única resistencia total.

Para calcular la corriente total, se aplica la ley de Ohm quedando.

$$I_T = \frac{V_T}{R_T} = \frac{-8.5 \text{ V}}{4,030 \Omega} = -2.109 \times 10^{-3} \text{ A}$$

$$I_T = -2.109 \text{ mA}$$

Obsérvese que el resultado de la corriente es negativo porque en realidad la corriente positiva se encuentra circulando en sentido contrario al que se plasmó en la Figura 3.35.

Análisis de circuitos de un par de nodos

Otra clase común de circuitos, que se presentan con frecuencia, son aquellos que están integrados simplemente por elementos conectados en paralelo y por lo tanto únicamente por dos nodos (Hayt *et al.*, 2007). Cuando en este tipo de circuitos se involucran fuentes dependientes, para resolverlos, también es muy importante el uso de las leyes de Kirchhoff.

A continuación, se presentan algunos ejemplos de cómo resolver este tipo de problemas.

Ejemplo 3-16. Calcular el voltaje V_x y la potencia que absorbe o genera cada elemento del circuito.

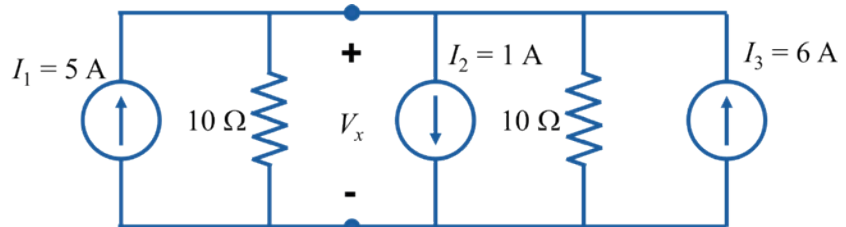


Figura 3.36. Circuito de dos nodos con fuentes de corriente y resistencias.

Respuesta.

Para resolver el circuito se pueden agrupar las fuentes de corriente independientes en una sola fuente de corriente total I_T , del mismo modo las resistencias también se pueden agrupar en una sola resistencia total R_T tal como se indica en la Figura 3.37. De esta manera se puede calcular más fácilmente el voltaje V_x .

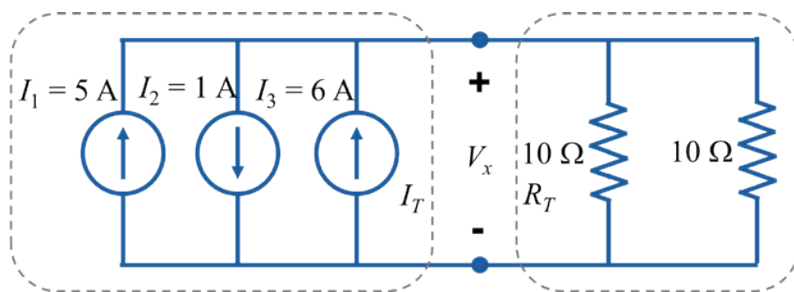


Figura 3.37. Agrupación de fuentes de corriente y de resistencias.

Para calcular la resistencia total se observa que las dos resistencias son iguales, por lo tanto, $n = 2$ y se utiliza la ecuación (2.5) resultando.

$$R_T = \frac{R_n}{n}$$

$$R_T = \frac{10 \Omega}{2} = 5 \Omega$$

$$R_T = 5 \Omega$$

Para calcular la fuente de corriente total, se tiene:

$$I_T = I_1 - I_2 + I_3$$

$$I_T = 5 \text{ A} - 1 \text{ A} + 6 \text{ A}$$

$$I_T = 10 \text{ A}$$

El circuito equivalente se representa en la Figura 3.38.

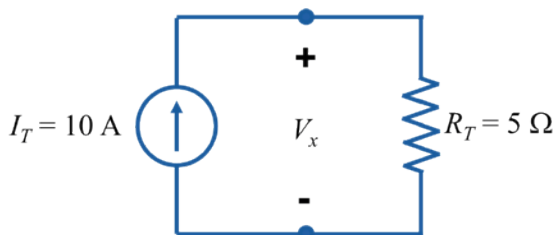


Figura 3.38. Circuito equivalente con una sola resistencia y con una sola fuente de corriente.

Del circuito anterior, se puede calcular con facilidad el voltaje al aplicar la ecuación (2.9) de la ley de Ohm para el voltaje resultando:

$$V_x = I_T R_T = (10 \text{ A})(5 \Omega)$$

$$V_x = 50 \text{ V}$$

Como el voltaje es el mismo para todos los elementos por estar conectados en paralelo, entonces calculamos las potencias de la siguiente manera.

Para la fuente de corriente I_1 , se tiene que la corriente positiva sale por la terminal positiva del voltaje, por lo tanto, la fuente genera potencia.

$$P_{I1} = V_x I_1 = (50 \text{ V})(5 \text{ A}) = 250 \text{ W} \quad (\text{Genera})$$

Para la fuente de corriente I_2 , se tiene que la corriente positiva entra por la terminal positiva del voltaje, por lo tanto, la fuente absorbe potencia.

$$P_{I2} = V_x I_2 = (50 \text{ V})(1 \text{ A}) = 50 \text{ W} \quad (\text{Absorbe})$$

Para la fuente de corriente I_3 , se tiene que la corriente positiva sale por la terminal positiva del voltaje, por lo tanto, la fuente genera potencia.

$$P_{I3} = V_x I_3 = (50 \text{ V})(6 \text{ A}) = 300 \text{ W} \quad (\text{Genera})$$

Para cada resistencia la potencia se absorbe quedando.

$$P_R = \frac{(V_x)^2}{R} = \frac{(50 \text{ V})^2}{10 \Omega}$$

$$P_R = 250 \text{ W} \quad (\text{absorbe})$$

Cada resistencia consume 250 W, por lo tanto, consumen un total de 500 W.

Al hacer un balance de la potencia que se genera con la potencia que se absorbe resulta:

$$P_{I1} + P_{I3} = P_{I2} + 2P_R$$

$$250 \text{ W} + 300 \text{ W} = 50 \text{ W} + 2(250 \text{ W})$$

$$\therefore 550 \text{ W} = 550 \text{ W}$$

Ejemplo 3-17. Calcular la potencia que absorbe cada resistencia del circuito.

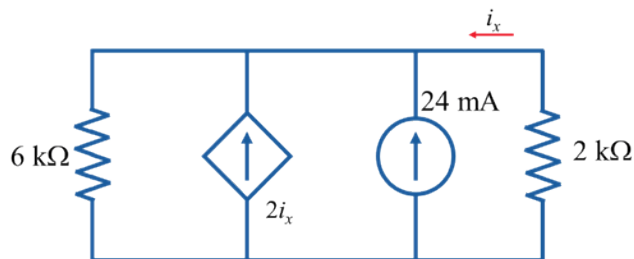


Figura 3.39. Circuito con dos nodos y fuente de corriente dependiente de corriente.

Respuesta.

Obsérvese de la Figura 3.39 que se indica la dirección de cómo se mide la corriente i_x para calcular el valor de la fuente de corriente, que en este caso será $(2i_x)$. No significa forzosamente que la corriente de esa rama del circuito está circulando en tal dirección, sólo indica que la corriente que se necesita para calcular el valor de la fuente dependiente debe llevar la dirección indicada por i_x .

Para poder calcular la potencia de cada resistencia, es necesario conocer el voltaje que se les está aplicando o la corriente que circula a través de cada una de ellas. Dado que no se cuenta con esta información, será necesario calcular cualquiera de estos valores para poder proceder con el cálculo.

En este caso, se procederá a calcular el voltaje del circuito, ya que, al tratarse de un circuito con dos nodos, el voltaje será el mismo para todos los elementos que lo integran.

Primero, se indican los dos nodos del circuito y se nombra al voltaje con cualquier nombre para poder identificarlo, en este caso se le llamará V_y . Se supondrá que el voltaje tiene la terminal positiva en la parte superior del circuito y la terminal negativa en la parte inferior debido a que la fuente independiente de corriente indica que la corriente va en dirección positiva hacia arriba, tal como se muestra en la Figura 3.40.

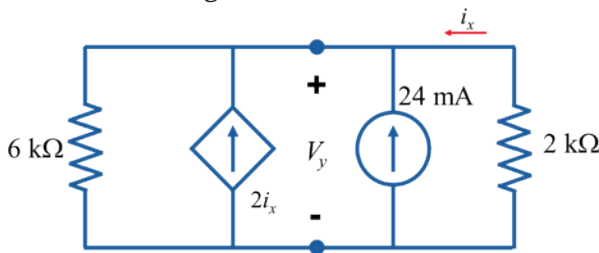


Figura 3.40. Signos y nombre del voltaje para el circuito de dos nodos.

Obsérvese que, al haber definido el voltaje V_y , se puede suponer la dirección de las corrientes a través de las resistencias como se indica en la Figura 3.41.

Nótese que se han colocado nombres a las corrientes, relativos al valor de cada resistencia, I_6 para la resistencia de $6\text{ k}\Omega$ e I_2 para la resistencia de $2\text{ k}\Omega$.

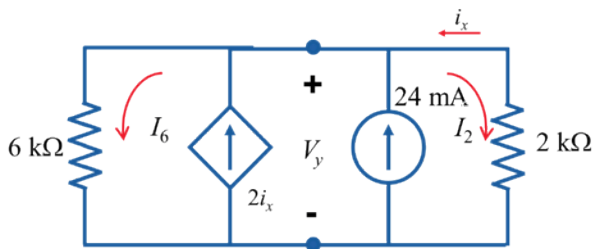


Figura 3.41. dirección de la corriente en cada resistencia de acuerdo con la polaridad del voltaje asignado.

Con la ley de Ohm, se puede calcular simbólicamente el valor de la corriente I_6 y de la corriente I_2 , quedando.

$$I_2 = \frac{V_y}{2 \text{ k}\Omega} \quad (3.30)$$

$$I_6 = \frac{V_y}{6 \text{ k}\Omega} \quad (3.31)$$

De la Figura 3.41 se observa que la corriente i_x se puede definir en términos de la corriente I_2 , pero con signo negativo, ya que tienen direcciones opuestas, lo que queda como:

$$i_x = -I_2 \quad (3.32)$$

Al sustituir la ecuación (3.30) en la ecuación (3.32) resulta:

$$i_x = -\frac{V_y}{2 \text{ k}\Omega} \quad (3.33)$$

Y, por lo tanto, el valor de la fuente dependiente que es ($2i_x$) resulta:

$$\begin{aligned} 2i_x &= 2\left(-\frac{V_y}{2 \text{ k}\Omega}\right) \\ 2i_x &= -\frac{V_y}{1 \text{ k}\Omega} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Ya que se tienen definidas todas las corrientes que se involucran en los nodos del circuito, se puede plantear una ley de corrientes de Kirchhoff en cualquiera de los nodos (superior o inferior).

Aplicando la ley de corrientes de Kirchhoff en el nodo superior, en la Figura 3.41, la ecuación resulta:

$$\sum I_{entran} = \sum I_{salen}$$

$$2i_x + 24 \text{ mA} = I_6 + I_2$$

Se sustituye cada corriente por sus respectivos valores simbólicos, quedando:

$$-\frac{V_y}{1 \text{ k}\Omega} + 24 \text{ mA} = \frac{V_y}{6 \text{ k}\Omega} + \frac{V_y}{2 \text{ k}\Omega}$$

Observar que la única incógnita que aparece es el voltaje V_y , por lo que se despeja para quedar:

$$V_y \left(\frac{1}{6 \text{ k}\Omega} + \frac{1}{2 \text{ k}\Omega} + \frac{1}{1 \text{ k}\Omega} \right) = 24 \text{ mA}$$

$$V_y = \frac{24 \text{ mA}}{\left(\frac{1}{6 \text{ k}\Omega} + \frac{1}{2 \text{ k}\Omega} + \frac{1}{1 \text{ k}\Omega} \right)}$$

$$V_y = \frac{24 \times 10^{-3} \text{ A}}{\left(\frac{1}{6 \times 10^3 \Omega} + \frac{1}{2 \times 10^3 \Omega} + \frac{1}{1 \times 10^3 \Omega} \right)}$$

$$V_y = 14.4 \text{ V}$$

Con el voltaje, es posible calcular la potencia que absorbe cada una de las resistencias con la ecuación (2.8), quedando.

$$P_{2\text{k}\Omega} = \frac{(V_y)^2}{2\text{k}\Omega} = \frac{(14.4 \text{ V})^2}{2 \times 10^3 \Omega} = 0.103,68 \text{ W}$$

$$P_{2\text{k}\Omega} = 103.68 \text{ mW}$$

$$P_{6\text{k}\Omega} = \frac{(V_y)^2}{6\text{k}\Omega} = \frac{(14.4 \text{ V})^2}{6 \times 10^3 \Omega} = 0.034,56 \text{ W}$$

$$P_{6\text{k}\Omega} = 35.56 \text{ mW}$$

Ejemplo 3-18. Calcular el voltaje V_x y las corrientes I_A , I_B e I_C marcadas en el circuito.

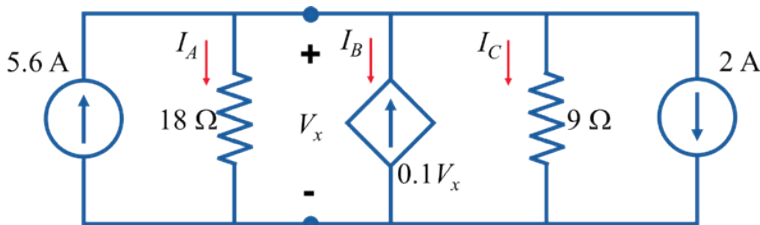


Figura 3.42. Circuito con dos nodos y fuente de corriente dependiente de voltaje.

Respuesta.

Observar que:

- La corriente de la fuente dependiente de voltaje circula de abajo hacia arriba \uparrow y tiene un valor de $(0.1 V_x)$ amperes, aunque no se encuentren indicados en la figura.
- Ya se tiene definida la polaridad del voltaje (V_x) en los dos nodos del circuito.

- La corriente en cada resistencia coincide con la que impondría la convención de signos pasiva con los signos del voltaje, por lo que se dejarán sin alterar las corrientes indicadas por I_A e I_C para el análisis del circuito, y su valor queda definido como:

$$I_A = \frac{V_x}{18 \Omega} \quad (3.35)$$

$$I_C = \frac{V_x}{9 \Omega} \quad (3.36)$$

- La corriente en I_B está indicada de arriba hacia abajo \downarrow , opuesta a la que produce la fuente dependiente, por lo que su valor queda definido como:

$$I_B = -(0.1V_x)$$

$$I_B = -0.1V_x \quad (3.37)$$

Ya que se tienen definidas todas las corrientes en el circuito, a partir de la Figura 3.42 se utiliza la ley de corrientes de Kirchhoff en el nodo superior para determinar el voltaje V_x , quedando:

$$\sum I_{entran} = \sum I_{salen}$$

$$5.6 \text{ A} + 0.1V_x \text{ A} = I_A + I_C + 2 \text{ A} \quad (3.38)$$

Obsérvese que I_B es sólo un dato que se pide del circuito y no la dirección de la corriente en la rama. Por esa razón, para construir la ecuación, se toma la dirección de la corriente en la fuente dependiente.

Se sustituyen los valores de I_A e I_C .

$$5.6 \text{ A} + 0.1V_x \text{ A} = \frac{V_x}{18 \Omega} + \frac{V_x}{9 \Omega} + 2 \text{ A} \quad (3.39)$$

Se pasan al primer miembro los términos que contienen V_x , y los términos constantes se pasan al segundo miembro para después despejar V_x , quedando:

$$0.1V_x \text{ A} - \frac{V_x}{18 \Omega} - \frac{V_x}{9 \Omega} = 2 \text{ A} - 5.6 \text{ A}$$

$$V_x \left(\frac{0.1}{\Omega} - \frac{1}{18 \Omega} - \frac{1}{9 \Omega} \right) = 2 \text{ A} - 5.6 \text{ A}$$

$$V_x = \frac{2 \text{ A} - 5.6 \text{ A}}{\left(\frac{0.1}{\Omega} - \frac{1}{18 \Omega} - \frac{1}{9 \Omega} \right)} = \frac{-3.6 \text{ A}}{-0.066\bar{6} \Omega^{-1}}$$

$$V_x = 53.99 \text{ V}$$

$$V_x \approx 54 \text{ V}$$

Por lo tanto, para calcular las corrientes I_A , I_B e I_C se utilizan las ecuaciones (3.35), (3.37) y (3.36), respectivamente, para quedar:

$$I_A = \frac{V_x}{18 \Omega} = \frac{54 \text{ V}}{18 \Omega} = 3 \text{ A}$$

$$I_B = -0.1V_x = -0.1 \frac{\text{A}}{\text{V}} (54 \text{ V}) = -5.4 \text{ A}$$

$$I_C = \frac{V_x}{9 \Omega} = \frac{54 \text{ V}}{9 \Omega} = 6 \text{ A}$$

Ejemplo 3-19. Calcular el voltaje v_x y las corrientes i_x e i_y marcadas en el circuito.

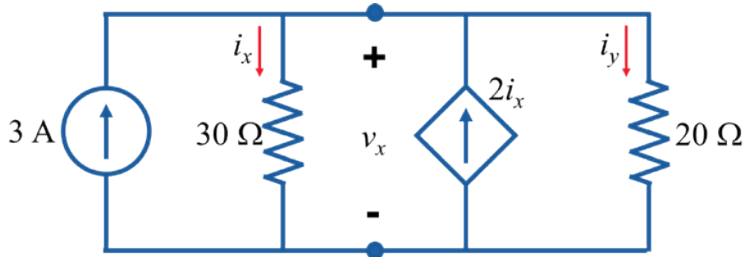


Figura 3.43. Problema de dos nodos con fuente dependiente.

Respuesta.

Primero se define cuánto vale i_x e i_y en términos del voltaje v_x y de la resistencia en la que circula.

$$i_x = \frac{v_x}{30 \Omega} \quad (3.40)$$

$$i_y = \frac{v_x}{20 \Omega} \quad (3.41)$$

La ley de corrientes de Kirchhoff se puede aplicar a cualquiera de los dos nodos, el positivo o el negativo y el resultado debe ser el mismo. Para este problema, se aplicará la LCK en el nodo negativo o inferior para calcular v_x .

$$\begin{aligned}\sum I_{entran} &= \sum I_{salen} \\ i_x + i_y &= 3 \text{ A} + 2i_x\end{aligned}\quad (3.42)$$

Se sustituyen las ecuaciones (3.40) y (3.41) en la ecuación (3.42) y se tiene:

$$\frac{v_x}{30 \Omega} + \frac{v_x}{20 \Omega} = 3 \text{ A} + 2 \left(\frac{v_x}{30 \Omega} \right) \quad (3.43)$$

Se despeja v_x y resulta:

$$\begin{aligned}\frac{v_x}{30 \Omega} + \frac{v_x}{20 \Omega} - \frac{v_x}{15 \Omega} &= 3 \text{ A} \\ v_x \left(\frac{1}{30 \Omega} + \frac{1}{20 \Omega} - \frac{1}{15 \Omega} \right) &= 3 \text{ A} \\ v_x &= \frac{3 \text{ A}}{\left(\frac{1}{30 \Omega} + \frac{1}{20 \Omega} - \frac{1}{15 \Omega} \right)} \\ v_x &= 180 \text{ V}\end{aligned}$$

Por lo tanto, al sustituir el valor del voltaje v_x en las ecuaciones (3.40) y (3.41) resulta:

$$\begin{aligned}i_x &= \frac{v_x}{30 \Omega} = \frac{180 \text{ V}}{30 \Omega} = 6 \text{ A} \\ i_y &= \frac{v_x}{20 \Omega} = \frac{180 \text{ V}}{20 \Omega} = 9 \text{ A}\end{aligned}$$

REFERENCIAS DEL CAPÍTULO

- Angel, A., & Cristobal, A. (2015). *Fuentes dependientes*. [video coursera] <https://es.coursera.org/lecture/electrones-en-accion/fuentes-dependientes-R3VBP>
- Area-Tecnología. (2021). Divisor de corriente. Areatecnología. Recuperado de: <https://www.areatecnologia.com/electronica/divisor-de-corriente.html>
- Electrónica-Básica, T. (2019). Fuente de corriente y fuentes de corriente dependiente. Tutoriales de electrónica básica. Recupe-

- rado el 9 febrero de 2021 de: <http://tutorialesdeelectronica-basica.blogspot.com/2019/07/fuente-de-corriente-y-fuentes-de.html>
- Hayt, W. H. Jr., Kemmerly, J. E. & Durbin, S. M. (2007). *Análisis de circuitos en ingeniería* (7.ª edición). México: McGraw Hill.
- McAllister, W. (2008a). La terminología de los circuitos. *Khan Academy*. <https://es.khanacademy.org/science/electrical-engineering/ee-circuit-analysis-topic/circuit-elements/a/ee-circuit-terminology>
- McAllister, W. (2008b). Las leyes de Kirchhoff. *Khan Academy*. Recuperado el 10 de enero de 2021 de: <https://es.khanacademy.org/science/physics/circuits-topic/circuits-resistance/a/ee-kirchhoffs-laws>
- Ruiza, M., Fernández, T. & Tamaro, E. (2004). Biografía de Gustav Kirchhoff. *Biografías y Vidas*. La enciclopedia biográfica en línea. <https://www.biografiasyvidas.com/biografia/k/kirchhoff.htm>
- Sixto, C. (2015). *¿En un circuito eléctrico, que sucede si conectamos dos fuentes de voltaje en paralelo?* Quora. Recuperado el 20 de enero de 2021 de <https://es.quora.com/En-un-circuito-el%C3%A9ctrico-que-sucede-si-conectamos-dos-fuentes-de-voltaje-en-paralelo>
- Torres Ortega, H. H. (2018). *Divisor de voltaje o tensión, fórmulas y ejemplos*. Hetpro-store. Recuperado el 9 de febrero de 2021 de <https://hetpro-store.com/TUTORIALES/divisor-de-voltaje/>

**ANÁLISIS DE CIRCUITOS
ELÉCTRICOS CON MALLAS**

4

INTRODUCCIÓN

En este capítulo se da comienzo con las técnicas para el análisis de circuitos eléctricos, estos podrán estar integrados por más de una fuente de alimentación y estar combinados con una o varias fuentes dependientes y resistencias con cualquier tipo de conexión. Es muy importante recordar y tener presentes los conceptos que se estudiaron en capítulos anteriores. Conceptos como nodo, malla, trayectoria cerrada, conexión serie-paralelo y estrella-delta, ya que son importantes para comprender estas técnicas.

Las técnicas que se estudiarán son:

- Análisis de mallas.
- Análisis de nodos.
- Linealidad y superposición.
- Transformación de fuentes.
- Teorema de Thévenin.
- Teorema de Norton.
- Máxima transferencia de potencia.

En la Tabla 4.1 se muestra un resumen de lo que se obtiene con cada una de las técnicas de análisis. Dependiendo de las características del circuito, y de lo que se pretende calcular en el problema, se toma la decisión de cuál técnica utilizar para darle resolución de la forma más rápida y eficiente posible.

Resolver un circuito eléctrico es como ir de compras al supermercado, seguro encontrarás muchos productos que te podrán gustar, pero que no es necesario que los compres, aunque nada te impide que gastes tiempo revisándolos, a pesar de saber que no los vas a comprar. Con un circuito eléctrico pasa lo mismo, puedes gastar tiempo calculando todas las corrientes, voltajes y potencias, pero tal vez sólo necesites un voltaje, una corriente o una potencia en particular, por lo que no sería necesario que gastes tiempo calculando valores que no te son de utilidad o que simplemente no te los han pedido.

Entonces, para resolver un circuito eléctrico, tienes que saber qué estás buscando y cuál es el camino que debes seguir para llegar al resultado más rápido y no desperdiciar tiempo y recursos calculando lo que no necesitas.

Tabla 4.1. Técnica o tipo de análisis y resultado o resultados que se obtienen

| Técnica o tipo de análisis | Resultado que se obtiene |
|-----------------------------------|---|
| Análisis de mallas. | Todas las corrientes de malla ($I_1, I_2, I_3, I_4 \dots I_n$) |
| Análisis de nodos. | Todos los voltajes de nodo ($v_1, v_2, v_3, v_4 \dots v_n$) |
| Linealidad y superposición. | |
| Transformación de fuentes. | Corriente o voltaje en un solo elemento del circuito |
| Teorema de Thévenin. | (I_x ó V_x) |
| Teorema de Norton. | |
| Máxima transferencia de potencia. | Máxima potencia en la carga (P_{max}) |

Con la práctica se aprende a identificar qué técnica es la más adecuada para resolver un circuito eléctrico. Con los años de enseñar la materia de circuitos eléctricos, he observado que existen algunas características que ayudan a los estudiantes a tomar la decisión de cómo comenzar a resolverlos. Estas características dependen básicamente de los elementos que integran el circuito y cómo están conectados entre sí. En la Tabla 4.2 se indican las características generales que se pueden identificar en un circuito y lo que resulta de tener dichas características para que, a partir de ellas, se tome la decisión de cuál técnica utilizar para resolver el circuito.

Tabla 4.2. Características del circuito y criterios para seleccionar el tipo de análisis

| Característica del circuito | Criterio para seleccionar el tipo de análisis |
|---|---|
| (No. de mallas) o [(No. de nodos) - 1] | Indica el número de ecuaciones y de incógnitas que resultarán del sistema. |
| Tipo de fuentes de alimentación y tipo de conexión. | Fuentes de voltaje favorecen el análisis con nodos . Fuentes de corriente favorecen el análisis con mallas . La conexión determina si se puede aplicar transformación de fuentes . |
| Fuentes de voltaje unidas en un punto en común o separadas. | En común, facilita el análisis con nodos . Separadas, implica utilizar " Supernodo ". |
| Fuente de corriente separada en una malla o en común con dos mallas. | Separada, facilita el análisis con mallas . En común, implica utilizar al menos una " Supermalla ". |
| Eliminar fuentes de voltaje y/o de corriente para verificar el tipo de conexiones entre resistencias. | Conexiones serie-paralelo facilita análisis con superposición . Conexiones estrella-delta obliga a utilizar análisis con mallas, nodos, Thévenin o Norton . |

A lo largo de éste y los próximos capítulos se explicarán, con varios ejemplos, las técnicas para analizar circuitos eléctricos, tratando de abarcar la mayor cantidad posible de características en los ejercicios.

En cada capítulo se explicará cada una de las técnicas del análisis y en cada ejemplo se aclarará paso a paso cómo se resuelve el ejercicio, hasta plantear la o las ecuaciones que definan o resuelvan el problema. De igual manera, para cada problema, se resolverán las ecuaciones resultantes con distintos métodos matemáticos para que sea el estudiante quien decida cuál es el que le resulta más claro, rápido o sencillo. La intención es hacer al menos un ejemplo de cada uno de los casos que se presentan con cada técnica para que después el estudiante los pueda tomar como referencia y pueda resolver cualquier otro circuito que se le plantee.

Al final de cada capítulo, una vez que se hayan estudiado todos los ejemplos, se plantearán varios ejercicios de circuitos eléctricos los cuales el alumno deberá ser capaz de plantear y resolver por su propia cuenta.

ANÁLISIS DE MALLAS

El análisis de mallas se basa principalmente en la ley de Ohm y en la ley de voltajes de Kirchhoff (LVK), aplicadas en todas las mallas del circuito. Con esta técnica, lo que se obtiene son todas las corrientes de malla que circulan a través del circuito (McAllister, 2008). Una vez que se calculan las corrientes de cada malla, es posible obtener cualquier voltaje, corriente o potencia en el circuito.

Con esta técnica de análisis, resultan tantas ecuaciones como mallas existen en el circuito. Por lo tanto, es necesario utilizar métodos matemáticos para resolver sistemas de ecuaciones lineales simultáneas o contar con alguna aplicación que permita resolver este tipo de sistemas.

Algunos autores proponen hasta cinco pasos para resolver los circuitos eléctricos utilizando el análisis de mallas (Hernández, s. f.). Sin embargo, Luis Flores (2017) aplica el análisis de mallas utilizando tres pasos, con los que también llega a la solución del circuito eléctrico. A continuación se presentan los tres pasos para resolver un circuito eléctrico empleando el análisis con mallas.

Pasos para aplicar el análisis de mallas

Para aplicar el análisis de mallas, básicamente se deben seguir tres sencillos pasos:

Paso 1.

Identificar las mallas con sus corrientes y colocar los signos de voltaje

Cada malla se identifica normalmente con $I_1, I_2, I_3, I_4 \dots I_n$ para cada una de las corrientes. Los signos de voltaje se colocan de acuerdo con la convención de signos pasiva. La dirección de la corriente para cada malla se puede establecer en favor \cup o en contra \cap de las manecillas del reloj. No existe una forma certera de saber cuál es la dirección de la corriente positiva. Como regla general, se escoge el

sentido horario para todas las corrientes; esto facilita el análisis y la construcción de las ecuaciones de malla.

Paso 2.

Construir la ecuación de cada malla

Para construir la ecuación de cada malla, se aplica la ley de voltajes de Kirchhoff (LVK) y la ley de Ohm para cada una de las mallas. Se obtiene una ecuación por cada malla hasta que resulta un sistema de ecuaciones igual al número de mallas que existen en el circuito.

Paso 3.

Agrupar las ecuaciones en un sistema de n-ecuaciones con n-incógnitas y resolverlo para obtener los valores de las corrientes

Se resuelve el sistema de ecuaciones simultáneas y se obtienen los valores para todas las corrientes de malla en el circuito.

A continuación, se presentan una serie de ejercicios en los que se aplica el análisis con mallas para calcular todas las corrientes en cada circuito.

MALLAS CON FUENTES DE VOLTAJE

Ejemplo 4-1. Calcular la corriente en cada malla del circuito de la Figura 4.1.

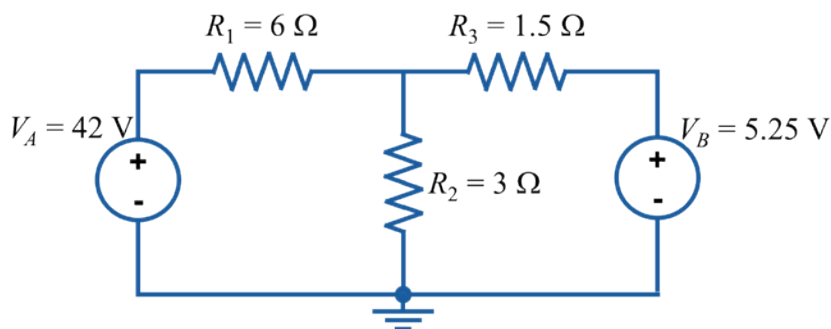


Figura 4.1. Circuito para aplicar el análisis por mallas.

Respuesta.

En el primer paso, observamos que el circuito cuenta con dos corrientes de malla (I_1 e I_2), las marcamos y, para cada una de ellas, establecemos el sentido de giro en favor de las manecillas del reloj. Después, colocamos los signos de voltaje en cada resistencia de acuerdo con cada una de las corrientes de malla, utilizando la convención de signos pasiva tal como se aprecia en la Figura 4.2.

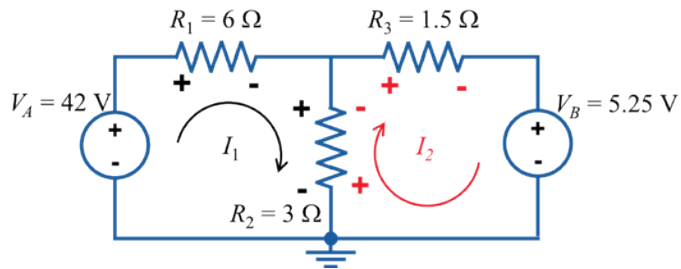


Figura 4.2 Corrientes de malla y signos de voltaje para cada resistencia.

En el segundo paso, con la ley de voltajes de Kirchhoff (LVK) y la ecuación (2.9) de la ley de Ohm para el voltaje, construimos la ecuación para cada una de las mallas.

Para la malla de I_1 aplicamos la ley de voltajes de Kirchhoff resultando:

$$\sum V_{trayectoria} = 0 \text{ V}$$

A partir de la Figura 4.2 construimos la ecuación en la misma dirección que se trazó la corriente, es decir, en favor de las manecillas del reloj. Al recorrer la malla se coloca el primer signo que aparece para cada elemento. Se puede comenzar a construir la ecuación a partir de cualquier componente de la malla, en este caso comenzamos con la fuente de voltaje V_A y observamos que el primer signo que le aparece es el signo negativo, por esa razón se coloca un (-) en la ecuación.

$$-V_A + \dots = 0 \text{ V}$$

De acuerdo con la ley de Ohm, el voltaje en una resistencia es el producto de la corriente por la resistencia (ecuación 2.9), es decir, IR o RI . Para la resistencia R_1 , el primer signo que aparece es el signo positivo, por esta razón se coloca un (+) en la ecuación.

$$-V_A + R_1 I_1 + \dots = 0 \text{ V}$$

Para la resistencia R_2 existe un dilema de qué signo colocar, ¿positivo o negativo?, porque, como se observa en la Figura 4.3, la resistencia tiene colocados dos pares de signos, un par para la corriente I_1 y otro par de signos para la corriente I_2 .

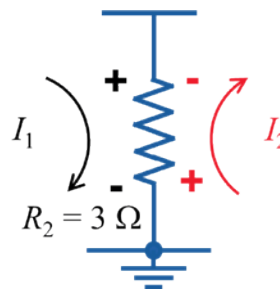


Figura 4.3. Direcciones de la corriente y signos de voltaje para la resistencia R_2 .

Para esta resistencia, se toma como referencia la corriente de la malla que estamos analizando (en este caso de la malla de I_1), menos la corriente de la malla de I_2 (porque es opuesta a I_1), resultando la ecuación (4.1).

$$-V_A + R_1 I_1 + R_2 (I_1 - I_2) = 0 \text{ V} \quad (4.1)$$

Ahora se sustituyen los valores de las resistencias y el valor del voltaje V_A en la ecuación (4.1), para quedar:

$$-42 \text{ V} + (6 \Omega) I_1 + (3 \Omega) (I_1 - I_2) = 0 \text{ V}$$

Se agrupan los términos para I_1 , para I_2 y los términos constantes se pasan al segundo miembro, quedando:

$$\begin{aligned} (6 \Omega) I_1 + (3 \Omega) I_1 - (3 \Omega) I_2 &= 42 \text{ V} \\ (6 \Omega + 3 \Omega) I_1 - (3 \Omega) I_2 &= 42 \text{ V} \\ (9 \Omega) I_1 - (3 \Omega) I_2 &= 42 \text{ V} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Ahora para la malla de I_2 aplicamos el mismo procedimiento que realizamos para obtener la ecuación (4.2) de la malla para I_1 . A partir de la Figura 4.2 y comenzando en la fuente de voltaje V_B resulta:

$$\begin{aligned} \sum V_{trayectoria} &= 0 \text{ V} \\ V_B + R_2 (I_2 - I_1) + R_3 I_2 &= 0 \text{ V} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Obsérvese que ahora, para el término de la resistencia R_2 , la corriente I_2 es positiva y la corriente I_1 es negativa porque ahora la corriente de referencia es la que corresponde para la malla de I_2 y la que es opuesta es la corriente de la malla I_1 .

Sustituimos los valores de las resistencias y el valor del voltaje V_B en la ecuación (4.3), pasamos los términos constantes al segundo miembro y agrupamos los términos semejantes en el primer miembro resultando la ecuación (4.4).

$$\begin{aligned} 5.25 \text{ V} + (3 \Omega) (I_2 - I_1) + (1.5 \Omega) I_2 &= 0 \text{ V} \\ (3 \Omega) I_2 - (3 \Omega) I_1 + (1.5 \Omega) I_2 &= -5.25 \text{ V} \\ -(3 \Omega) I_1 + (3 \Omega + 1.5 \Omega) I_2 &= -5.25 \text{ V} \\ -(3 \Omega) I_1 + (4.5 \Omega) I_2 &= -5.25 \text{ V} \end{aligned} \quad (4.4)$$

El tercer y último paso consiste en agrupar la ecuación (4.4) y la ecuación (4.2) para formar un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Resolvemos el sistema y obtenemos las dos corrientes de malla.

A continuación, y para mayor facilidad a la hora de hacer los cálculos, se omiten las unidades en la representación del sistema de ecuaciones.

$$\left. \begin{aligned} 9I_1 - 3I_2 &= 42 \\ -3I_1 + 4.5I_2 &= -5.25 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} Ec(I) \\ Ec(II) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Dos ecuaciones} \\ \text{con dos incógnitas} \end{array}$$

Utilizamos el método de Suma o Resta para resolver el sistema. Multiplicamos la *Ec. (II)* por un factor de 3 y resulta.

$$[-3I_1 + 4.5I_2 = -5.25](3) \quad Ec(II)^*$$

$$-9I_1 + 13.5I_2 = -15.75 \quad Ec(II)^*$$

Sumamos la ecuación que resulta con la *Ec (I)* y queda.

$$\begin{array}{r} \cancel{9I_1} - 3I_2 = 42 \quad Ec(I) \\ \cancel{-9I_1} + 13.5I_2 = -15.75 \quad Ec(II)^* \\ \hline 10.5I_2 = 26.25 \end{array}$$

De la ecuación resultante despejamos la corriente I_2 .

$$I_2 = \frac{26.25}{10.5}$$

$$\boxed{I_2 = 2.5 \text{ A}}$$

Sustituimos el valor de I_2 en la *Ec. (I)* o en la *Ec. (II)* para después despejar el valor de I_1 , en este caso lo hacemos para la *Ec. (I)* obteniendo.

$$9I_1 - 3I_2 = 42$$

$$9I_1 - 3(2.5) = 42$$

$$9I_1 - 7.5 = 42$$

$$9I_1 = 42 + 7.5$$

$$9I_1 = 49.5$$

$$I_1 = \frac{49.5}{9}$$

$$\boxed{I_1 = 5.5 \text{ A}}$$

Con este cálculo se han obtenido los valores de las dos corrientes (I_1 e I_2) y observamos que ambas corrientes resultaron positivas.

Algo que debemos notar, es que en la fuente V_B la corriente I_2 es positiva y está entrando por la terminal positiva de la fuente, así que, contrario a lo que se podría pensar desde un inicio, la fuente está absorbiendo potencia en lugar de entregarla o generarla.

Otra manera de resolver el sistema de ecuaciones es utilizando la regla de Cramer, quedando.

$$\left. \begin{array}{l} 9I_1 - 3I_2 = 42 \\ -3I_1 + 4.5I_2 = -5.25 \end{array} \right\} \begin{array}{l} Ec(I) \\ Ec(II) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Dos ecuaciones} \\ \text{con dos incógnitas} \end{array}$$

$$Det(A) = \begin{vmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 4.5 \end{vmatrix} = [(9)(4.5)] - [(-3)(-3)] = 40.5 - 9$$

$$Det(A) = 31.5$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 42 & -3 \\ -5.25 & 4.5 \end{vmatrix}}{Det(A)} = \frac{[(42)(4.5)] - [(-3)(-5.25)]}{31.5} = \frac{189 - 15.75}{31.5}$$

$$I_1 = \frac{173.25}{31.5} = 5.5 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 42 \\ -3 & -5.25 \end{vmatrix}}{Det(A)} = \frac{[(9)(-5.25)] - [(42)(-3)]}{31.5} = \frac{-47.25 - (-126)}{31.5}$$

$$I_2 = \frac{78.75}{31.5} = 2.5 \text{ A}$$

Una manera rápida para resolver el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas del problema es utilizando la aplicación *System of Linear Equations Solver*. A partir de la *Ec (I)* y de la *Ec (II)* de este problema, se sustituyen en la *app* y se obtienen los resultados para las corrientes.

$$\left. \begin{array}{l} 9I_1 - 3I_2 = 42 \\ -3I_1 + 4.5I_2 = -5.25 \end{array} \right\} \begin{array}{l} Ec(I) \\ Ec(II) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Dos ecuaciones} \\ \text{con dos incógnitas} \end{array}$$

En la Figura 4.4 se muestra la aplicación con los datos de las ecuaciones y los resultados de las corrientes I_1 e I_2 , sólo que con nombres de variables distintos. En la aplicación los nombres de las variables son x , y , z y t , pero eso no es ningún inconveniente, ya que el resultado es lo que importa.

| ← System of Linear Equations Solver | | |
|---|-----|-------|
| x | y | total |
| 9 | -3 | 42 |
| -3 | 4.5 | -5.25 |
| $x = 5.499999999999999$ $y = 2.4999999999999996$ | | |
| $x = 5.499999999999999$ $y = 2.4999999999999996$ | | |

$$I_1 = 5.5 \text{ A}$$

$$I_2 = 2.5 \text{ A}$$

Figura 4.4. App System Linear Equations Solver para un Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Ejemplo 4-2. Calcular la corriente en cada malla del circuito de la Figura 4.5.

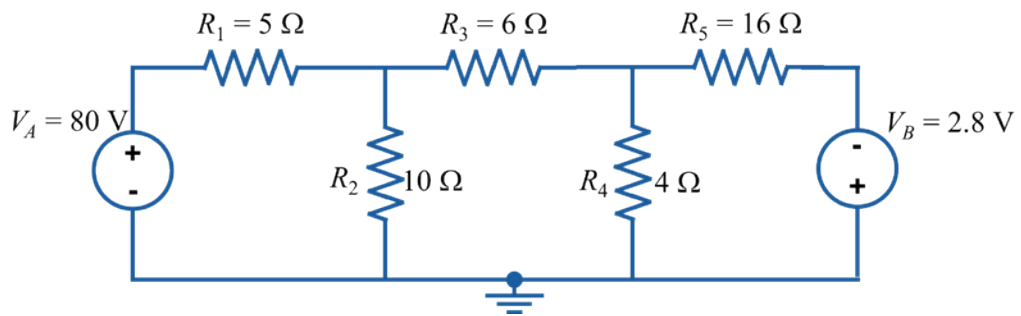


Figura 4.5. Circuito para aplicar el análisis con tres mallas.

Respuesta.

Identificamos las mallas y colocamos los signos de voltaje tal como se aprecia en la Figura 4.6. Obsérvese que no existen elementos en común entre la malla de I_1 y la malla de I_2 , esto ocasionará que algunos términos en las ecuaciones sean nulos.

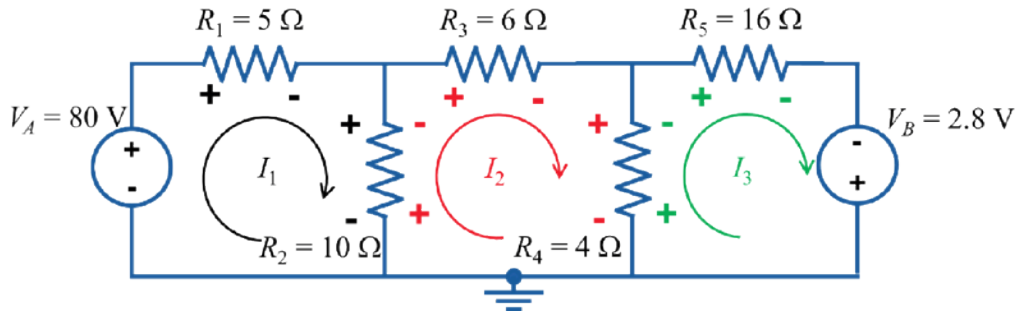


Figura 4.6. Corrientes y signos para las tres mallas.

Obtenemos la ecuación para cada malla del circuito aplicando la LVK, quedando:

Para I_1 tenemos:

$$\sum V_{trayectoria} = 0 \text{ V}$$

$$-V_A + R_1 I_1 + R_2 (I_1 - I_2) = 0 \text{ V}$$

$$-80 \text{ V} + (5 \Omega) I_1 + (10 \Omega) (I_1 - I_2) = 0 \text{ V}$$

$$(5 \Omega) I_1 + (10 \Omega) I_1 - (10 \Omega) I_2 = 80 \text{ V}$$

$$(15 \Omega) I_1 - (10 \Omega) I_2 = 80 \text{ V} \quad (4.5)$$

Para I_2 tenemos:

$$\sum V_{trayectoria} = 0 \text{ V}$$

$$R_2 (I_2 - I_1) + R_3 I_2 + R_4 (I_2 - I_3) = 0 \text{ V}$$

$$(10 \Omega) (I_2 - I_1) + (6 \Omega) I_2 + (4 \Omega) (I_2 - I_3) = 0 \text{ V}$$

$$(10 \Omega) I_2 - (10 \Omega) I_1 + (6 \Omega) I_2 + (4 \Omega) I_2 - (4 \Omega) I_3 = 0 \text{ V}$$

$$-(10 \Omega) I_1 + (20 \Omega) I_2 - (4 \Omega) I_3 = 0 \text{ V} \quad (4.6)$$

Para I_3 tenemos:

$$\sum V_{trayectoria} = 0 \text{ V}$$

$$R_4 (I_3 - I_2) + R_5 I_3 - V_B = 0 \text{ V}$$

$$(4 \Omega) (I_3 - I_2) + (16 \Omega) I_3 - 2.8 \text{ V} = 0 \text{ V}$$

$$(4 \Omega) I_3 - (4 \Omega) I_2 + (16 \Omega) I_3 = 2.8 \text{ V}$$

$$-(4 \Omega) I_2 + (20 \Omega) I_3 = 2.8 \text{ V} \quad (4.7)$$

Agrupamos las ecuaciones (4.5), (4.6) y (4.7) para formar un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. De igual manera, y para mayor facilidad a la hora de hacer los cálculos, se omiten las unidades en la representación del sistema de ecuaciones.

$$15I_1 - 10I_2 = 80 \quad Ec(I)$$

$$-10I_1 + 20I_2 - 4I_3 = 0 \quad Ec(II)$$

$$-4I_2 + 20I_3 = 2.8 \quad Ec(III)$$

Para resolver el sistema de ecuaciones aplicamos el método de Suma o Resta. Nótese que, tal como se mencionó al principio del ejemplo, algunos términos son nulos, tal es el caso para I_3 en la $Ec(I)$ y para I_1 en la $Ec(III)$. Aprovechamos que I_1 aparece solamente en la $Ec(I)$ y en la $Ec(II)$, aplicando el método de suma o resta se puede eliminar para que quede una nueva ecuación que se resuelva con la $Ec(III)$.

Multiplicamos la $Ec(I)$ por un factor de 2 y la $Ec(II)$ por un factor de 3 para sumarlas y eliminar I_1 resultando la $Ec(IV)$.

$$[15I_1 - 10I_2 = 80](2) \quad Ec(I)^*$$

$$[-10I_1 + 20I_2 - 4I_3 = 0](3) \quad Ec(II)^*$$

$$\cancel{30I_1} - 20I_2 = 160$$

$$\cancel{-30I_1} + 60I_2 - 12I_3 = 0$$

$$40I_2 - 12I_3 = 160 \quad Ec(IV)$$

De esta manera la $Ec(III)$ y la $Ec(IV)$ forman un nuevo sistema de ecuaciones, pero de sólo dos variables que se pueden resolver más fácilmente.

$$-4I_2 + 20I_3 = 2.8 \quad Ec(III)$$

$$40I_2 - 12I_3 = 160 \quad Ec(IV)$$

Continuamos aplicando el método de suma o resta, modificamos la $Ec(III)$ para multiplicarla por un factor de (10) y de esta manera poder eliminar el término I_2 al sumarla con la $Ec(IV)$, resultando.

$$[-4I_2 + 20I_3 = 2.8](10) \quad Ec(III)^*$$

$$-40I_2 + 200I_3 = 28 \quad Ec(III)^*$$

Sumamos la ecuación que resulta con la $Ec (IV)$, resultando.

$$\begin{array}{rcl}
 \cancel{-40I_2} + 200I_3 & = & 28 \quad Ec(III)^* \\
 \cancel{40I_2} - 12I_3 & = & 160 \quad Ec(IV) \\
 \hline
 188I_3 & = & 188
 \end{array}$$

Despejamos I_3 para quedar.

$$I_3 = \frac{188}{188}$$

$$\boxed{I_3 = 1 \text{ A}}$$

Al ya conocer el valor de I_3 , éste se puede sustituir en la $Ec (III)$ y de ahí despejar directamente el valor de I_2 , quedando:

$$\begin{array}{rcl}
 -4I_2 + 20I_3 & = & 2.8 \quad Ec(III) \\
 -4I_2 + 20(1) & = & 2.8 \\
 -4I_2 + 20 & = & 2.8 \\
 -4I_2 & = & 2.8 - 20 \\
 -4I_2 & = & -17.2
 \end{array}$$

Despejamos I_2 para quedar.

$$I_2 = \frac{-17.2}{-4}$$

$$\boxed{I_2 = 4.3 \text{ A}}$$

Al ya conocer el valor de I_2 , éste se puede sustituir en la $Ec (I)$ y de ahí despejar directamente el valor de I_1 , quedando:

$$\begin{array}{rcl}
 15I_1 - 10I_2 & = & 80 \quad Ec(I) \\
 15I_1 - 10(4.3) & = & 80 \\
 15I_1 - 43 & = & 80 \\
 15I_1 & = & 80 + 43 \\
 15I_1 & = & 123
 \end{array}$$

Despejamos I_1 para quedar.

$$I_1 = \frac{123}{15}$$

$$\boxed{I_1 = 8.2 \text{ A}}$$

Hemos resuelto el problema y observamos que se ha acertado en la dirección de la corriente positiva en las tres mallas al escogerlas en el sentido de las manecillas del reloj.

Como una alternativa, volvemos a escribir el sistema de ecuaciones, pero ahora para resolverlo con la regla de Cramer, quedando.

$$\begin{aligned} 15I_1 - 10I_2 &= 80 & Ec(I) \\ -10I_1 + 20I_2 - 4I_3 &= 0 & Ec(II) \\ -4I_2 + 20I_3 &= 2.8 & Ec(III) \end{aligned}$$

$$Det(A) = \begin{vmatrix} 15 & -10 & 0 \\ -10 & 20 & -4 \\ 0 & -4 & 20 \end{vmatrix} = [(6,000) + (0) + (0)] - [(0) + (240) + (2,000)]$$

$$Det(A) = 3,760$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 80 & -10 & 0 \\ 0 & 20 & -4 \\ 2.8 & -4 & 20 \end{vmatrix}}{Det(A)} = \frac{[(32,000) + (0) + (112)] - [(0) + (1,280) + (0)]}{3,760}$$

$$I_1 = \frac{30,832}{3,760} = 8.2 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 15 & 80 & 0 \\ -10 & 0 & -4 \\ 0 & 2.8 & 20 \end{vmatrix}}{Det(A)} = \frac{[(0) + (0) + (0)] - [(0) + (-168) + (-16,000)]}{3,760}$$

$$I_2 = \frac{16,168}{3,760} = 4.3 \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 15 & -10 & 80 \\ -10 & 20 & 0 \\ 0 & -4 & 2.8 \end{vmatrix}}{Det(A)} = \frac{[(840) + (3,200) + (0)] - [(0) + (0) + (280)]}{3,760}$$

$$I_3 = \frac{3,760}{3,760} = 1 \text{ A}$$

En la Figura 4.7 se muestra cómo se resuelve el mismo sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas con la *app System of Linear Equations Solver*.

$$\begin{aligned}
 15I_1 - 10I_2 &= 80 & Ec(I) \\
 -10I_1 + 20I_2 - 4I_3 &= 0 & Ec(II) \\
 -4I_2 + 20I_3 &= 2.8 & Ec(III)
 \end{aligned}$$

| ← System of Linear Equations Solver | | | |
|-------------------------------------|-----|----|-------|
| x | y | z | total |
| 15 | -10 | 0 | 80 |
| -10 | 20 | -4 | 0 |
| 0 | -4 | 20 | 2.8 |

| |
|-----------------------|
| x = 8.2 |
| y = 4.299999999999999 |
| z = 0.999999999999999 |

| |
|-----------------------|
| x = 8.2 |
| y = 4.299999999999999 |
| z = 0.999999999999999 |

$$I_1 = 8.2 \text{ A}$$

$$I_2 = 4.3 \text{ A}$$

$$I_3 = 1 \text{ A}$$

Figura 4.7. System of Linear Equations Solver para resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

Ejemplo 4-3. Calcular las corrientes de malla del circuito de la Figura 4.8.

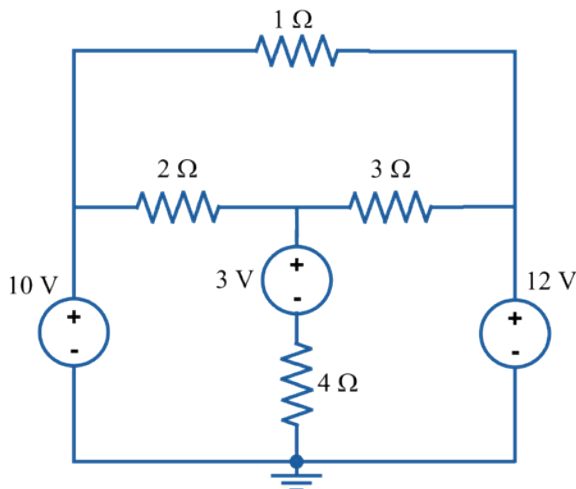


Figura 4.8. Circuito de tres mallas con tres fuentes de voltaje.

Respuesta. En el circuito se aprecia la presencia de tres mallas y, en esta ocasión, si existen elementos que se encuentran en común entre todas las mallas, por lo tanto, no habrá términos nulos, como sucedió en el ejemplo anterior.

Procedemos a definir las corrientes de malla y los signos de las resistencias para obtener las respectivas ecuaciones. En la Figura 4.9 se muestra una forma de cómo nombrar a las corrientes del circuito y colocar los signos de las resistencias.

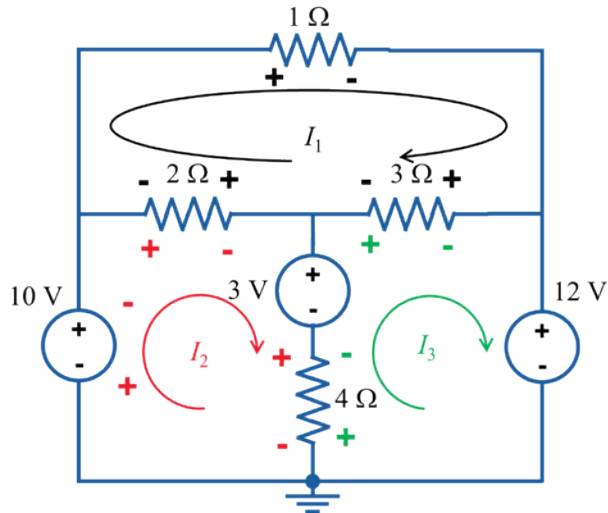


Figura 4.9. Corrientes de malla en el circuito con tres mallas y tres fuentes de voltaje.

Forma simplificada de obtener las ecuaciones de malla

- Para aplicar la forma simplificada, **todas las corrientes de malla deben tener la dirección en favor de las manecillas del reloj**, de otra forma no es posible aplicarla.
- El término de la corriente de malla será positivo, se suman todas las resistencias de la malla y se multiplican por su respectiva corriente.
- La o las resistencias que se compartan con otra malla se sumarán y se colocarán en la ecuación con signo negativo y se multiplicarán por la corriente de malla con la que se está compartiendo.
- Para las fuentes de voltaje, se colocan todas las que aparecen en la malla que se está analizando y se coloca el primer signo que aparece siguiendo el sentido de las manecillas del reloj.

Por ejemplo, para el circuito de la Figura 4.9 la corriente I_1 tiene tres resistencias en la malla, en este caso 1Ω , 3Ω y 2Ω . Éstas son todas las resistencias de la malla I_1 , por esa razón se suman y se multiplican por la corriente I_1 , tal como se muestra en la ecuación (4.8). La resistencia de 2Ω se comparte con la malla de I_2 , por esta razón se coloca negativa y multiplicada por I_2 , tal como se aprecia también en la ecuación (4.8). Lo mismo sucede con la resistencia de 3Ω que se comparte con la malla de I_3 , por tal motivo se coloca negativa y multiplicada por I_3 , tal como se aprecia también en la ecuación (4.8).

Para I_1 tenemos:

$$\sum V_{trayectoria} = 0 \text{ V}$$

$$(1 \Omega + 3 \Omega + 2 \Omega)I_1 - (2 \Omega)I_2 - (3 \Omega)I_3 = 0 \text{ V} \quad (4.8)$$

$$(6 \Omega)I_1 - (2 \Omega)I_2 - (3 \Omega)I_3 = 0 \text{ V} \quad (4.9)$$

Para I_2 tenemos:

Obsérvese en la Figura 4.9 que, para el caso de las fuentes de voltaje en la malla de I_2 , se respeta el primer signo que les aparece en favor de las manecillas del reloj. En este caso, para la fuente de 10 V, el primer signo que aparece en esta dirección es negativo, por este motivo en la ecuación (4.10) aparece con signo (-) y el primero que aparece para la fuente de 3 V es el signo (+), tal como se aprecia también en la ecuación (4.10).

$$\sum V_{trayectoria} = 0 \text{ V}$$

$$-10 \text{ V} - (2 \Omega)I_1 + (2 \Omega + 4 \Omega)I_2 + 3 \text{ V} - (4 \Omega)I_3 = 0 \text{ V} \quad (4.10)$$

$$-(2 \Omega)I_1 + (6 \Omega)I_2 - (4 \Omega)I_3 = 7 \text{ V} \quad (4.11)$$

Para I_3 tenemos:

$$\sum V_{trayectoria} = 0 \text{ V}$$

$$12 \text{ V} - (3 \Omega)I_1 - (4 \Omega)I_2 + (4 \Omega + 3 \Omega)I_3 - 3 \text{ V} = 0 \text{ V}$$

$$-(3 \Omega)I_1 - (4 \Omega)I_2 + (7 \Omega)I_3 = -9 \text{ V} \quad (4.12)$$

Agrupamos las ecuaciones (4.9), (4.11) y (4.12) para formar un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. De igual manera, y para mayor facilidad a la hora de hacer los cálculos, se omiten las unidades en la representación del sistema de ecuaciones.

$$6I_1 \quad -2I_2 \quad -3I_3 \quad = \quad 0 \quad Ec(I)$$

$$-2I_1 \quad +6I_2 \quad -4I_3 \quad = \quad 7 \quad Ec(II)$$

$$-3I_1 \quad -4I_2 \quad +7I_3 \quad = \quad -9 \quad Ec(III)$$

Resulta un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, el cual se puede resolver también con facilidad utilizando el método de suma o resta.

Para simplificar el sistema, multiplicamos la $Ec(II)$ por un factor de 3 y la $Ec(III)$ por un factor de 2 para sumar cada una con la $Ec(I)$ y poder eliminar I_1 resultando dos nuevas ecuaciones, la $Ec(IV)$ y la $Ec(V)$.

$$\begin{aligned} [-2I_1 + 6I_2 - 4I_3 = 7](3) \quad Ec(II)^* \\ -6I_1 + 18I_2 - 12I_3 = 21 \quad Ec(II)^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [-3I_1 - 4I_2 + 7I_3 = -9](2) \quad Ec(III)^* \\ -6I_1 - 8I_2 + 14I_3 = -18 \quad Ec(III)^* \end{aligned}$$

Sumamos la $Ec(I)$ con la $Ec(II)^*$ y la $Ec(I)$ también con la $Ec(III)^*$ para poder eliminar I_1 y así obtener dos nuevas ecuaciones, resultando.

$$\begin{array}{r} \cancel{6I_1} - 2I_2 - 3I_3 = 0 \quad Ec(I) \\ \cancel{-6I_1} + 18I_2 - 12I_3 = 21 \quad Ec(II)^* \\ \hline 16I_2 - 15I_3 = 21 \quad Ec(IV) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \cancel{6I_1} - 2I_2 - 3I_3 = 0 \quad Ec(I) \\ \cancel{-6I_1} - 8I_2 + 14I_3 = -18 \quad Ec(III)^* \\ \hline -10I_2 + 11I_3 = -18 \quad Ec(V) \end{array}$$

Ahora nos resulta un nuevo sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$\begin{aligned} 16I_2 - 15I_3 &= 21 \quad Ec(IV) \\ -10I_2 + 11I_3 &= -18 \quad Ec(V) \end{aligned}$$

Multiplicamos la $Ec(IV)$ por un factor de 10, y la $Ec(V)$ por un factor de 16 para igualar los coeficientes de I_2 .

$$\begin{aligned} [16I_2 - 15I_3 = 21](10) \quad Ec(IV)^* \\ [-10I_2 + 11I_3 = -18](16) \quad Ec(V)^* \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} \cancel{160I_2} - 150I_3 = 210 \quad Ec(IV)^* \\ \cancel{-160I_2} + 176I_3 = -288 \quad Ec(V)^* \\ \hline 26I_3 = -78 \end{array}$$

Despejamos I_3 para quedar.

$$I_3 = \frac{-78}{26}$$

$$\boxed{I_3 = -3 \text{ A}}$$

Al ya conocer el valor de I_3 , este se puede sustituir en la $Ec (IV)$ o en la $Ec (V)$ y de ahí despejar directamente el valor de I_2 , en este caso se sustituye en la $Ec (IV)$, quedando:

$$16I_2 - 15I_3 = 21 \quad Ec(IV)$$

$$16I_2 - 15(-3) = 21$$

$$16I_2 + 45 = 21$$

$$16I_2 = 21 - 45$$

$$16I_2 = -24$$

Despejamos I_2 para quedar.

$$I_2 = \frac{-24}{16}$$

$$\boxed{I_2 = -1.5 \text{ A}}$$

Al ya conocer el valor de I_2 y de I_3 , estos se pueden sustituir en la $Ec (I)$, $Ec (II)$ o $Ec (III)$ y de ahí despejar directamente el valor de I_1 , en este caso sustituimos en la $Ec (I)$, quedando:

$$6I_1 - 2I_2 - 3I_3 = 0 \quad Ec(I)$$

$$6I_1 - 2(-1.5) - 3(-3) = 0$$

$$6I_1 + 3 + 9 = 0$$

$$6I_1 + 12 = 0$$

$$6I_1 = -12$$

Despejamos I_1 para quedar.

$$I_1 = \frac{-12}{6}$$

$$\boxed{I_1 = -2 \text{ A}}$$

Obsérvese que, en este caso, todos los resultados de las corrientes son negativas, por lo tanto, el sentido de las corrientes positivas es en contra de las manecillas del reloj.

Volvemos a escribir el sistema de ecuaciones, pero ahora para resolverlo con la regla de Cramer, quedando.

$$6I_1 - 2I_2 - 3I_3 = 0 \quad Ec(I)$$

$$-2I_1 + 6I_2 - 4I_3 = 7 \quad Ec(II)$$

$$-3I_1 - 4I_2 + 7I_3 = -9 \quad Ec(III)$$

$$Det(A) = \begin{vmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -2 & 6 & -4 \\ -3 & -4 & 7 \end{vmatrix} = [(252) + (-24) + (-24)] - [(54) + (96) + (28)]$$

$$Det(A) = 26$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 7 & 6 & -4 \\ -9 & -4 & 7 \end{vmatrix}}{Det(A)} = \frac{[(0) + (84) + (-72)] - [(162) + (0) + (-98)]}{26}$$

$$I_1 = \frac{-52}{26} = -2 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 0 & -3 \\ -2 & 7 & -4 \\ -3 & -9 & 7 \end{vmatrix}}{Det(A)} = \frac{[(294) + (-54) + (0)] - [(63) + (216) + (0)]}{26}$$

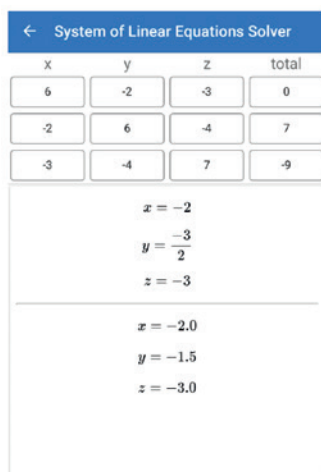
$$I_2 = \frac{-39}{26} = -1.5 \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 7 \\ -3 & -4 & -9 \end{vmatrix}}{Det(A)} = \frac{[(-324) + (0) + (42)] - [(0) + (-168) + (-36)]}{26}$$

$$I_3 = \frac{-78}{26} = -3 \text{ A}$$

En la Figura 4.10 se muestra cómo se resuelve el mismo sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas con la *app System of Linear Equations Solver*.

$$\begin{aligned} 6I_1 - 2I_2 - 3I_3 &= 0 & Ec(I) \\ -2I_1 + 6I_2 - 4I_3 &= 7 & Ec(II) \\ -3I_1 - 4I_2 + 7I_3 &= -9 & Ec(III) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} I_1 &= -2 \text{ A} \\ I_2 &= -1.5 \text{ A} \\ I_3 &= -3.0 \text{ A} \end{aligned}$$

Figura 4.10. *System of Linear Equations Solver* para resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

Ejemplo 4-4. Calcular las corrientes de malla en el circuito de la Figura 4.11.

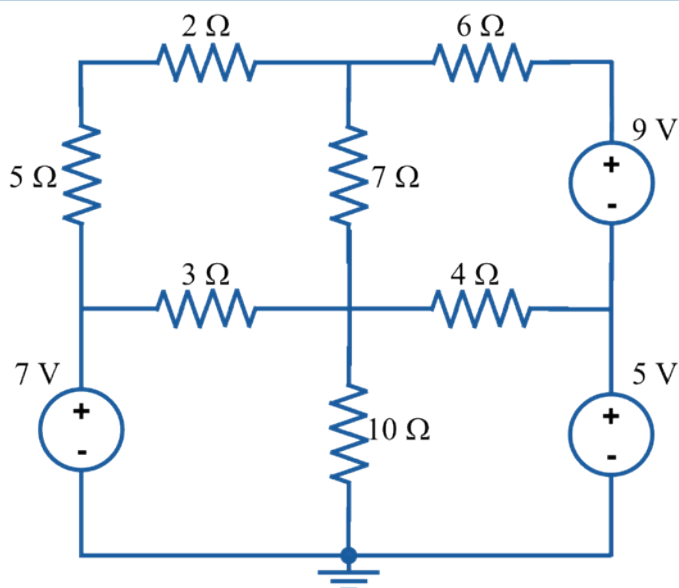


Figura 4.11. Circuito de cuatro mallas.

Respuesta.

Obsérvese que el circuito cuenta con 4 mallas, por lo tanto, se obtendrán 4 ecuaciones con 4 incógnitas. Nótese también que cada malla sólo comparte elementos con las mallas contiguas y no con todas las demás. Esto ocasionará que en las ecuaciones existan términos nulos.

Primero indicamos las direcciones de las corrientes y los signos de voltaje en cada resistencia para cada una de las corrientes. En la Figura 4.12 se muestra una propuesta de las corrientes, así como los signos de los de voltaje para cada una de las resistencias.

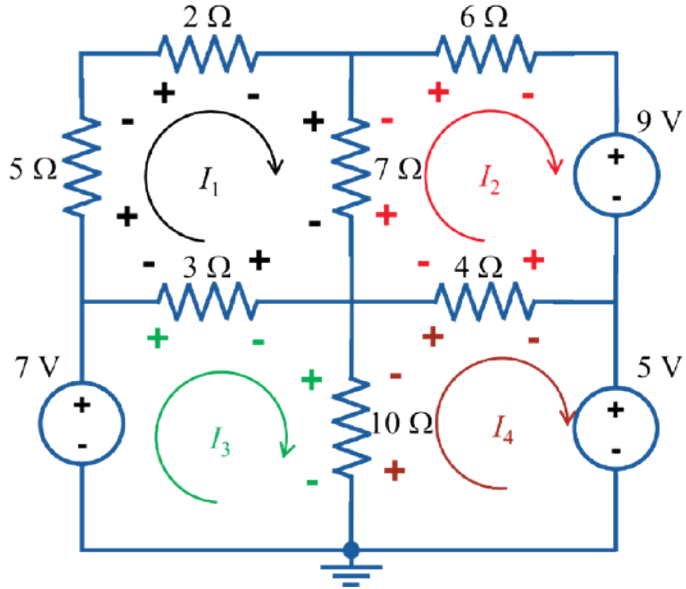


Figura 4.12. Propuesta de corrientes y signos de voltaje para el circuito de 4 mallas.

Ahora, mediante la forma simplificada, obtenemos la ecuación para cada malla del circuito aplicando la LVK y resulta.

$$\sum V_{trayectoria} = 0 \text{ V}$$

$$(5 \Omega + 2 \Omega + 7 \Omega + 3 \Omega)I_1 - (7 \Omega)I_2 - (3 \Omega)I_3 = 0 \text{ V}$$

Para I_1 tenemos:

$$(17 \Omega)I_1 - (7 \Omega)I_2 - (3 \Omega)I_3 = 0 \text{ V} \quad (4.13)$$

Para I_2 tenemos:

$$\sum V_{trayectoria} = 0 \text{ V}$$

$$9 \text{ V} - (7 \Omega)I_1 + (6 \Omega + 4 \Omega + 7 \Omega)I_2 - (4 \Omega)I_4 = 0 \text{ V}$$

$$-(7 \Omega)I_1 + (17 \Omega)I_2 - (4 \Omega)I_4 = -9 \text{ V} \quad (4.14)$$

Para I_3 tenemos:

$$\sum V_{trayectoria} = 0 \text{ V}$$

$$-7 \text{ V} - (3 \Omega)I_1 + (3 \Omega + 10 \Omega)I_3 - (10 \Omega)I_4 = 0 \text{ V}$$

$$-(3 \Omega)I_1 + (13 \Omega)I_3 - (10 \Omega)I_4 = 7 \text{ V} \quad (4.15)$$

Para I_4 tenemos:

$$\sum V_{trayectoria} = 0 \text{ V}$$

$$5 \text{ V} - (4 \Omega)I_2 - (10 \Omega)I_3 + (10 \Omega + 4 \Omega)I_4 = 0 \text{ V}$$

$$-(4 \Omega)I_2 - (10 \Omega)I_3 + (14 \Omega)I_4 = -5 \text{ V} \quad (4.16)$$

Agrupamos y acomodamos las ecuaciones (4.13), (4.14), (4.15) y (4.16) para formar un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. De igual manera, y para mayor facilidad a la hora de hacer los cálculos, se omiten las unidades en la representación del sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} 17I_1 - 7I_2 - 3I_3 &= 0 & Ec(I) \\ -7I_2 + 17I_3 - 4I_4 &= -9 & Ec(II) \\ -3I_1 + 13I_3 - 10I_4 &= 7 & Ec(III) \\ -4I_2 - 10I_3 + 14I_4 &= -5 & Ec(IV) \end{aligned}$$

Para resolver el sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas únicamente utilizamos la *app System of Linear Equations Solver*, ya que aplicar cualquiera de los métodos matemáticos conocidos nos resultaría muy tardado.

| ← System of Linear Equations Solver | | | | |
|-------------------------------------|----|-----|-----|-------|
| x | y | z | t | total |
| 17 | -7 | -3 | 0 | 0 |
| -7 | 17 | 0 | -4 | -9 |
| -3 | 0 | 13 | -10 | 7 |
| 0 | -4 | -10 | 14 | -5 |

| | |
|-------|------|
| $y =$ | 6233 |
| $z =$ | 215 |
| $t =$ | -303 |
| | 542 |

| | |
|-------|----------------------|
| $x =$ | -0.32039146478421364 |
| $y =$ | -0.7928766244184181 |
| $z =$ | 0.034493823199101555 |
| $t =$ | -0.559040590405904 |

$$I_1 = -0.320,39 \text{ A}$$

$$I_2 = -0.792,876 \text{ A}$$

$$I_3 = +0.034,493 \text{ A}$$

$$I_4 = -0.559,040 \text{ A}$$

Figura 4.13. Solución del sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas con el *System of Linear Equations Solver*.

MALLAS CON FUENTES DE CORRIENTE

Ejemplo 4-5. Calcular las corrientes de malla en el circuito de la Figura 4.14.

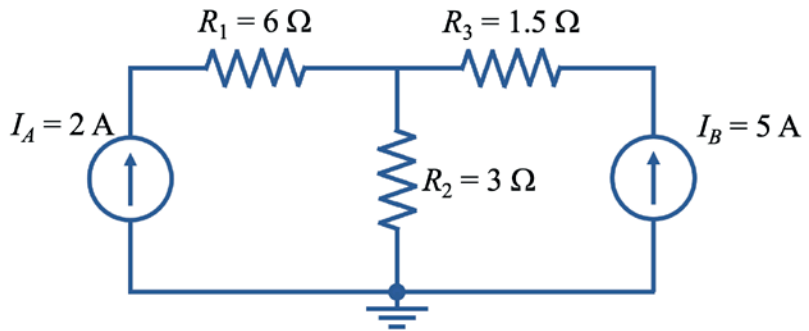


Figura 4.14. Circuito de dos mallas con fuentes de corriente.

Respuesta.

En el análisis con mallas, un circuito con fuentes de corriente no es realmente un problema ya que la información que se pide ¡ya está presente!, y por lo tanto no hay nada que resolver. Si seguimos los pasos que se explicaron al principio del capítulo, nos daremos cuenta de que las fuentes de corriente son en realidad las corrientes de malla que estamos buscando. Esto lo notamos al momento de identificar las mallas y nombrarlas como lo hicimos para todos los problemas anteriores, tal como se muestra en la Figura 4.15.

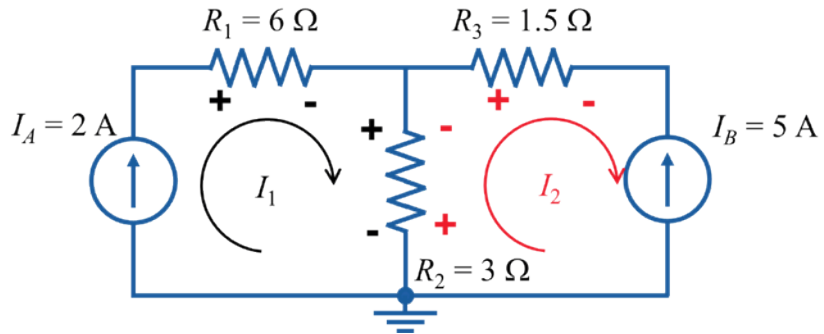


Figura 4.15. Identificación de las corrientes en circuito con fuentes de corriente.

Si observamos con detenimiento la Figura 4.15 se marcan las corrientes I_1 e I_2 y notamos que la corriente I_1 es exactamente la misma que está indicada por I_A , incluso tienen el mismo sentido. Por lo tanto, es válido establecer la igualdad entre ambas corrientes tal como se indica en la ecuación (4.17).

$$I_1 = I_A = 2 \text{ A} \quad (4.17)$$

Para el caso de la corriente I_2 ocurre algo semejante, ya que la corriente de la fuente I_B sigue la misma trayectoria en la malla, sólo que lo hace en dirección opuesta a la corriente marcada como I_2 . Entonces, la corriente I_2 es opuesta a la corriente I_B , por lo que ambas corrientes se relacionan con la misma magnitud, pero con signo contrario tal, como se establece en la ecuación (4.18).

$$I_2 = -I_B = -5 \text{ A} \quad (4.18)$$

De este modo no hay nada que calcular, sólo identificar si las corrientes tienen el mismo sentido e indicar los valores que corresponden.

Ejemplo 4-6. Calcular las corrientes de malla del circuito de la Figura 4.16.

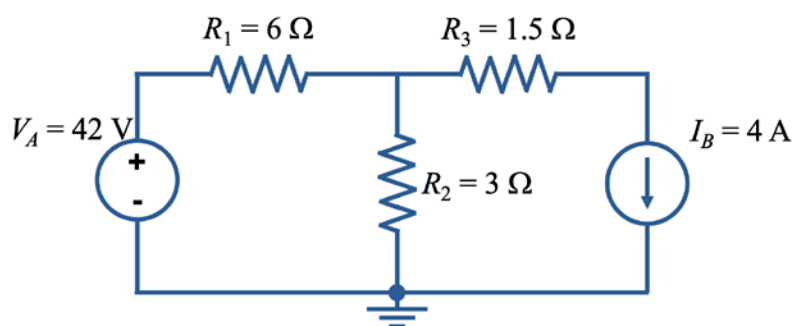


Figura 4.16. Circuito con fuente de voltaje y fuente de corriente.

Respuesta.

Para resolver el circuito, identificamos las corrientes, las marcamos y colocamos los signos de voltaje para las resistencias, tal como se muestra en la Figura 4.17. En el circuito se observa que ahora se tiene una combinación de una fuente de voltaje con una fuente de corriente conectadas con las resistencias. Al igual que en el problema anterior, ya se conoce una de las dos corrientes, la corriente I_2 que ahora sí coincide completamente con la corriente I_B , tanto en dirección como en el mismo sentido, por lo tanto:

$$I_2 = I_B = 4 \text{ A} \quad (4.19)$$

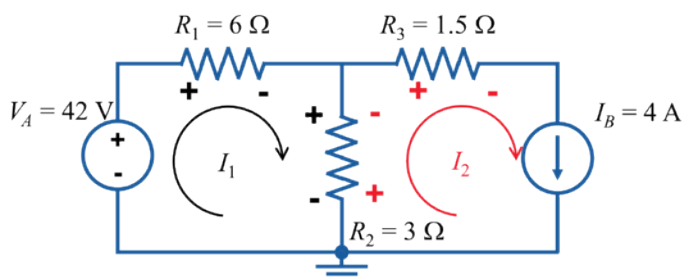


Figura 4.17. Corrientes y signos de voltaje para el circuito con fuente de voltaje y fuente de corriente.

Entonces, a pesar de que se tienen dos mallas, sólo se tiene una incógnita, la corriente I_1 .

Para calcularla, se plantea con la ley de voltajes de Kirchhoff la ecuación para la malla de I_1 quedando.

Entonces, para I_1 tenemos:

$$\sum V_{trayectoria} = 0 \text{ V}$$

$$-42 \text{ V} + (6 \Omega + 3 \Omega)I_1 - (3 \Omega)I_2 = 0 \text{ V}$$

$$(9 \Omega)I_1 - (3 \Omega)I_2 = 42 \text{ V} \quad (4.20)$$

De la ecuación (4.19) sustituimos el valor de la corriente I_2 y despejamos el valor de I_1 para quedar.

$$(9 \Omega)I_1 - (3 \Omega)(4 \text{ A}) = 42 \text{ V}$$

$$(9 \Omega)I_1 - 12 \text{ V} = 42 \text{ V}$$

$$(9 \Omega)I_1 = 42 \text{ V} + 12 \text{ V}$$

$$(9 \Omega)I_1 = 54 \text{ V}$$

$$I_1 = \frac{54 \text{ V}}{9 \Omega}$$

Calculamos I_1 para quedar.

$$I_1 = 6 \text{ A}$$

De esta manera, rápida y sencilla, se calcula el valor de la corriente faltante, en este caso de la corriente I_1 .

Ejemplo 4-7. Calcular las corrientes de malla que se presentan en el circuito de la Figura 4.18.

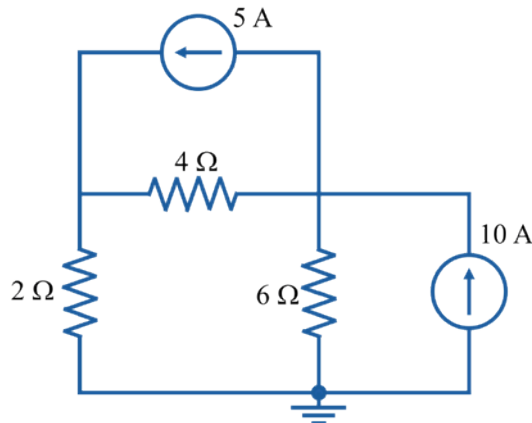


Figura 4.18. Circuito con tres mallas y dos fuentes de corriente.

Respuesta.

De la Figura 4.18 observamos que se trata de un circuito con tres mallas, por lo que es lógico esperar tres ecuaciones con tres incógnitas. Sin embargo, al revisar el circuito con mayor detenimiento, podemos observar que las dos fuentes de corriente definen directamente dos de las tres corrientes que estaríamos buscando y, por lo tanto, sólo faltaría calcular una corriente más.

Es muy importante observar que cada fuente de corriente está localizada en una rama en el perímetro del circuito y, si esto ocurre, entonces cada fuente de corriente define el valor de la corriente de la malla en la que se encuentra ubicada.

De acuerdo con lo anterior, y a partir de la Figura 4.19, en la que se indican los nombres de las mallas y los signos de voltaje para las resistencias, podemos apreciar que la corriente de 5 A define el valor para la corriente de la malla I_1 . En este caso, la corriente de 5 A tiene dirección opuesta a la que hemos definido para la corriente I_1 , por lo tanto, la corriente de malla será negativa, como se indica en la ecuación (4.21).

$$I_1 = -5 \text{ A} \quad (4.21)$$

De esta manera, queda definido de inmediato el valor para la corriente I_1 y sucede exactamente lo mismo para la corriente I_3 , ya que la corriente que se ha definido para la malla es opuesta a la dirección de la corriente en la fuente de 10 A y por lo tanto queda como se indica en la ecuación (4.22).

$$I_3 = -10 \text{ A} \quad (4.22)$$

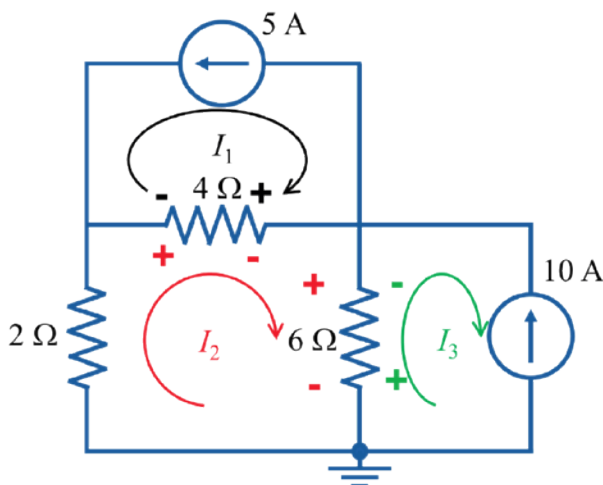


Figura 4.19. Corrientes y signos de voltaje para las mallas en el circuito.

Sólo resta calcular la corriente I_2 y ésta se calcula construyendo la ecuación de la malla con la ley de voltajes de Kirchhoff tal como se muestra a continuación.

Entonces, para I_2 tenemos:

$$\begin{aligned}\sum V_{trayectoria} &= 0 \text{ V} \\ -(4 \Omega)I_1 + (2 \Omega + 4 \Omega + 6 \Omega)I_2 - (6 \Omega)I_3 &= 0 \text{ V} \\ -(4 \Omega)I_1 + (12 \Omega)I_2 - (6 \Omega)I_3 &= 0 \text{ V} \quad (4.23)\end{aligned}$$

En la ecuación (4.23) sustituimos el valor de la corriente I_1 y de la corriente I_3 para despejar el de I_2 para quedar.

$$\begin{aligned}-(4 \Omega)(-5 \text{ A}) + (12 \Omega)I_2 - (6 \Omega)(-10 \text{ A}) &= 0 \text{ V} \\ 20 \text{ V} + (12 \Omega)I_2 + 60 \text{ V} &= 0 \text{ V} \\ (12 \Omega)I_2 + 80 \text{ V} &= 0 \text{ V} \\ (12 \Omega)I_2 &= -80 \text{ V} \\ I_2 &= \frac{-80 \text{ V}}{12 \Omega}\end{aligned}$$

Calculamos I_2 para quedar:

$$\boxed{I_2 = -6.66 \text{ A}}$$

El signo negativo de la corriente indica que la corriente positiva realmente está circulando en dirección opuesta a la dibujada en la Figura 4.19. De esta manera, rápida y sencilla, se calcula el valor de la corriente faltante, es decir, de la corriente I_2 . En este caso, el hecho de que cada fuente de corriente estuviera ubicada en el perímetro del circuito facilitó el problema al utilizar la técnica de análisis con mallas.

FUENTE DE CORRIENTE Y SUPERMALLA

Una Supermalla es una trayectoria cerrada que contiene a más de una malla. La única restricción para su construcción es que se debe formar en el circuito a través de trayectorias cerradas en la que sólo existan fuentes de voltaje y/o resistencias. En un circuito puede haber más de una Supermalla pero normalmente sólo se utiliza alguna de ellas.

Cuando una fuente de corriente se está compartiendo entre dos mallas, entonces la fuente de corriente establecerá una ecuación entre ambas mallas condicionándolas al valor de la misma fuente de corriente.

Dicho de otra forma, la suma o la resta de las corrientes de malla, deberá ser igual al valor de la fuente de corriente. La forma de determinar si las corrientes se suman o se restan se muestra en la Figura 4.20. Ahí se observa que, de acuerdo con la dirección de la corriente de la fuente y de la dirección de las corrientes de malla, éstas se suman o se restan.

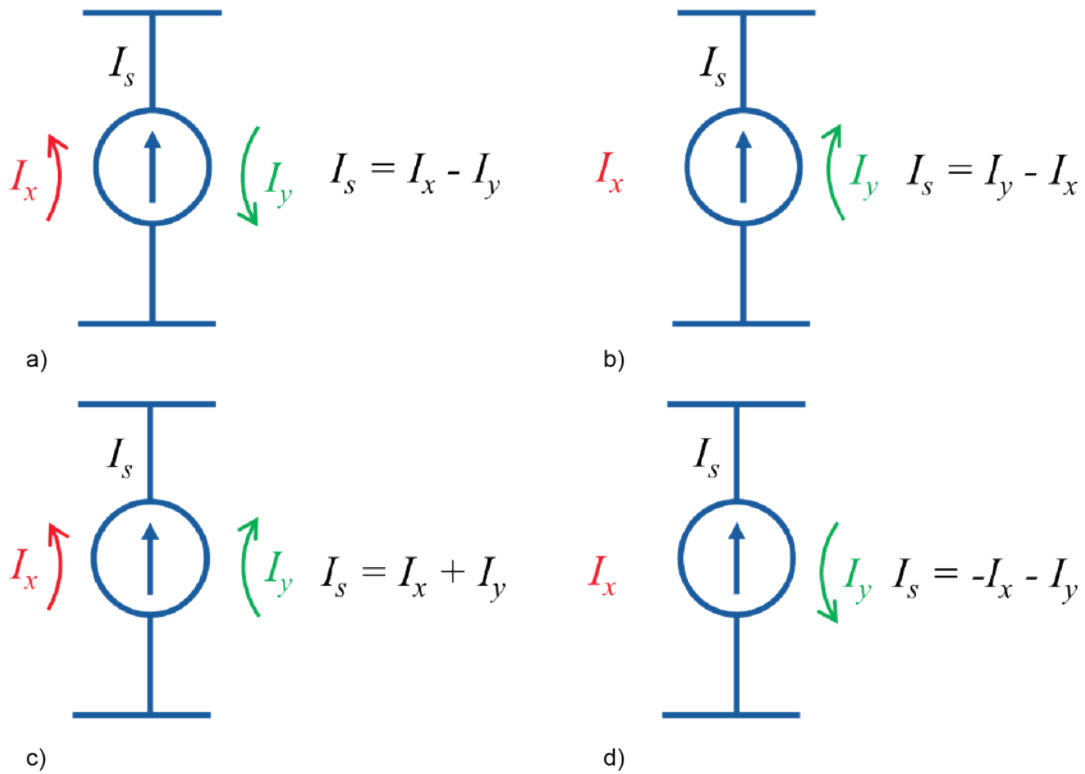


Figura 4.20. Fuente de corriente con distintas combinaciones de dirección en las corrientes de las mallas.

Cada fuente de corriente que se comparta entre dos mallas establecerá una ecuación que deberá formar parte del sistema de ecuaciones para resolver el problema. Para completar el sistema de ecuaciones del problema, será necesario utilizar al menos una “Supermalla”.

Todo lo anterior queda explicado con los ejemplos que se muestran a continuación, en ellos es necesario aplicar Supermallas para poder resolver los circuitos.

Ejemplo 4-8. Calcular las corrientes de malla que se presentan en el circuito de la Figura 4.21.

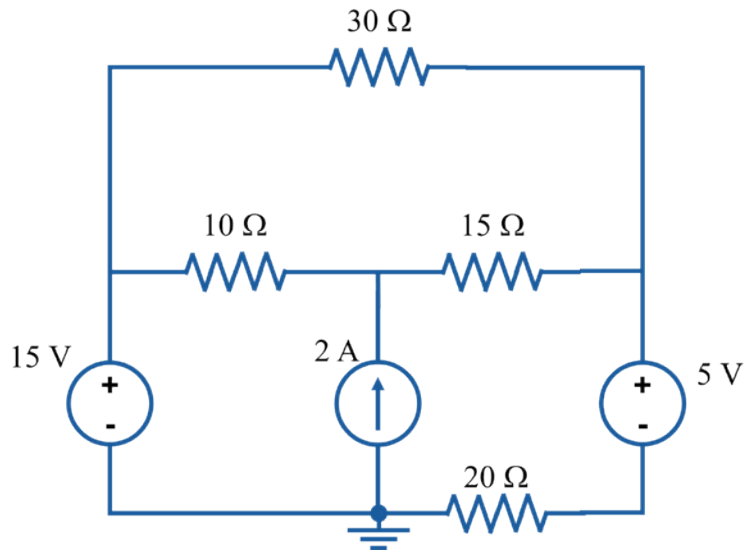


Figura 4.21. Circuito que se resuelve utilizando “Supermallas”.

Observamos que el circuito del problema es un circuito aparentemente común, tal como los hemos estado resolviendo hasta ahora. Podemos observar que se tienen tres mallas en el circuito, que están presentes dos fuentes de voltaje y una fuente de corriente. En los problemas anteriores, la presencia de una fuente de corriente, utilizando el análisis con mallas, resultaba benéfica porque su valor era directamente el de la corriente de malla. Sin embargo, en este caso no ocurre lo mismo debido a que no podemos asociar directamente el valor de la fuente de corriente únicamente con una sola malla. Es por ello, que será necesario resolver el problema haciendo uso de “Supermallas”.

Respuesta.

Para comenzar a resolver el problema, seguiremos los mismos pasos utilizados en los anteriores. La diferencia radicará al momento de formular las ecuaciones, ya que será necesario obtener la ecuación que resulta de la fuente de corriente entre las dos mallas, y la cual formará parte del sistema de ecuaciones a resolver. La otra diferencia también se presenta con las ecuaciones, ya que será necesario utilizar al menos una Supermalla para poder completar el sistema de ecuaciones y poder resolver el problema.

En la Figura 4.22 se muestra una propuesta de cómo asignar las corrientes en el circuito y los signos para los voltajes en las resistencias.

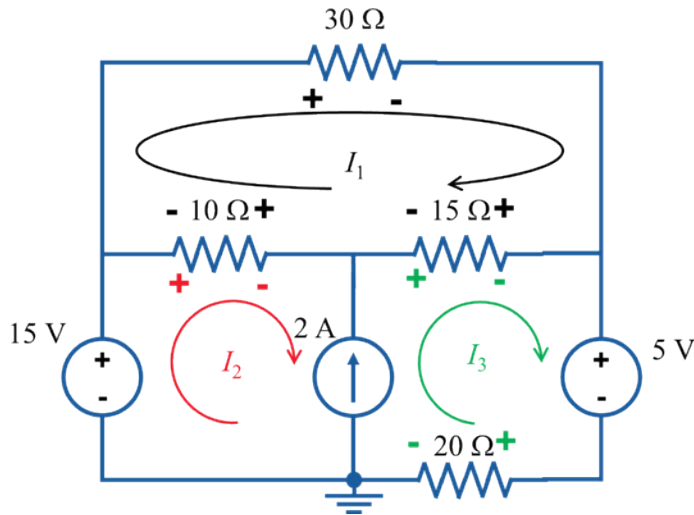


Figura 4.22. Asignación de corrientes y signos de voltaje para el problema que se resolverá con “Supermallas”.

Se puede construir la ecuación que corresponde para la malla de I_1 quedando.

$$\sum V_{trayectoria} = 0 \text{ V}$$

$$(30 \Omega + 15 \Omega + 10 \Omega)I_1 - (10 \Omega)I_2 - (15 \Omega)I_3 = 0 \text{ V}$$

$$(55 \Omega)I_1 - (10 \Omega)I_2 - (15 \Omega)I_3 = 0 \text{ V} \quad (4.24)$$

Sin embargo, no es posible obtener una ecuación para la malla de I_2 o para la malla de I_3 ya que no sabemos cuál es el voltaje ni las terminales de la fuente de corriente de 2 A. Entonces, lo que se debe hacer primero es obtener la ecuación que resulta de la fuente de corriente de 2 A que se encuentra entre las dos mallas. De acuerdo con la Figura 4.20b, la corriente de 2 A tiene la misma dirección que la corriente I_3 , por lo tanto, la ecuación de la fuente de corriente queda como lo establece la ecuación (4.25).

$$I_3 - I_2 = 2 \text{ A}$$

$$-I_2 + I_3 = 2 \text{ A} \quad (4.25)$$

De este modo, ya tenemos dos ecuaciones, pero de tres incógnitas, por lo tanto, es necesario obtener una tercera ecuación para completar el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas y poderlo resolver.

Es aquí donde aparecen las “Supermallas”, si observamos con detenimiento el circuito de la Figura 4.21, nos damos cuenta de que se pueden trazar dos trayectorias cerradas (Supermallas # 1 y # 2), adicionales a las mallas de las corrientes I_1 , I_2 e I_3 , y en las que sólo aparecen fuentes de voltaje o resistencias, tal como se muestra en la Figura 4.23.

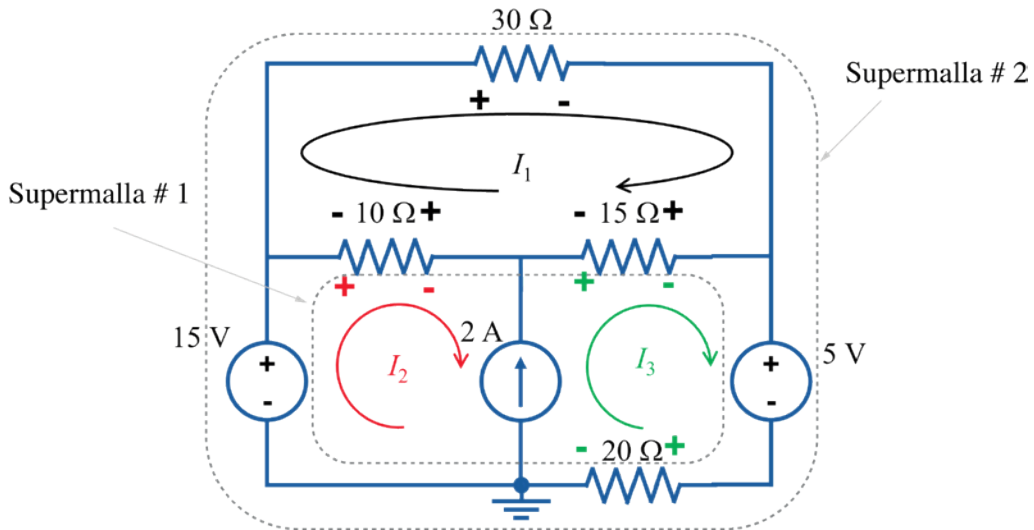


Figura 4.23. Identificación de “Supermallas” en el circuito.

De cada una de las “Supermallas” se puede obtener una ecuación aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff (LVK). Cualquiera de las ecuaciones que se obtenga se puede agregar a las ecuaciones (4.24) y (4.25) para completarlas y poder así calcular las corrientes. Incluso se pueden obtener las dos Supermallas y agruparse con la ecuación (4.25), ésta no puede quedar, por ningún motivo, fuera del sistema de ecuaciones, ya que es la condición de corriente que se debe cumplir en el circuito entre las mallas de I_2 e I_3 .

A continuación, obtenemos la ecuación para cada una de las “Supermallas”, quedando:

Supermalla # 1

$$\sum V_{trayectoria} = 0 \text{ V}$$

$$-15 \text{ V} + (10 \Omega)(I_2 - I_1) + (15 \Omega)(I_3 - I_1) + 5 \text{ V} + (20 \Omega)I_3 = 0 \text{ V}$$

$$(10 \Omega)I_2 - (10 \Omega)I_1 + (15 \Omega)I_3 - (15 \Omega)I_1 + (20 \Omega)I_3 = 10 \text{ V}$$

$$-(25 \Omega)I_1 + (10 \Omega)I_2 + (35 \Omega)I_3 = 10 \text{ V} \quad (4.26)$$

Supermalla # 2

$$\sum V_{trayectoria} = 0 \text{ V}$$

$$-15 \text{ V} + (30 \Omega)I_1 + 5 \text{ V} + (20 \Omega)I_3 = 0 \text{ V}$$

$$(30 \Omega)I_1 + (20 \Omega)I_3 = 10 \text{ V} \quad (4.27)$$

De esta manera quedan definidas las ecuaciones de las “Supermallas” y ya con ellas se puede terminar de resolver el problema.

Agrupamos las ecuaciones (4.24), (4.25) y (4.26) para formar un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. De igual mane-

ra, y para mayor facilidad a la hora de hacer los cálculos, se omiten las unidades en la representación del sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} 55I_1 - 10I_2 - 15I_3 &= 0 & Ec(I) \\ -I_2 + I_3 &= 2 & Ec(II) \\ -25I_1 + 10I_2 + 35I_3 &= 10 & Ec(III) \end{aligned}$$

Para resolver el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas utilizamos la *app System of Linear Equations Solver* que muestra los resultados de las corrientes en la Figura 4.24.

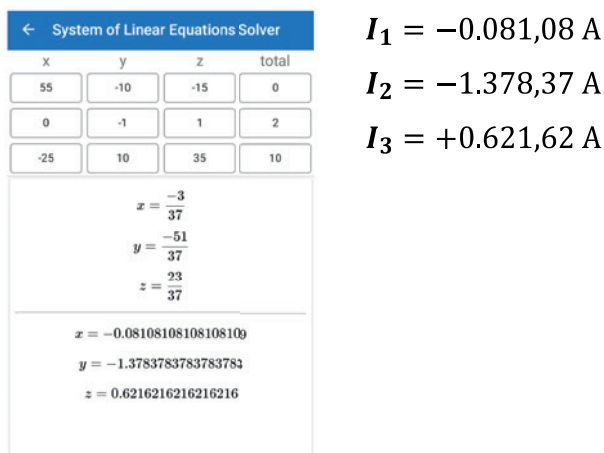
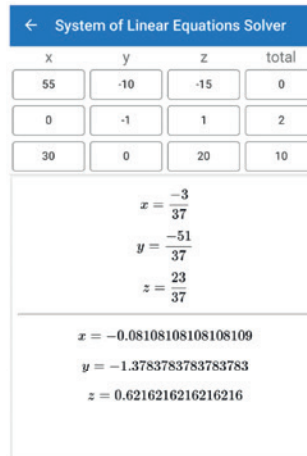


Figura 4.24. Solución del sistema de ecuaciones para el problema con “Supermallas”.

De la misma manera, otro sistema de ecuaciones pudo haber quedado integrado con las ecuaciones (4.24), (4.25) y (4.27) para formar un segundo sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. De igual manera, y para mayor facilidad a la hora de hacer los cálculos, se omiten las unidades en la representación del sistema de ecuaciones quedando.

$$\begin{aligned} 55I_1 - 10I_2 - 15I_3 &= 0 & Ec(I) \\ -I_2 + I_3 &= 2 & Ec(II) \\ 30I_1 + 20I_3 &= 10 & Ec(IV) \end{aligned}$$

Para resolver el segundo sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas utilizamos la *app System of Linear Equations Solver*, que muestra los resultados de las corrientes en la Figura 4.25.



$$I_1 = -0.081,08 \text{ A}$$

$$I_2 = -1.378,37 \text{ A}$$

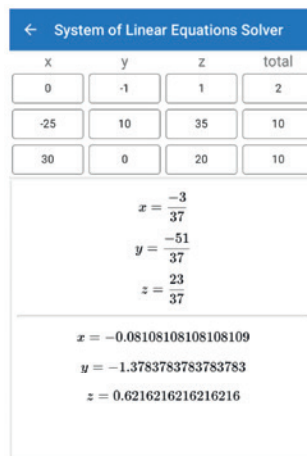
$$I_3 = +0.621,62 \text{ A}$$

Figura 4.25. Solución del segundo sistema de ecuaciones para el problema con "Supermallas".

Incluso, tal como lo mencioné con anterioridad, se puede construir un tercer sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, elaborado con la ecuación (4.25) de la fuente de corriente de 2 A y con las ecuaciones (4.26) y (4.27) de las "Supermallas". De igual manera, y para mayor facilidad a la hora de hacer los cálculos, se omiten las unidades en la representación del sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned}
 -I_2 + I_3 &= 2 \quad Ec(II) \\
 -25I_1 + 10I_2 + 35I_3 &= 10 \quad Ec(III) \\
 30I_1 + 20I_3 &= 10 \quad Ec(IV)
 \end{aligned}$$

Para resolver el tercer sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas utilizamos la *app* *System of Linear Equations Solver* que muestra los resultados de las corrientes en la Figura 4.26.



$$I_1 = -0.081,08 \text{ A}$$

$$I_2 = -1.378,37 \text{ A}$$

$$I_3 = +0.621,62 \text{ A}$$

Figura 4.26. Solución del tercer sistema de ecuaciones para el problema con "Supermallas".

Obsérvese que los tres sistemas de ecuaciones con tres incógnitas nos dieron por resultado los mismos valores de corrientes, lo cual nos indica que se puede hacer cualquier combinación para resolver el problema siempre y cuando se incluya la ecuación de la fuente de corriente de 2 A.

NOTA: Si alguien se pregunta qué pasaría si no se incluye la ecuación de la fuente de corriente de 2 A, entonces lo invito a que evalúe el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que resulta sin incluirla para, observar los resultados que se obtienen y que saque sus propias conclusiones.

El sistema de ecuaciones sin incluir la ecuación de la fuente de corriente se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} 55I_1 - 10I_2 - 15I_3 &= 0 & Ec(I) \\ -25I_1 + 10I_2 + 35I_3 &= 10 & Ec(III) \\ 30I_1 &+ 20I_3 &= 10 & Ec(IV) \end{aligned}$$

Ejemplo 4-9. Calcular las corrientes de malla que se presentan en el circuito de la Figura 4.27.

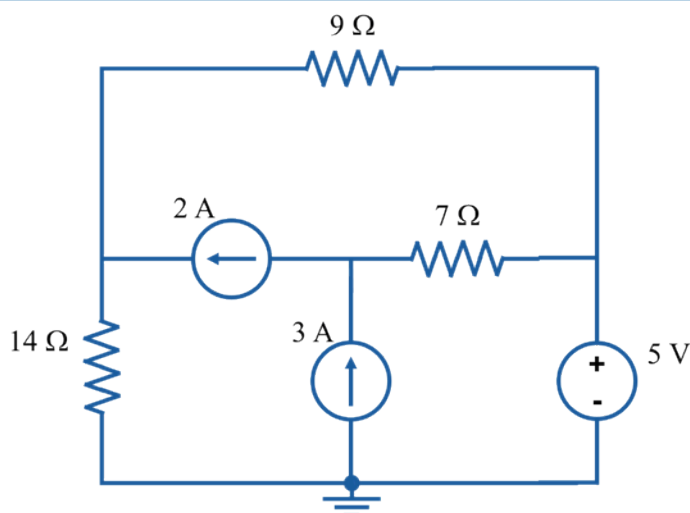


Figura 4.27. Circuito que se resuelve utilizando “Supermallas”.

Podemos observar que se tienen tres mallas en el circuito, que están presentes dos fuentes de corriente y una fuente de voltaje. Ambas fuentes de corriente se encuentran ubicadas entre dos mallas cada una, por lo tanto, cada una de ellas tendrá su propia ecuación de corriente para el sistema de ecuaciones resultante. Entonces, en este problema también será necesario utilizar “Supermallas”.

Respuesta.

En la Figura 4.28 se muestra una propuesta de cómo asignar las corrientes en el circuito y los signos para los voltajes en las resistencias.

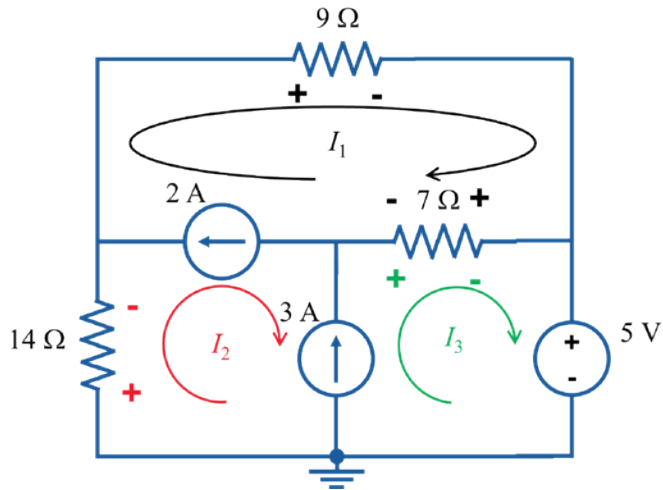


Figura 4.28. Asignación de corrientes y signos de voltaje para el problema que se resolverá con “Supermallas”.

Nótese que no es posible aplicar la ley de voltajes de Kirchhoff para ninguna malla ya que en las tres se encuentra la presencia de al menos una fuente de corriente, pero que no es la corriente de la malla por no estar en el perímetro del circuito.

Entonces, lo que se debe hacer primero es obtener la ecuación que resulta de cada una de las fuentes de corriente que se encuentran entre dos mallas en el circuito.

Para la fuente de corriente de 2 A resulta:

De acuerdo con la Figura 4.20b, la corriente de 2 A tiene la misma dirección que la corriente I_1 , por lo tanto, la ecuación de la fuente de corriente queda como lo establece la ecuación (4.28).

$$I_1 - I_2 = 2 \text{ A} \quad (4.28)$$

Para la fuente de corriente de 3 A resulta:

De acuerdo con la Figura 4.20b, la corriente de 3 A tiene la misma dirección que la corriente I_B , por lo tanto, la ecuación de la fuente de corriente queda como lo establece la ecuación (4.29).

$$\begin{aligned} I_3 - I_2 &= 3 \text{ A} \\ -I_2 + I_3 &= 3 \text{ A} \end{aligned} \quad (4.29)$$

De este modo, ya tenemos dos ecuaciones, pero de tres incógnitas, por lo tanto, es necesario obtener una tercera ecuación para completar el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas y poderlo resolver.

La tercera ecuación corresponderá a la ecuación de la única “Supermalla” que se puede trazar en el circuito. En la Figura 4.29 se muestra la trayectoria de la “Supermalla” que se puede construir en el circuito del problema. Observemos que la supermalla se construye a lo largo de todo el perímetro del circuito porque sólo hay fuentes de voltaje y resistencias.

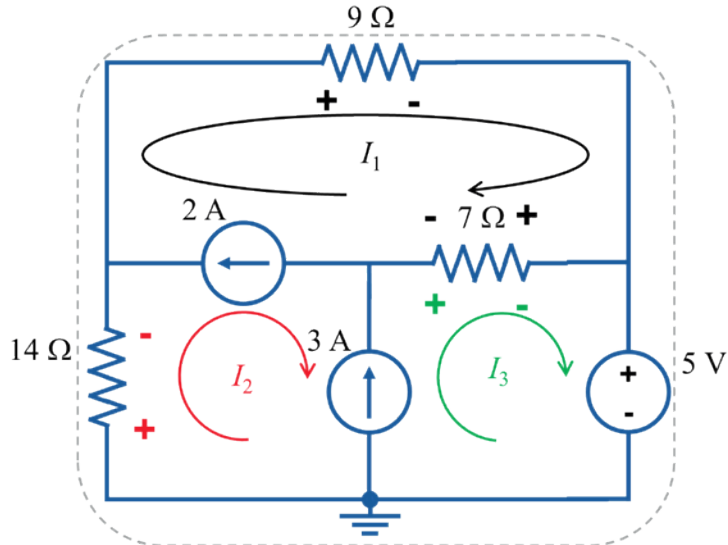


Figura 4.29. Circuito con una sola “Supermalla”.

Para obtener la ecuación de la “Supermalla”, aplicamos la ley de voltajes de Kirchhoff (LVK) a lo largo de toda la trayectoria cerrada, resultando:
Supermalla

$$\sum V_{trayectoria} = 0 \text{ V}$$

$$(9 \Omega)I_1 + 5 \text{ V} + (14 \Omega)I_2 = 0 \text{ V}$$

$$(9 \Omega)I_1 + (14 \Omega)I_2 = -5 \text{ V} \quad (4.30)$$

Agrupamos las ecuaciones (4.28), (4.29) y (4.30) para formar un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. De igual manera, y para mayor facilidad a la hora de hacer los cálculos, se omiten las unidades en la representación del sistema de ecuaciones.

$$\begin{array}{rcl} I_1 & -I_2 & = 2 \quad Ec(I) \\ & -I_2 + I_3 & = 3 \quad Ec(II) \\ 9I_1 & +14I_2 & = -5 \quad Ec(III) \end{array}$$

Resolvemos el sistema utilizando la regla de Cramer.

$$Det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 9 & 14 & 0 \end{vmatrix} = [(0) + (0) + (-9)] - [(0) + (14) + (0)]$$

$$\boxed{Det(A) = -23}$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ -5 & 14 & 0 \end{vmatrix}}{Det(A)} = \frac{[(0) + (0) + (5)] - [(0) + (28) + (0)]}{-23}$$

$$\boxed{I_1 = \frac{-23}{-23} = 1 \text{ A}}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 9 & -5 & 0 \end{vmatrix}}{Det(A)} = \frac{[(0) + (0) + (18)] - [(0) + (0) + (-5)]}{-23}$$

$$\boxed{I_2 = \frac{23}{-23} = -1 \text{ A}}$$

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 9 & 14 & -5 \end{vmatrix}}{Det(A)} = \frac{[(5) + (0) + (-27)] - [(-18) + (0) + (42)]}{-23}$$

$$\boxed{I_3 = \frac{-46}{-23} = 2 \text{ A}}$$

Reescribimos el sistema de ecuaciones, pero para resolverlo ahora con el método de Gauss-Jordan quedando.

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 &= 2 & Ec(I) \\ -I_2 + I_3 &= 3 & Ec(II) \\ 9I_1 + 14I_2 &= -5 & Ec(III) \end{aligned}$$

Escribimos la matriz ampliada y comenzamos a reducirla hasta obtener los valores de las corrientes.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 9 & 14 & 0 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 0 & 2 \\ 9 & 14 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{-9F_1 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 23 & 0 & -23 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{23} F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 + F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 + F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} I_1 = 1 \text{ A} \\ I_2 = -1 \text{ A} \\ I_3 = 2 \text{ A} \end{cases}$$

Reescribimos el sistema de ecuaciones, pero ahora para resolverlo con la *app System of Linear Equations Solver*.

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 &= 2 & Ec(I) \\ -I_2 + I_3 &= 3 & Ec(II) \\ 9I_1 + 14I_2 &= -5 & Ec(III) \end{aligned}$$

Los resultados de las corrientes se muestran en la Figura 4.30.

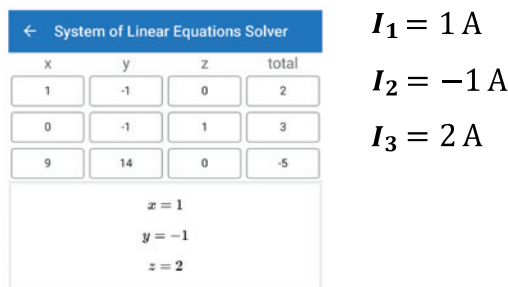


Figura 4.30. Solución del sistema de ecuaciones para el problema con “Supermallas”.

CIRCUITOS CON MALLAS Y FUENTES DEPENDIENTES

Hasta el momento se han resuelto distintos ejercicios con diferentes características para aplicar la técnica del análisis con mallas. Sólo nos falta hacer ejemplos en los que se involucren fuentes dependientes.

Para resolver problemas en los que aparezcan fuentes dependientes, se aplica exactamente lo mismo que se ha aplicado para los ejercicios anteriores. El tratamiento que se les dará a las fuentes dependientes será igual al que se les dio a las fuentes independientes, es decir, en una trayectoria cerrada o malla se podrán sumar o restar fuentes de voltaje dependientes, y si una fuente de corriente dependiente aparece en el perímetro del circuito, ésta será igual al valor de la corriente de la malla. Lo mismo ocurrirá si una fuente de corriente dependiente se encuentra entre dos mallas, ésta se tendrá que analizar para generar una ecuación que involucre las dos corrientes de malla y se deberán utilizar “Supermallas”.

A continuación, se presentan algunos ejemplos en los que se incluyen fuentes dependientes y que se resolverán utilizando la técnica de mallas.

Ejemplo 4-10. Utilizando análisis con mallas, resolver el circuito de la Figura 4.31 y calcular las corrientes de malla.

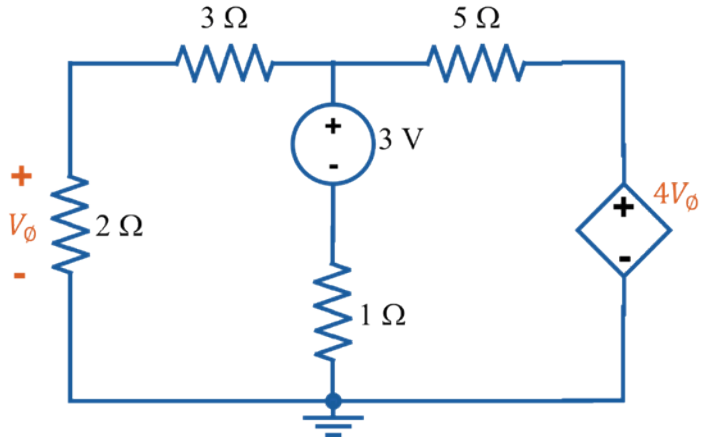


Figura 4.31. Circuito de dos mallas con fuentes dependientes.

Respuesta.

Se trata de un circuito sencillo con dos mallas, en el que está incluida una fuente de voltaje dependiente de voltaje. Recordemos que la fuente dependiente es sólo una fuente cuyo valor depende de otro valor que se encuentra en el circuito. En este caso, el valor de la fuente dependiente vale cuatro veces el valor del voltaje de la resistencia de 2Ω y con la polaridad indicada por V_ϕ .

Lo primero que tenemos que hacer para comenzar a resolver el ejercicio, es definir la dirección de las corrientes de las dos mallas y los signos de voltaje que cada una de estas corrientes impone para las resistencias. Estos signos de voltaje son los que nos ayudarán a definir el valor de V_ϕ y de este modo poder sustituirlo en la fuente dependiente. En la Figura 4.32 se proponen las corrientes y los signos para todas las resistencias del circuito del problema.

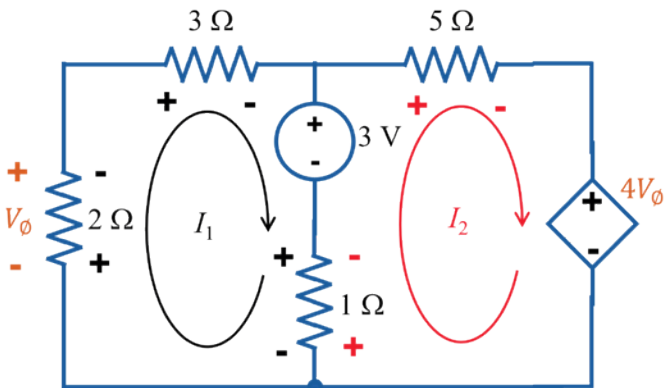


Figura 4.32. Dirección de la corriente y colocación de signos para circuito con mallas y fuente dependiente.

Una vez que tenemos los signos del voltaje en las resistencias, definimos el valor de V_ϕ en términos de la resistencia de 2Ω y de la corriente que pasa a través de ella, en este caso I_1 . Entonces, de acuerdo con la ley de Ohm y con los signos que presenta V_ϕ y los signos de voltaje que tiene la resistencia de 2Ω por la corriente I_1 , el voltaje V_ϕ queda definido como se indica en la ecuación (4.31).

$$V_\phi = -(2 \Omega)I_1 \quad (4.31)$$

El voltaje es negativo porque los signos de la resistencia y los signos de V_ϕ son opuestos entre sí.

Una vez que se tiene definido el valor de V_ϕ , entonces se puede proceder para obtener la ecuación en cada una de las mallas de la misma manera que se han obtenido para todos los ejercicios previos.

Entonces, para I_1 tenemos:

$$\begin{aligned} \sum V_{trayectoria} &= 0 \text{ V} \\ (2 \Omega + 3 \Omega + 1 \Omega)I_1 + 3 \text{ V} - (1 \Omega)I_2 &= 0 \text{ V} \\ (6 \Omega)I_1 - (1 \Omega)I_2 &= -3 \text{ V} \end{aligned} \quad (4.32)$$

Entonces, para I_2 tenemos:

$$\begin{aligned} \sum V_{trayectoria} &= 0 \text{ V} \\ (5 \Omega + 1 \Omega)I_2 - (1 \Omega)I_1 - 3 \text{ V} + 4V_\phi &= 0 \text{ V} \end{aligned}$$

De la ecuación (4.31) sustituimos el valor de V_ϕ y simplificamos.

$$\begin{aligned} (5 \Omega + 1 \Omega)I_2 - (1 \Omega)I_1 - 3 \text{ V} + 4[-(2 \Omega)I_1] &= 0 \text{ V} \\ (6 \Omega)I_2 - (1 \Omega)I_1 - 3 \text{ V} - (8 \Omega)I_1 &= 0 \text{ V} \\ -(9 \Omega)I_1 + (6 \Omega)I_2 &= 3 \text{ V} \end{aligned} \quad (4.33)$$

Agrupamos la ecuación (4.32) y la ecuación (4.33) para formar un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Para mayor facilidad a la hora de hacer los cálculos, se omiten las unidades en la representación del sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 6I_1 - 9I_2 = -3 \\ -9I_1 + 6I_2 = 3 \end{cases} \begin{cases} Ec(I) \\ Ec(II) \end{cases} \begin{array}{l} \text{Dos ecuaciones} \\ \text{con dos incógnitas} \end{array}$$

Utilizamos el método de suma o resta para resolver el sistema. Multiplicamos la $Ec(I)$ por un factor de 6 y resulta:

$$\begin{aligned} [6I_1 \quad -I_2 = -3](6) & \quad Ec(I)^* \\ 36I_1 \quad -6I_2 = -18 & \quad Ec(I)^* \end{aligned}$$

Sumamos la ecuación que resulta con la Ec (I) y queda.

$$\begin{array}{rcl} 36I_1 & \cancel{-6I_2} & = -18 \quad Ec(I)^* \\ -9I_1 & \cancel{+6I_2} & = 3 \quad Ec(II) \\ \hline 27I_1 & & = -15 \end{array}$$

De la ecuación resultante despejamos la corriente I_1 .

$$I_1 = \frac{-15}{27}$$

$$\boxed{I_1 = -0.555,5 \text{ A}}$$

Sustituimos el valor de I_1 en la Ec (I) o en la Ec (II) para después despejar el valor de I_2 , en este caso lo hacemos para la Ec (I) obteniendo.

$$6I_1 - I_2 = -3$$

$$6(-0.555,5) - I_2 = -3$$

$$-3.333 - I_2 = -3$$

$$-I_2 = -3 + 3.333$$

$$-I_2 = -3 + 3.333$$

$$-I_2 = 0.333$$

$$\boxed{I_2 = -0.333 \text{ A}}$$

Otra manera de resolver el sistema de ecuaciones es utilizando la regla de Cramer, quedando:

$$\begin{array}{rcl} 6I_1 & -9I_1 & = -3 \\ -9I_1 & +6I_2 & = 3 \end{array} \left. \begin{array}{l} Ec(I) \\ Ec(II) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Dos ecuaciones} \\ \text{con dos incógnitas} \end{array}$$

$$Det(A) = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -9 & 6 \end{vmatrix} = [(6)(6)] - [(-1)(-9)] = 36 - 9$$

$$Det(A) = 27$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}}{Det(A)} = \frac{[(-3)(6)] - [(-1)(3)]}{27} = \frac{-18 + 3}{27}$$

$$I_1 = \frac{-15}{27} = -0.555,5 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -9 & 3 \end{vmatrix}}{Det(A)} = \frac{[(6)(3)] - [(-3)(-9)]}{27} = \frac{18 - 27}{27}$$

$$I_2 = \frac{-9}{27} = 0.333,3 \text{ A}$$

Resolvemos el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas utilizando la *app System of Linear Equations Solver* quedando como se muestra en la Figura 4.33.

| ← System of Linear Equations Solver | | |
|--|----|-------|
| x | y | total |
| 6 | -1 | -3 |
| -9 | 6 | 3 |
| $x = \frac{-5}{9}$ $y = \frac{-1}{3}$ | | |
| $x = -0.5555555555555556$ $y = -0.3333333333333333$ | | |

$$I_1 = -0.555,5 \text{ A}$$

$$I_2 = -0.333,3 \text{ A}$$

Figura 4.33. *App System Linear Equations Solver* para un Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Ejemplo 4-11. Utilizando análisis con mallas, resolver el circuito de la Figura 4.31 y calcular las corrientes de malla.

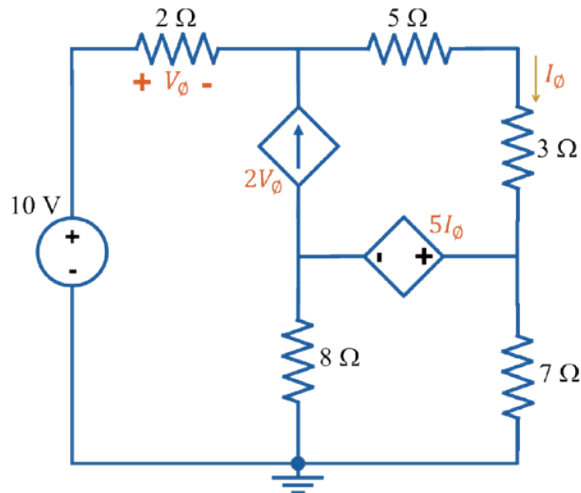


Figura 4.34. Circuito de dos mallas con fuentes dependientes.

Respuesta.

Se trata de un circuito con tres mallas, existen dos fuentes dependientes, una de corriente que depende de un voltaje (V_ϕ) y una de voltaje que depende de una corriente (I_ϕ).

Es importante observar que la fuente de corriente dependiente se encuentra entre dos mallas y por lo tanto el valor de las dos corrientes de malla estará condicionado al valor de la fuente de corriente dependiente.

Para comenzar a resolver el problema con la técnica de mallas, se hace igual que con cualquier otro circuito, primero se trazan las corrientes y se colocan los signos de los voltajes para las resistencias. En la Figura 4.35 se presenta una propuesta de cómo colocar las corrientes y los signos de las resistencias respetando la convención de signos pasiva.

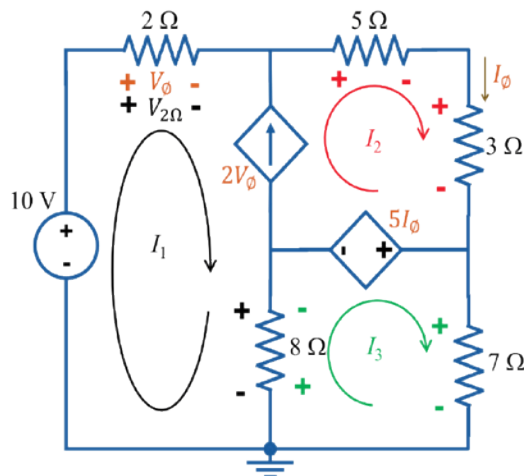


Figura 4.35. Propuesta de corrientes y signos de voltaje en resistencias para circuito con fuentes dependientes.

Es importante observar que la polaridad del voltaje V_ϕ coincide con la polaridad del voltaje que se determina en la resistencia de $2\ \Omega$ ($V_{2\Omega}$) con la corriente I_1 , por lo tanto, ambos voltajes son exactamente iguales tal como queda expresado en la ecuación (4.34).

$$V_\phi = V_{2\Omega} = (2\ \Omega)I_1 \quad (4.34)$$

Lo mismo ocurre para la corriente I_ϕ , ésta coincide totalmente en dirección y sentido con la corriente I_2 , por lo tanto, son iguales y esto se expresa en la ecuación (4.35).

$$I_\phi = I_2 \quad (4.35)$$

Por otro lado, y como ya se había mencionado, la fuente de corriente se encuentra entre dos mallas, por lo tanto, esta condición obliga a que la suma o diferencia de las corrientes de malla sea igual a la corriente de la fuente. Entonces, de acuerdo con la Figura 4.20b, la corriente I_2 tiene la misma dirección que la fuente de corriente $2V_\phi$, por lo tanto, la condición queda expresada como se indica la ecuación (4.36).

$$I_2 - I_1 = 2V_\phi \quad (4.36)$$

En la ecuación (4.36) sustituimos el valor de V_ϕ de la ecuación (4.34) y simplificamos, de igual manera se omiten las unidades para facilitar los cálculos en la ecuación.

$$\begin{aligned} I_2 - I_1 &= 2(2I_1) \\ I_2 - I_1 &= 4I_1 \\ -5I_1 + I_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.37)$$

Es probable que para algunos cause confusión que en la ecuación (4.36) se tengan valores de corriente en el primer miembro y un voltaje multiplicado por una ganancia (constante) en el segundo miembro. Eso no tendría sentido porque sabemos que la corriente no es igual al voltaje, sin embargo, en realidad sí se trata únicamente de valores de corriente ya que la ganancia “2” debe tener unidades (que no se muestran) y que correspondan a $(2\ \frac{A}{V})$ para que al multiplicarla por el voltaje V_ϕ queden únicamente amperes.

Ya que se tienen definidos los valores de las fuentes dependientes en función de las corrientes de malla, se procede a calcular las ecuaciones de las corrientes de malla y la o las Supermallas.

De la Figura 4.35 se observa que la única corriente de malla que se puede calcular es la de la corriente I_3 porque es la única malla en la que están presentes solamente resistencias y fuentes de voltaje (en este caso la fuente de voltaje dependiente).

$$\begin{aligned} \sum V_{trayectoria} &= 0\ V \\ (7\ \Omega + 8\ \Omega)I_3 - (8\ \Omega)I_1 - 5I_\phi &= 0\ V \end{aligned}$$

De la ecuación (4.35) sustituimos el valor de I_0 y simplificamos.

$$\begin{aligned}(15 \Omega)I_3 - (8 \Omega)I_1 - 5(I_2) &= 0 \text{ V} \\ -(8 \Omega)I_1 - 5I_2 + (15 \Omega)I_3 &= 0 \text{ V}\end{aligned}\quad (4.38)$$

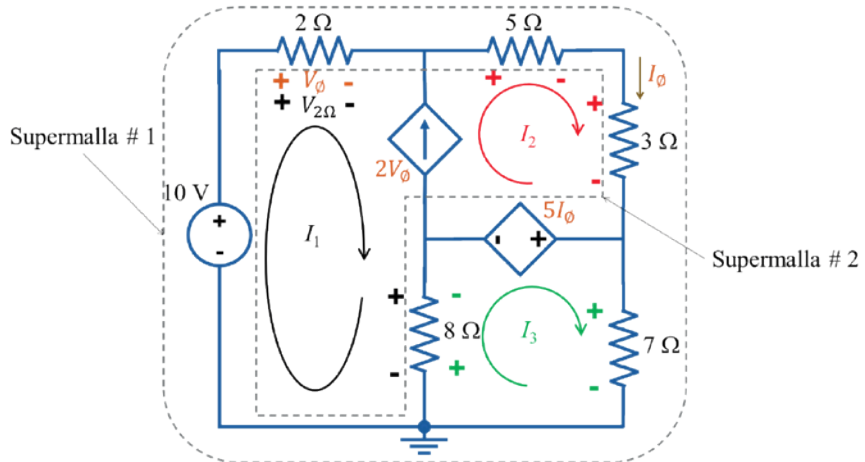


Figura 4.36. Identificación de Supermallas en el circuito con fuentes dependientes.

En la Figura 4.36 identificamos las Supermallas que se pueden trazar en el circuito.

Supermalla # 1

$$\begin{aligned}\sum V_{trayectoria} &= 0 \text{ V} \\ 10 \text{ V} + (2 \Omega)I_1 + (5 \Omega + 3 \Omega)I_2 + (7 \Omega)I_3 &= 0 \\ (2 \Omega)I_1 + (8 \Omega)I_2 + (7 \Omega)I_3 &= 10 \text{ V}\end{aligned}\quad (4.39)$$

Supermalla # 2

$$\begin{aligned}\sum V_{trayectoria} &= 0 \text{ V} \\ -10 \text{ V} + (2 \Omega)I_1 + (5 \Omega + 3 \Omega)I_2 + 5I_0 + (8 \Omega)(I_1 - I_3) &= 0 \text{ V} \\ (2 \Omega)I_1 + (8 \Omega)I_2 + 5(I_2) + (8 \Omega)I_1 - (8 \Omega)I_3 &= 10 \text{ V} \\ (10 \Omega)I_1 + (13 \Omega)I_2 - (8 \Omega)I_3 &= 10 \text{ V}\end{aligned}\quad (4.40)$$

Agrupamos las ecuaciones (4.37), (4.38), (4.39) y (4.40) para formar un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. De igual manera, y para mayor facilidad a la hora de hacer los cálculos, se omiten las unidades en la representación del sistema de ecuaciones.

| | | | | |
|---------|----------|--------------|-----------|-------------------------------------|
| $-5I_1$ | $+I_2$ | $= 0$ | $Ec(I)$ | Condición de la fuente de corriente |
| $-8I_1$ | $-5I_2$ | $+15I_3 = 0$ | $Ec(II)$ | De la malla de I_3 |
| $2I_1$ | $+8I_2$ | $+7I_3 = 10$ | $Ec(III)$ | Supermalla #1 |
| $10I_1$ | $+13I_2$ | $-8I_3 = 10$ | $Ec(IV)$ | Supermalla #2 |

Para resolver el sistema, sólo se necesitan 3 ecuaciones ya que únicamente se tienen 3 incógnitas. Observemos que nos resultaron cuatro ecuaciones porque hay dos “Supermallas”, aunque con una sola que hubiésemos obtenido habría sido suficiente.

Recordemos que, para resolver el sistema, podemos hacer cualquier combinación de ecuaciones siempre y cuando en todas ellas se utilice la $Ec(I)$. Lo anterior se debe a que la condición de corriente entre I_1 e I_2 siempre se debe cumplir en el circuito, si la omitimos, entonces las corrientes resultarían incorrectas. Es así que podemos combinar la $Ec(I)$, $Ec(II)$ y $Ec(III)$ ó $Ec(I)$, $Ec(II)$ y $Ec(IV)$ o la $Ec(I)$, $Ec(III)$ y $Ec(IV)$; para todas estas combinaciones, los resultados de las corrientes deben resultar los mismos valores.

Resolvemos el sistema de ecuaciones considerando la $Ec(I)$, $Ec(II)$ y la $Ec(III)$.

$$\begin{array}{rclcl}
 -5I_1 & + & I_2 & = & 0 & Ec(I) \\
 -8I_1 & -5I_2 & +15I_3 & = & 0 & Ec(II) \\
 2I_1 & +8I_2 & +7I_3 & = & 10 & Ec(III)
 \end{array}$$

Resolvemos el sistema utilizando la regla de Cramer.

$$Det(A) = \begin{vmatrix} -5 & 1 & 0 \\ -8 & -5 & 15 \\ 2 & 8 & 7 \end{vmatrix} = [(175) + (0) + (30)] - [(0) + (-600) + (-56)]$$

$$Det(A) = 861$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 15 \\ 10 & 8 & 7 \end{vmatrix}}{Det(A)} = \frac{[(0) + (0) + (150)] - [(0) + (0) + (0)]}{861}$$

$$I_1 = \frac{150}{861} = 0.174,2 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} -5 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 15 \\ 2 & 10 & 7 \end{vmatrix}}{Det(A)} = \frac{[(0) + (0) + (0)] - [(0) + (-750) + (0)]}{861}$$

$$I_2 = \frac{750}{861} = 0.871,0 \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} -5 & 1 & 0 \\ -8 & -5 & 0 \\ 2 & 8 & 10 \end{vmatrix}}{Det(A)} = \frac{[(250) + (0) + (0)] - [(0) + (0) + (-80)]}{861}$$

$$I_3 = \frac{330}{861} = 0.383,2 \text{ A}$$

Reescribimos el sistema de ecuaciones, pero ahora para resolverlo con la app *System of Linear Equations Solver*.

$$\begin{array}{rcll} -5I_1 & +I_2 & & = 0 & Ec(I) \\ -8I_1 & -5I_2 & +15I_3 & = 0 & Ec(II) \\ 2I_1 & +8I_2 & +7I_3 & = 10 & Ec(III) \end{array}$$

Los resultados de las corrientes se muestran en la Figura 4.37.

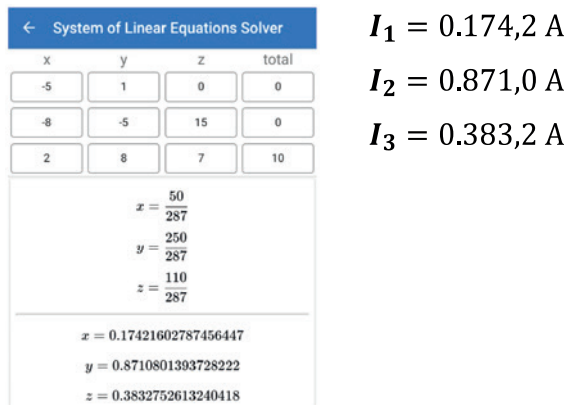


Figura 4.37. Solución del sistema de ecuaciones para el problema con “Supermallas”.

CORRIENTES DE MALLA CON DISTINTAS DIRECCIONES

Seguramente, después de todos los ejemplos que hemos resuelto alguien se habrá preguntado en un problema, ¿será posible tener direcciones de corrientes distintas?, ¿qué pasaría si todas o algunas de las corrientes de malla no tuvieran la misma dirección o cuándo sería apropiado cambiarlas?

En fin, la respuesta es muy sencilla, cada estudiante puede decidir en qué momento cambiar las direcciones de las corrientes para comenzar a analizar un circuito. ¿De qué depende?, por ejemplo, lo puede hacer para que la dirección de una corriente sea positiva, para que los signos de voltaje en una resistencia tengan determinada polaridad, para facilitar los cálculos, etc. Realmente no existe una regla fija para establecer las direcciones en las corrientes de malla, por esa razón puede ser aleatoria o, simplemente por rapidez y costumbre, pueden establecerse todas las corrientes en un solo sentido.

Si las direcciones de las corrientes son distintas para cada malla, se debe tener mayor cuidado al momento de colocar los signos en cada término ya que no siempre las dos corrientes serán opuestas entre sí.

A continuación, se muestra el último ejemplo aplicando la técnica de mallas y en el que no todas las corrientes tendrán la dirección en sentido horario. Se establecerán direcciones opuestas al sentido de las manecillas del reloj en algunas mallas para que sea más fácil calcular el voltaje para una fuente dependiente de voltaje y para que sea más fácil colocar una corriente en otra fuente dependiente, en este caso de corriente.

Habrà que tener mayor cuidado al momento de construir las ecuaciones aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff, ya que existirán elementos en los que las corrientes de malla se sumarán y otros en los que se restarán. Al mismo tiempo, para elementos que se comparten entre dos mallas, aparecerán corrientes que se sumen en un elemento y otras que se resten entre sí.

Ejemplo 4-12. Para el circuito de la Figura 4.38 calcular todas las corrientes de malla.

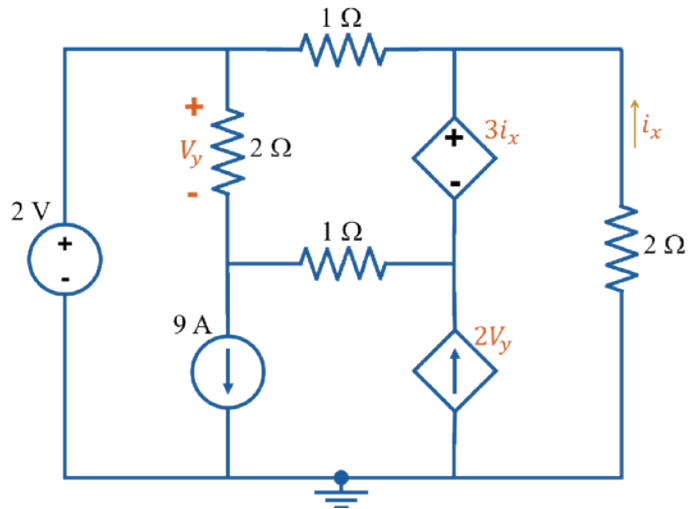


Figura 4.38. Circuito con fuentes dependientes y en el que no todas las corrientes tendrán el mismo sentido.

Respuesta.

Es un circuito de cuatro mallas en el que están presentes dos fuentes independientes, una de voltaje de 2 V y una de corriente de 9 A. De igual manera, existen dos fuentes dependientes, una fuente de voltaje dependiente de corriente ($3i_x$) y una fuente de corriente dependiente de voltaje ($2V_y$).

Observamos que cada fuente de corriente se encuentra entre dos mallas, por lo tanto, ambas fuentes de corriente establecerán, cada una, una condición que se deberá cumplir al momento de construir las ecuaciones del sistema.

Notamos que sólo la malla central superior se encuentra formada por fuentes de voltaje y/o resistencias, por lo tanto, sólo se podrá obtener la ecuación para esta malla. Para completar el sistema de ecuaciones, será necesario identificar al menos una “Supermalla”.

Por último y no menos importante, observamos que el voltaje V_y y la corriente i_x , son los parámetros de los que dependen las fuentes dependientes. Estos parámetros se deberán obtener a partir de las corrientes de malla que nosotros establezcamos (I_1 , I_2 , I_3 e I_4).

Para determinar i_x y V_y , resulta más sencillo si lo hacemos a partir de valores positivos, por lo tanto, éste será el criterio que se tomará para establecer las direcciones de las corrientes en las mallas.

Comenzamos colocando los nombres de las corrientes en las mallas y después asignamos las direcciones para asegurar que i_x y V_y , resultarán positivos a partir de las corrientes que se definan.

En la Figura 4.39 se muestran las corrientes I_1 , I_2 , I_3 e I_4 , sólo falta establecer el sentido de giro en cada una de ellas.

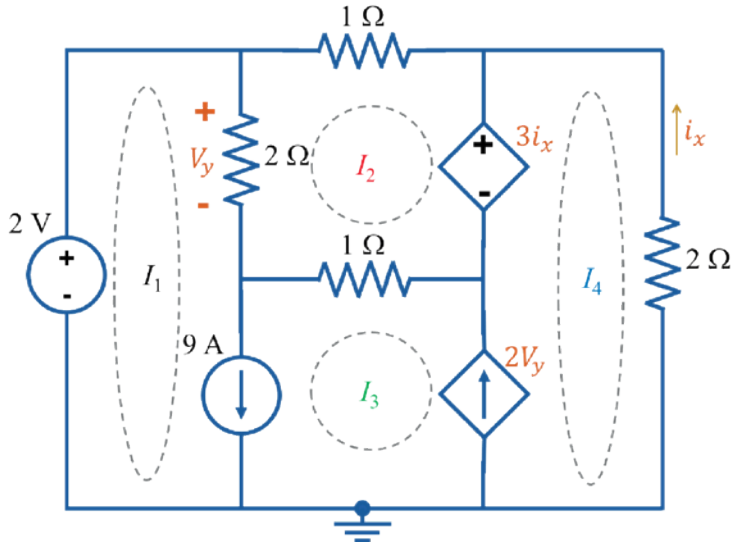


Figura 4.39. Circuito con los nombres de las corrientes, faltando establecer el sentido de cada una de ellas.

Entonces, ¿Cómo conseguimos que i_x y V_y , sean positivos para los cálculos en el análisis del circuito?

La respuesta es sencilla, para el voltaje V_y es necesario que tanto la corriente I_1 como la corriente I_2 establezcan signos con la misma polaridad que tiene el voltaje V_y . Esto se consigue haciendo que la corriente I_1 esté a favor de las manecillas del reloj y la corriente I_2 esté en contra de las manecillas del reloj tal como se aprecia en la Figura 4.40. Obsérvese, en esta figura, que todos los signos del voltaje en la resistencia de $2\ \Omega$ involucrada coinciden en polaridad, por lo tanto, las corrientes en la resistencia se suman y a partir de la ley de Ohm se establece que el voltaje V_y quede definido como lo indica la ecuación (4.41).

$$V_y = (2\ \Omega)(I_1 + I_2) \quad (4.41)$$

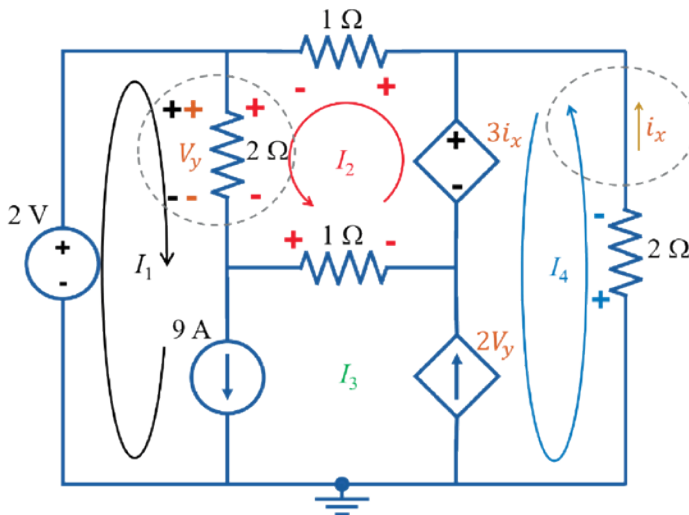


Figura 4.40. Direcciones de las corrientes para asegurar que i_x y V_y sean positivos para los cálculos en las ecuaciones.

Para el caso de la corriente i_x es más sencillo, ya que sólo debemos asegurar que el sentido de la corriente I_4 sea igual al sentido de la corriente i_x . Por lo tanto, la corriente I_4 debe quedar definida en contra de las manecillas del reloj tal como también se aprecia en la Figura 4.40. De esta manera la corriente i_x y la corriente I_4 son iguales en dirección y sentido, y quedan relacionadas mediante la ecuación (4.42).

$$i_x = I_4 \quad (4.42)$$

Para finalizar, sólo falta asignar el sentido de giro para la corriente I_3 . Realmente puede ser en cualquiera de ambos sentidos (horario o antihorario), pero, en este caso, notamos que, si se selecciona el sentido antihorario, esta dirección coincidirá con la de las dos fuentes de corriente por las que pasa, así que sólo por esa característica se tomará en ese sentido tal como se aprecia en la Figura 4.41.

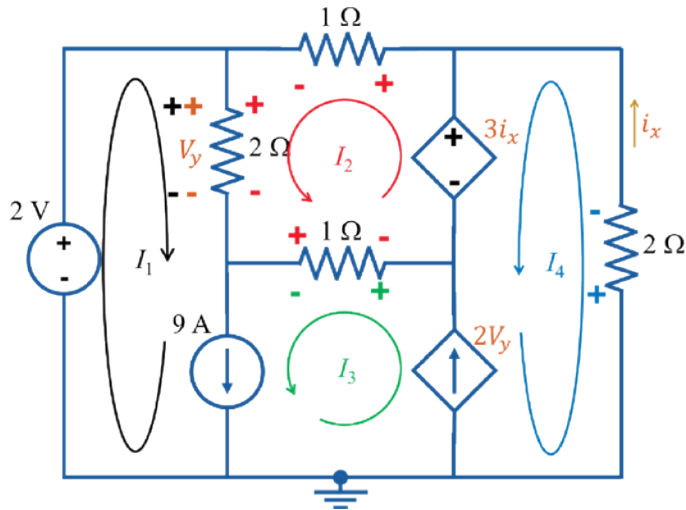


Figura 4.41. Circuito definido con todas las direcciones de corriente.

A partir de la Figura 4.41 y aplicando la ley de voltajes de Kirchoff obtenemos la ecuación para la malla de I_2 .

$$\sum V_{trayectoria} = 0 \text{ V}$$

Comenzamos en la resistencia superior de 1Ω y seguimos la dirección de la corriente I_2 .

$$+(1 \Omega)I_2 + (2 \Omega)(I_2 + I_1) + (1 \Omega)(I_2 - I_3) - 3i_x = 0 \text{ V} \quad (4.43)$$

De la ecuación (4.42) sustituimos el valor de i_x en la ecuación (4.43) y simplificamos.

$$(2 \Omega)I_1 + (4 \Omega)I_2 - (1 \Omega)I_3 - 3I_4 = 0 \text{ V} \quad (4.44)$$

Observamos en la ecuación (4.43) que para la resistencia de 2Ω las corrientes se sumaron y para la segunda resistencia de 1Ω las corrientes se restaron. Esto ocurre porque en el primer caso las dos corrientes llevan la misma dirección y en el segundo caso las corrientes son opuestas entre sí.

Obtenemos ahora las ecuaciones que resultan de las condiciones impuestas por las fuentes de corriente.

Por otro lado, y como ya se había mencionado, las fuentes de corriente se encuentran entre dos mallas, por lo tanto, esta condición obliga a que la suma o diferencia de las corrientes de malla sea igual a la corriente de cada una de las fuentes de corriente.

Para la fuente independiente de $9 A$, y de acuerdo con la Figura 4.20c, las corrientes I_1 e I_3 tienen la misma dirección que la fuente de corriente de $9 A$, entonces, la condición queda expresada como indica la ecuación (4.45).

$$I_1 + I_3 = 9 A \quad (4.45)$$

Para la fuente dependiente de $(2 V_y)$, y de acuerdo con la Figura 4.20b, las corrientes I_3 e I_4 tienen direcciones opuestas, y la que coincide con la dirección de la fuente dependiente es la corriente I_3 , entonces, la condición queda expresada como se indica en la ecuación (4.46).

$$I_3 - I_4 = 2 V_y \quad (4.46)$$

Sustituimos la ecuación (4.41) en la ecuación (4.46) y simplificamos.

$$\begin{aligned} I_3 - I_4 &= 2[(2 \Omega)(I_1 + I_2)] \\ I_3 - I_4 &= (4 \Omega)(I_1 + I_2) \\ I_3 - I_4 &= (4 \Omega)I_1 + (4 \Omega)I_2 \\ -(4 \Omega)I_1 - (4 \Omega)I_2 + I_3 - I_4 &= 0 \end{aligned} \quad (4.47)$$

Hasta el momento sólo se han obtenido 3 ecuaciones con cuatro incógnitas, por lo tanto, es necesario obtener una cuarta ecuación para poder resolver el sistema. Para conseguirlo, será necesario utilizar una “Supermalla”. Recordemos que una “Supermalla” es una trayectoria cerrada que involucra a más de una malla y en la que sólo están presentes resistencias o fuentes de voltaje. En el circuito de la Figura 4.41 se identifica que se pueden trazar dos “Supermallas” las cuales se muestran en la Figura 4.42.

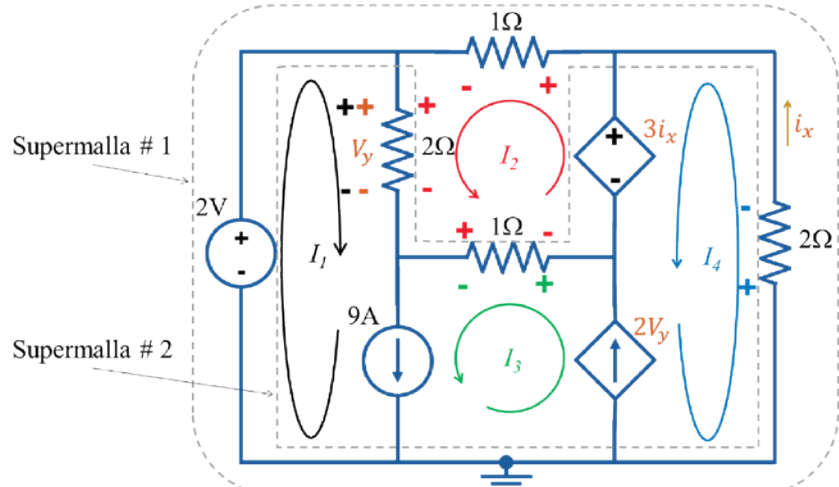


Figura 4.42. Trayectoria de las “Supermallas” que se encuentran en el circuito.

Obtenemos para cada “Supermalla” su respectiva ecuación con la ley de voltajes de Kirchhoff, quedando:

Supermalla # 1

$$\begin{aligned} \sum V_{trayectoria} &= 0 \text{ V} \\ -2 \text{ V} - (1 \Omega)I_2 - (2 \Omega)I_4 &= 0 \text{ V} \\ -(1 \Omega)I_2 - (2 \Omega)I_4 &= 2 \text{ V} \end{aligned} \quad (4.48)$$

Supermalla # 2

$$\begin{aligned} \sum V_{trayectoria} &= 0 \text{ V} \\ -2 \text{ V} + (2 \Omega)(I_1 + I_2) + (1 \Omega)(I_2 - I_3) - 3i_x - (2 \Omega)(I_4) &= 0 \text{ V} \end{aligned} \quad (4.49)$$

De la ecuación (4.42) sustituimos el valor de i_x en la ecuación (4.49) y simplificamos.

$$\begin{aligned} -2 \text{ V} + (2 \Omega)(I_1 + I_2) + (1 \Omega)(I_2 - I_3) - 3(I_4) - (2 \Omega)(I_4) &= 0 \\ (2 \Omega)I_1 + (3 \Omega)I_2 - (1 \Omega)I_3 - (5 \Omega)I_4 &= 2 \text{ V} \end{aligned} \quad (4.50)$$

Agrupamos las ecuaciones (4.44), (4.45), (4.47), (4.48) y (4.50) para formar un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. De igual manera, y para mayor facilidad a la hora de hacer los cálculos, se omiten las unidades en la representación del sistema de ecuaciones.

$$\begin{array}{rcll}
 2I_1 + 4I_2 - I_3 - 3I_4 = 0 & Ec(I) & \text{Para la malla de } I_2 \\
 I_1 + I_3 = 9 & Ec(II) & \text{Para la fuente de 9 A} \\
 -4I_1 - 4I_2 + I_3 - I_4 = 0 & Ec(III) & \text{Para la fuente de (2 V}_y\text{) A} \\
 -I_2 - 2I_4 = 2 & Ec(IV) & \text{Supermalla \# 1} \\
 2I_1 + 3I_2 - I_3 - 5I_4 = 2 & Ec(V) & \text{Supermalla \# 2}
 \end{array}$$

Al igual que en el ejemplo anterior, para resolver el sistema de ecuaciones es necesario que no se excluyan las ecuaciones que resultaron de las condiciones que impusieron las fuentes de corriente, en este caso la $Ec(II)$ y la $Ec(III)$. Con estas dos ecuaciones y con otras dos del sistema se pueden plantear para calcular las corrientes.

Para resolver el sistema utilizamos la $Ec(I)$, $Ec(II)$, $Ec(III)$ y la $Ec(IV)$. Extraemos los coeficientes de las ecuaciones para resolver el sistema utilizando el método de Gauss-Jordan. Escribimos la matriz ampliada y comenzamos a reducirla hasta obtener los valores de las corrientes.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & -3 & | & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & | & 9 \\ -4 & -4 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & 9 \\ 2 & 4 & -1 & -3 & | & 0 \\ -4 & -4 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow -F_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & -2 \\ -4 & -4 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} 4F_1 + F_3 \\ -2F_1 + F_4 \end{array}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & -2 \\ 0 & -4 & 5 & -1 & | & 36 \\ 0 & 4 & -3 & -3 & | & -18 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 + F_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & | & 18 \\ 0 & 4 & -3 & -3 & | & -18 \end{pmatrix} \xrightarrow{-4F_2 + F_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & | & 18 \\ 0 & 0 & -3 & -11 & | & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{F_3}{2}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & | & 9 \\ 0 & 0 & -3 & -11 & | & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} -F_3 + F_1 \\ 3F_3 + F_4 \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & | & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -17 & | & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} F_4 \\ -17 \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & | & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} 2F_4 - F_1 \\ -2F_4 + F_2 \\ 2F_4 + F_3 \end{array}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} I_1 = 2 \text{ A} \\ I_2 = 0 \text{ A} \\ I_3 = 7 \text{ A} \\ I_4 = -1 \text{ A} \end{array}$$

Reescribimos el sistema de ecuaciones, pero ahora para resolverlo con la *app System of Linear Equations Solver*.

$$\begin{array}{rclcl}
2I_1 & +4I_2 & -I_3 & -3I_4 & = & 0 & Ec(I) & \text{Para la malla de } I_2 \\
I_1 & & +I_3 & & = & 9 & Ec(II) & \text{Para la fuente de 9 A} \\
-4I_1 & -4I_2 & +I_3 & -I_4 & = & 0 & Ec(III) & \text{Para la fuente de } (2V_y) \text{ A} \\
& -I_2 & & -2I_4 & = & 2 & Ec(IV) & \text{Supermalla \# 1} \\
2I_1 & +3I_2 & -I_3 & -5I_4 & = & 2 & Ec(V) & \text{Supermalla \# 2}
\end{array}$$

Utilizamos la $Ec(II)$, $Ec(III)$, $Ec(IV)$ y $Ec(V)$ para calcular las corrientes con la *app*. Los resultados de las corrientes se muestran en la Figura 4.43.

| ← System of Linear Equations Solver | | | | |
|-------------------------------------|----|----|----|-------|
| x | y | z | t | total |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 9 |
| -4 | -4 | 1 | -1 | 0 |
| 0 | -1 | 0 | -2 | 2 |
| 2 | 3 | -1 | -5 | 2 |
| x = 2 y = 0 z = 7 t = -1 | | | | |

$I_1 = 2 \text{ A}$

$I_2 = 0 \text{ A}$

$I_3 = 7 \text{ A}$

$I_4 = -1 \text{ A}$

Figura 4.43. Solución del sistema de ecuaciones para el problema de fuentes dependientes y “Supermallas”.

Se deja como inquietud para el estudiante que se resuelvan el resto de las combinaciones de ecuaciones con la *app*. No olvides que con cualquier combinación de ecuaciones, en este problema, nunca debes dejar fuera a la $Ec(II)$ y $Ec(III)$.

RESUMEN Y CONCLUSIÓN DEL CAPÍTULO

La técnica de mallas es una técnica muy poderosa que sirve para resolver prácticamente cualquier tipo de circuito eléctrico que se presente. Para plantear las ecuaciones del sistema, utiliza básicamente la ley de Ohm y la ley de voltajes de Kirchhoff (LVK). En un circuito resuelto aplicando la técnica de mallas resulta la misma cantidad de ecuaciones que de mallas.

Al inicio de cada ejemplo se incluyó una descripción del circuito y cómo comenzar a resolverlo. Se explicó que cuando una fuente de corriente aparece en el perímetro del circuito es de ayuda inmediata porque corresponde con la corriente de la malla. Cuando una fuente de corriente aparece entre dos mallas se debe cumplir que la suma o la diferencia de las corrientes sea igual a la corriente de la fuente. De igual forma, cuando aparece una fuente de corriente entre dos mallas, es necesario utilizar al menos una “Supermalla” para resolver el problema.

En este capítulo se resolvieron 12 ejemplos comenzando con ejercicios sencillos y terminando con ejemplos cada vez más complejos. En los ejemplos se trató de incluir todo tipo de circuitos que se pueden presentar cuando se analizan circuitos con mallas. Se

incluyeron circuitos con fuentes de voltaje, fuentes de corriente, fuentes dependientes de corriente y dependientes de voltaje, así como ejemplos que obligaron a utilizar “Supermallas”. Se hicieron ejemplos de 2, 3 y hasta 4 ecuaciones con 4 incógnitas. Todos y cada uno de los ejemplos se resolvieron paso a paso explicando detalladamente cómo comenzar a resolver el circuito, cómo plantear las ecuaciones y qué aspectos tomar en cuenta para resolverlos rápida y adecuadamente.

Para resolver los sistemas de n-ecuaciones con n-incógnitas que resultaron, se utilizaron de forma alternada las técnicas de “Suma o resta”, “Regla de Cramer”, el método de “Gauss-Jordan”, y en todos los casos, para comprobar los resultados, se utilizó la *app.* gratuita *System of Linear Equations Solver*.

PROBLEMAS PROPUESTOS

A continuación, se proponen una serie de problemas para poner en práctica lo aprendido sobre la técnica del análisis de circuitos con mallas. Para todos los problemas se incluye el resultado de la corriente en cada malla, considerando la dirección de la corriente en el sentido de las manecillas del reloj.

Prob. 4.1. Calcular las corrientes de malla de la Figura 4.44.

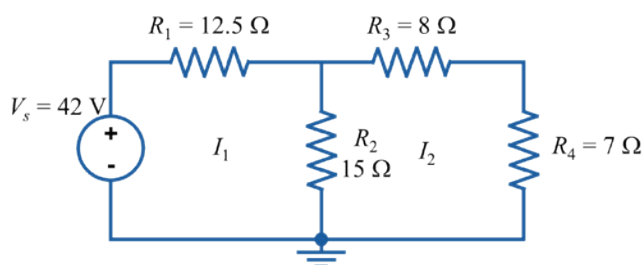


Figura 4.44.

(Sol. $I_1 = 1.5 \text{ A}$, $I_2 = 0.75 \text{ A}$).

Prob. 4.2. Calcular las corrientes de malla de la Figura 4.45.

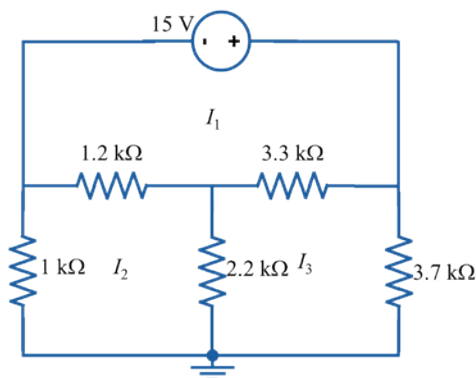


Figura 4.45.

(Sol. $I_1 = 6.536 \text{ mA}$, $I_2 = 3.356 \text{ mA}$, $I_3 = 3.147 \text{ mA}$).

Prob. 4.3. Calcular las corrientes de malla de la Figura 4.46.

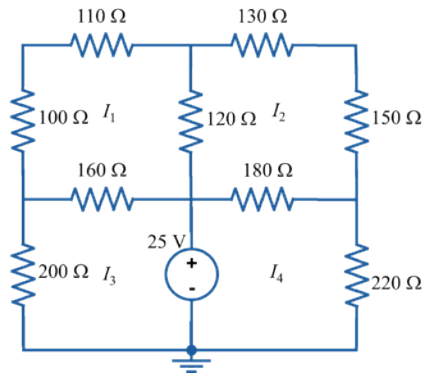


Figura 4.46.

(Sol. $I_1 = -21.55 \text{ mA}$, $I_2 = 17.36 \text{ mA}$, $I_3 = -79.02 \text{ mA}$ e $I_4 = 70.31 \text{ mA}$).

Prob. 4.4. Calcular las corrientes de malla de la Figura 4.47.

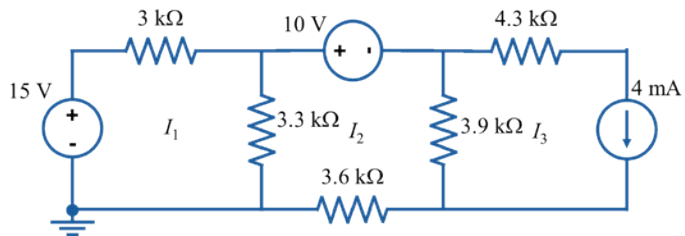


Figura 4.47.

(Sol. $I_1 = 3.158 \text{ mA}$, $I_2 = 1.483 \text{ mA}$, $I_3 = 4 \text{ mA}$).

Prob. 4.5. Calcular las corrientes de malla de la Figura 4.48.

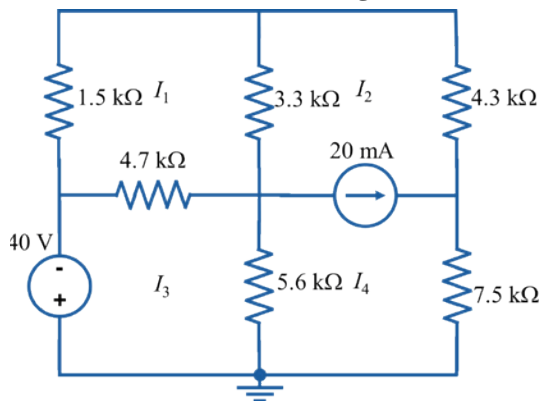


Figura 4.48.

(Sol. $I_1 = -7.583 \text{ mA}$, $I_2 = 15.137 \text{ mA}$, $I_3 = -4.7 \text{ mA}$ e $I_4 = 4.862 \text{ mA}$).

Prob. 4.6. Calcular las corrientes de malla de la Figura 4.49.

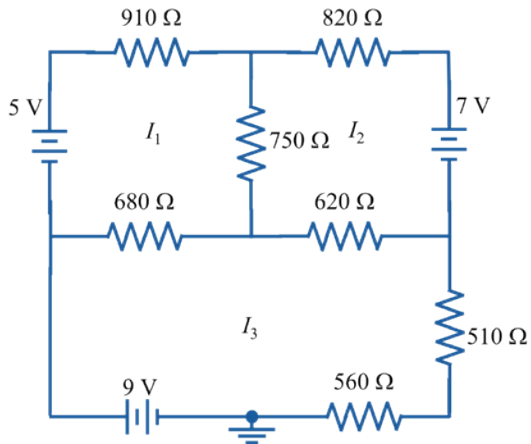


Figura 4.49.

(Sol. $I_1 = 3.171 \text{ mA}$, $I_2 = -839.55 \text{ } \mu\text{A}$, $I_3 = -4.487 \text{ mA}$).

Prob. 4.7. Calcular las corrientes de malla de la Figura 4.50.

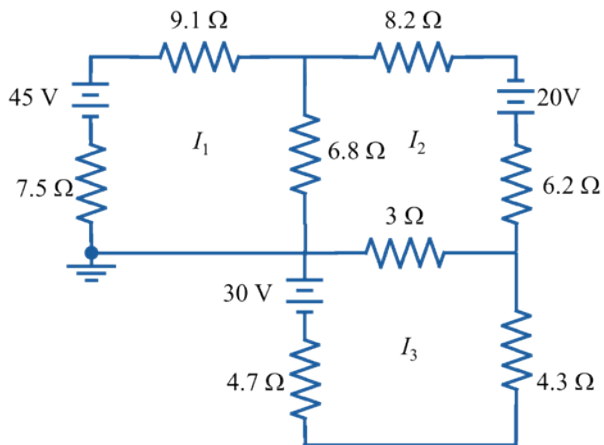


Figura 4.50.

(Sol. $I_1 = 2.472 \text{ A}$, $I_2 = 1.889 \text{ A}$, $I_3 = 2.972 \text{ A}$).

Prob. 4.8. Calcular las corrientes de malla de la Figura 4.51.

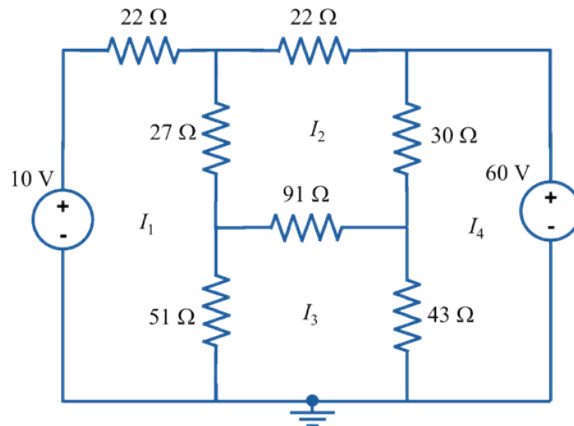


Figura 4.51.

(Sol. $I_1 = -0.9733\text{A}$, $I_2 = -1.299\text{A}$, $I_3 = -1.419$ e $I_4 = -2.19\text{A}$).

Prob. 4.9. Calcular las corrientes de malla de la Figura 4.52.

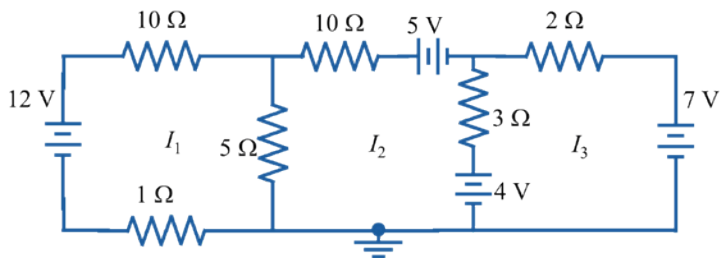


Figura 4.52.

(Sol. $I_1 = 608.78\text{ mA}$, $I_2 = -451.88\text{ mA}$, $I_3 = -725.94\text{ mA}$).

Prob. 4.10. Calcular las corrientes de malla de la Figura 4.53.

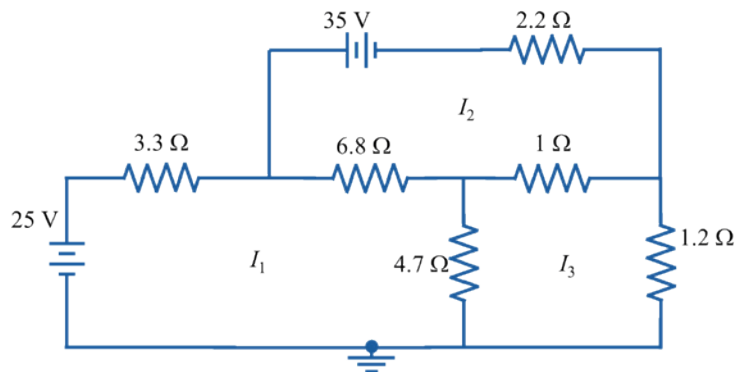


Figura 4.53.

(Sol. $I_1 = -265\text{ mA}$, $I_2 = -3.75\text{ A}$, $I_3 = -724.42\text{ mA}$).

Prob. 4.11. Calcular las corrientes de malla de la Figura 4.54.

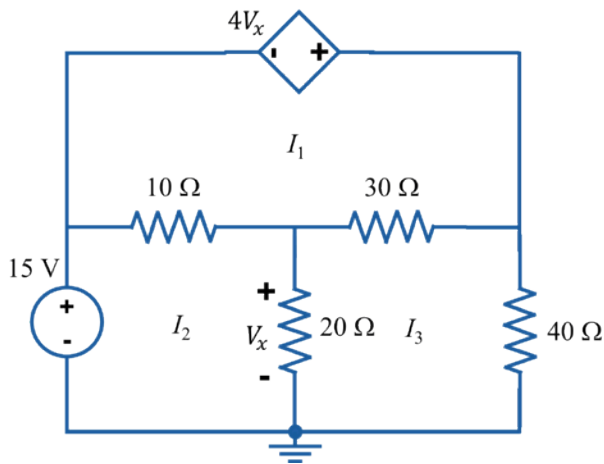


Figura 4.54.

(Sol. $I_1 = 8.875 \text{ A}$, $I_2 = 6.375 \text{ A}$, $I_3 = 4.375 \text{ A}$).

Prob. 4.12. Calcular las corrientes de malla de la Figura 4.55.

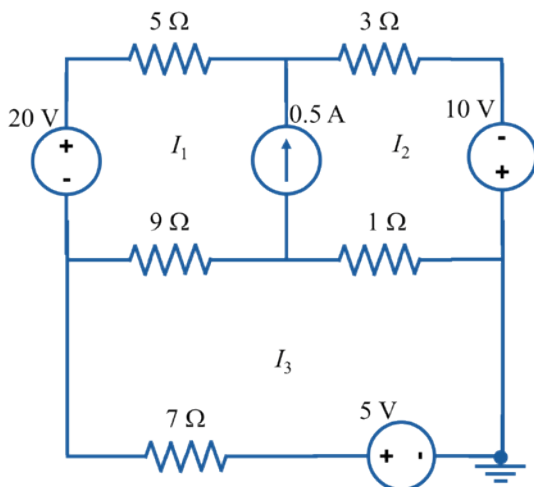


Figura 4.55.

(Sol. $I_1 = 2.577 \text{ A}$, $I_2 = 3.077 \text{ A}$, $I_3 = 1.839 \text{ A}$).

Prob. 4.13. Calcular las corrientes de malla de la Figura 4.56.

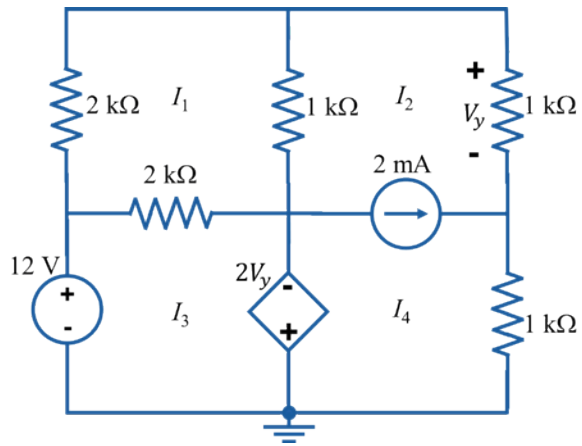


Figura 4.56.

(Sol. $I_1 = 4.5 \text{ mA}$, $I_2 = 500 \text{ } \mu\text{A}$, $I_3 = 11 \text{ mA}$ e $I_4 = 2.19 \text{ A}$).

Prob. 4.14. Calcular las corrientes de malla de la Figura 4.57.

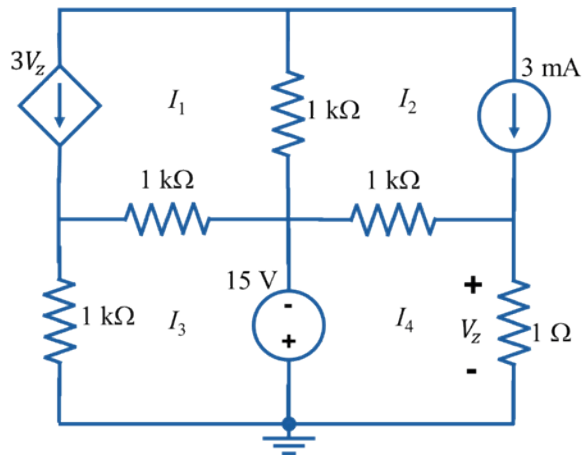


Figura 4.57.

(Sol. $I_1 = 35.964 \text{ mA}$, $I_2 = 3 \text{ mA}$, $I_3 = 25.482 \text{ mA}$ e $I_4 = -11.988 \text{ mA}$).

Prob. 4.15. Calcular las corrientes de malla de la Figura 4.58.

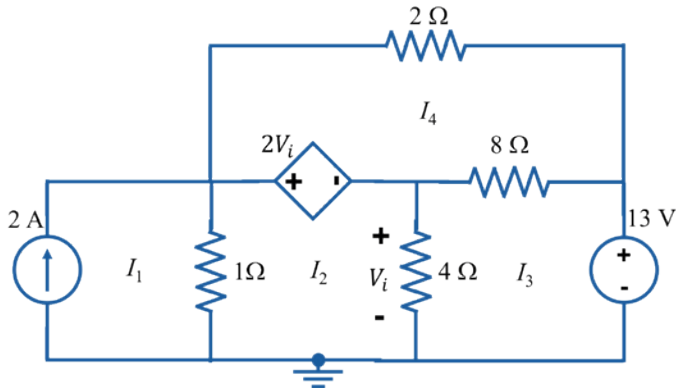


Figura 4.58.

(Sol. $I_1 = 2 \text{ A}$, $I_2 = -4.23 \text{ A}$, $I_3 = -4.75 \text{ A}$ e $I_4 = -3.384 \text{ A}$).

Prob. 4.16. Calcular las corrientes de malla de la Figura 4.59.

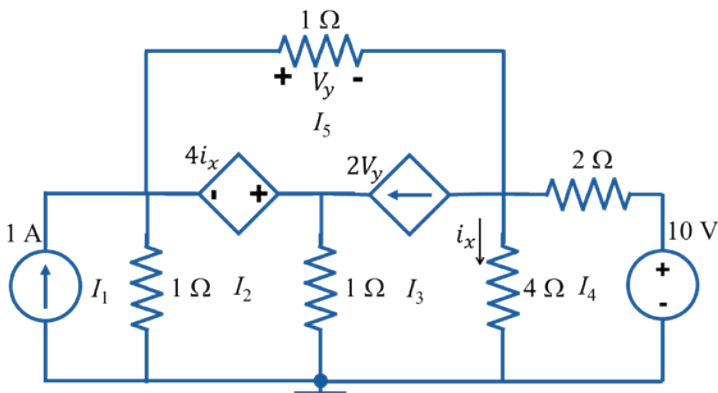


Figura 4.59.

(Sol. $I_1 = 1 \text{ A}$, $I_2 = -0.24241 \text{ A}$, $I_3 = -5.09089 \text{ A}$ e $I_4 = -5.06061 \text{ A}$, $I_5 = 5.09091 \text{ A}$).

Prob. 4.17. Calcular las corrientes de malla de la Figura 4.60.

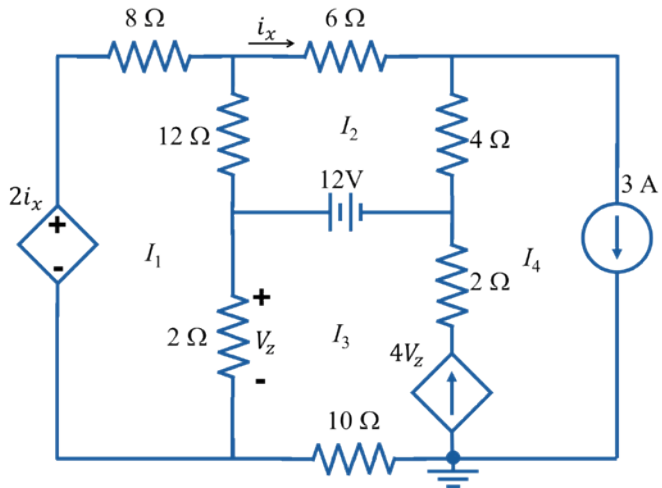


Figura 4.60.

(Sol. $I_1 = 1.193$ A, $I_2 = 1.741$ A, $I_3 = 0.935$ A e $I_4 = 3$ A).

Prob. 4.18. Calcular las corrientes de malla de la Figura 4.61.

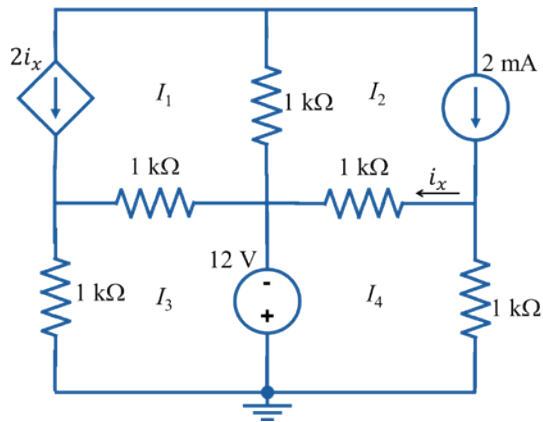


Figura 4.61.

(Sol. $I_1 = -7$ mA, $I_2 = 2$ mA, $I_3 = -1$ mA e $I_4 = -5$ A).

En los dos siguientes problemas se sugiere utilizar una calculadora científica más sofisticada y comprobar los resultados utilizando simulaciones mediante el software LTSpice.

Prob. 4.19. Calcular las corrientes de malla de la Figura 4.62.

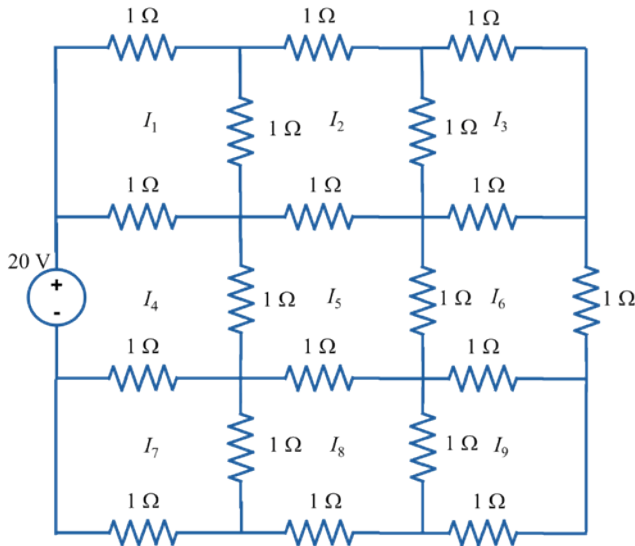


Figura 4.62.

(Sol. $I_1 = 4.705 \text{ A}$, $I_2 = 2.745 \text{ A}$, $I_3 = 1.568 \text{ A}$, $I_4 = 11.372 \text{ A}$, $I_5 = 4.705 \text{ A}$, $I_6 = 1.960 \text{ A}$, $I_7 = 4.705 \text{ A}$, $I_8 = 2.745 \text{ A}$ e $I_9 = 1.568 \text{ A}$).

Prob. 4.20. Calcular las corrientes de malla de la Figura 4.63.

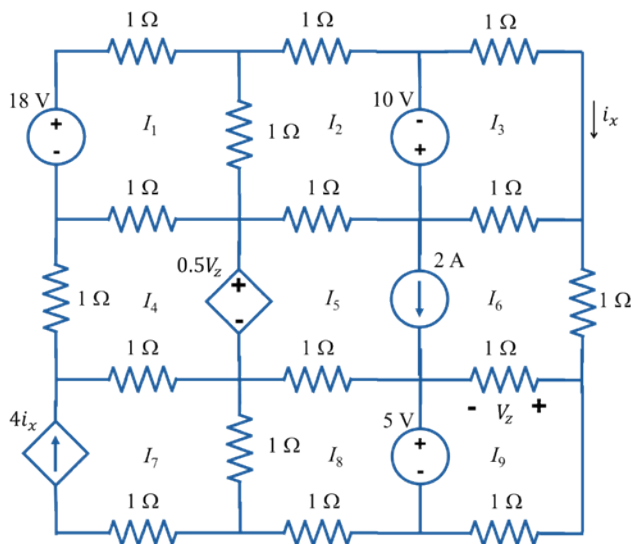


Figura 4.63.

(Sol. $I_1 = 5.174 \text{ A}$, $I_2 = 4.388 \text{ A}$, $I_3 = -7.005 \text{ A}$, $I_4 = -6.864 \text{ A}$, $I_5 = -2.01 \text{ A}$, $I_6 = -4.010 \text{ A}$, $I_7 = -28.020 \text{ A}$, $I_8 = 11.677 \text{ A}$ e $I_9 = 0.494 \text{ A}$).

REFERENCIAS DEL CAPÍTULO

- Flores-Oropeza, L. A. [Luis Flores Circuitos]. (2017, marzo 21). 01 Mallas en Circuitos Eléctricos de CD [archivo de video]. Recuperado de <https://www.youtube.com/watch?v=XbKcrCH1Z8s>
- Hernández, M. (s. f.). Análisis de circuitos y sistemas lineales. *Técnicas de análisis sistemático de circuitos: Análisis por mallas y nodos*. https://repositorio.innovacionumh.es/Proyectos/P_19/Tema_1/UMH_07.htm.
- McAllister, W. (2008). El método de la corriente de malla. *Khan Academy*. Recuperado el 11 de febrero de 2021 de: <https://bitly.ws/ZYhF>



**ANÁLISIS DE CIRCUITOS
ELÉCTRICOS CON NODOS**

5

INTRODUCCIÓN

Debemos recordar que un nodo “ n ” es la unión de dos o más elementos cualesquiera en un circuito (McAllister, 2008a). El análisis de nodos se basa principalmente en la ley de Ohm y en la ley de corrientes de Kirchhoff (LCK) (McAllister, 2008b) aplicadas a cada uno de los nodos del circuito. Con esta técnica, se obtienen todos los voltajes de nodo respecto de uno de referencia o tierra (McAllister, 2008a). Una vez que se calculan los voltajes en cada nodo, es posible obtener cualquier otro voltaje, corriente o potencia en el circuito.

Con esta técnica de análisis, resultan tantas ecuaciones como $(n-1)$ nodos existen en el circuito. Al igual que con el análisis de mallas, es necesario utilizar métodos matemáticos para resolver los sistemas de ecuaciones simultáneas que resultan.

Resolver un circuito aplicando el análisis con nodos se puede simplificar en tres pasos de acuerdo a Flores (2017), "Método de los voltajes de nodos" (2013) y Hernández (s. f.).

Pasos para aplicar el análisis con nodos

Paso 1.

Seleccionar el nodo de referencia, nombrar al resto de los nodos y establecer una dirección de corriente para cada rama del circuito

En principio, cualquiera de los nodos puede ser el nodo de referencia “0”, sin embargo, generalmente se selecciona el nodo en el que están conectadas la mayor cantidad de ramas, o la mayor cantidad de fuentes de voltaje, o el nodo en el que se encuentre el voltaje más negativo (normalmente la terminal de tierra \perp o GND del inglés “ground”). El resto de los nodos se identifican con a, b, c, d, \dots, n . Después se establece una dirección única de corriente para cada rama del circuito entre los nodos. Sólo se puede asignar la dirección de la corriente en las ramas donde haya elementos pasivos como resistencias, inductores y capacitores. En el caso de las fuentes de corriente no se asigna la dirección porque ya está asignada por la propia fuente. Para el caso de las fuentes de voltaje tampoco es necesario asignar la dirección de la corriente, porque, dependiendo de entre qué nodos se encuentren conectadas, éstas serán

en sí mismas los voltajes de nodo que estamos buscando o probablemente sean parte de un Supernodo.

Paso 2.

Construir la ecuación de cada voltaje de nodo

Para construir la ecuación de cada voltaje de nodo, se aplican en conjunto la ley de corrientes de Kirchhoff (LCK) y la ley de Ohm. Se obtiene una ecuación por cada nodo (excepto para el nodo de referencia "0") hasta que resulte un sistema de ecuaciones igual a $(n-1)$ nodos. Para obtener cada ecuación, se calcula simbólicamente la corriente en cada rama tomando como referencia la dirección de corriente que se estableció en el paso anterior. Para calcular la corriente en una rama, se define una diferencia de voltaje entre ambos nodos y se divide entre la resistencia que se encuentra en la rama. La diferencia de voltaje se calcula considerando que el nodo más positivo es por el cual la corriente está saliendo y el nodo más negativo es por el cual la corriente está entrando. Para el caso del nodo de referencia, éste tendrá siempre un voltaje de "0 V". Con las direcciones de las corrientes y los valores simbólicos calculados de éstas, se aplica la ley de corrientes de Kirchhoff en cada nodo para obtener las ecuaciones del sistema.

Paso 3.

Agrupar las ecuaciones en un sistema de $(n-1)$ -ecuaciones con $(n-1)$ -incógnitas y se resuelve para obtener los voltajes en los nodos

Una vez que se tienen todas las ecuaciones del circuito, se resuelven para obtener todos los voltajes en los nodos. Para resolver el sistema de ecuaciones simultáneas, se pueden utilizar los mismos métodos empleados para el análisis de mallas, es decir, el método de suma o resta, la regla de Cramer, la reducción por el método de Gauss-Jordan, alguna *app.*, etc.

A continuación, se presentan una serie de ejercicios en los que se aplica el análisis con nodos para calcular todos los voltajes de nodo en cada circuito. Se pretenden hacer los ejercicios suficientes para ejemplificar la mayor cantidad de casos posibles para que quede clara la explicación del tema.

NODOS CON FUENTES DE VOLTAJE

Ejemplo 5-1. Calcular los voltajes de nodo en el circuito de la Figura 5.1.

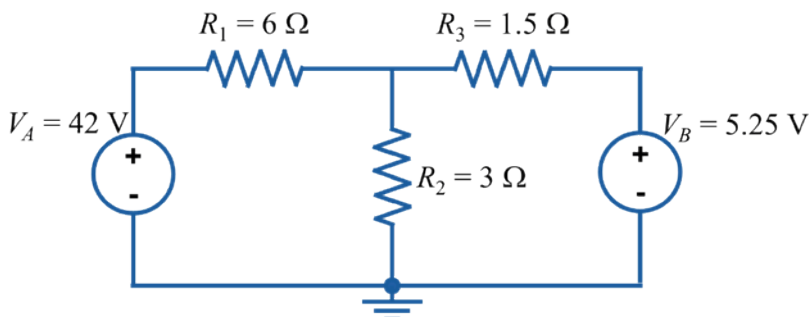


Figura 5.1. Circuito para aplicar el análisis por nodos.

Respuesta.

En el primer paso, identificamos los nodos con los que cuenta el circuito, en este caso, de la Figura 5.1 se observa que son cuatro nodos ($n=4$) los cuales se nombrarán nodo 0, nodo a , nodo b , nodo c , y para cada uno de ellos quedará definido un voltaje (v_a , v_b , v_c) respecto del nodo 0. En la Figura 5.2 se muestran los cuatro nodos y su representación en el circuito.

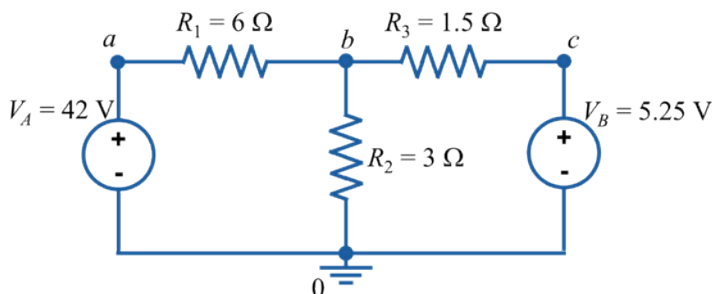


Figura 5.2. Identificación y marcado de nodos en el circuito.

Observemos que se ha seleccionado como el nodo de referencia o nodo 0 a la terminal marcada con el símbolo de tierra \perp . Notemos que el nodo de referencia cumple con la mayoría de los requisitos mencionados en el paso 1 para resolver circuitos con nodos. Están conectadas la mayor cantidad de ramas, en este caso tres; están conectadas todas las fuentes de voltaje, en este caso dos, y, además, las terminales negativas de ambas fuentes de voltaje están conectadas en este punto de referencia.

Lo siguiente es establecer una dirección de corriente para cada rama del circuito, es importante señalar que la dirección de la corriente que se asigna a cada rama puede ser arbitraria, aunque normalmente se asignan de izquierda a derecha (\rightarrow) y de arriba hacia abajo (\downarrow). Sin embargo, si alguien decide asignarlas de forma distinta, los resultados al final del problema no se verán afectados porque las ecuaciones quedan definidas de forma distinta. En la Figura 5.3 se muestra cómo quedarían representadas las direcciones de las corrientes con la forma indicada.

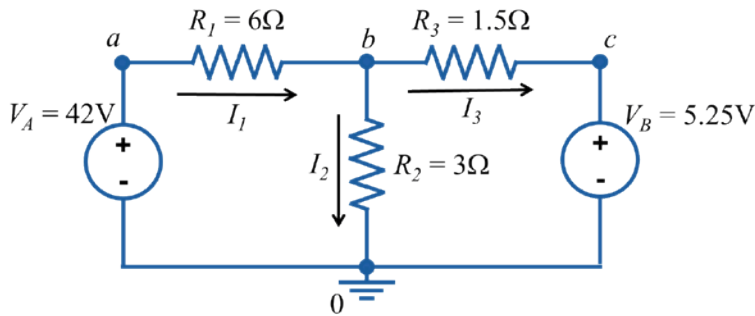


Figura 5.3. Establecimiento de la dirección en las corrientes para cada rama del circuito.

En el segundo paso, se construye una ecuación para cada uno de los nodos del circuito como se indica a continuación.

Para el nodo a :

El nodo a ya tiene definido un voltaje porque existe una fuente de voltaje entre éste y el nodo de referencia. Por lo tanto, no es necesario realizar ningún cálculo, sólo se debe expresar el voltaje que se encuentra entre el nodo a y el nodo de referencia de forma correcta. Para representarlo correctamente se debe observar que la terminal positiva de la fuente de voltaje está conectada en el nodo a , por lo tanto, el voltaje se expresa como positivo respecto del nodo de referencia ($+V_a$) y además la magnitud del voltaje de la fuente también es positiva ($+42\text{ V}$), resultando al final en un voltaje positivo. Este valor queda expresado directamente en la ecuación (5.1), como se indica:

$$\begin{aligned} v_a &= +V_A \\ v_a &= +(+42\text{ V}) \\ v_a &= 42\text{ V} \end{aligned} \tag{5.1}$$

Para el nodo c :

Analizamos el nodo c antes que al nodo b porque, al igual que el nodo a , también tiene una fuente de voltaje entre sí y el nodo de referencia, por lo tanto, no es necesario realizar ningún cálculo, sólo expresar el voltaje de la forma correcta. Lo que se debe observar es que la terminal positiva de la fuente de voltaje está conectada en el nodo c , por lo tanto, el voltaje se expresa como positivo respecto del nodo de referencia ($+V_c$) y, además, como la magnitud del voltaje es positiva ($+5.25\text{ V}$) esto ocasiona que al final el voltaje sea positivo. Este valor queda expresado directamente en la ecuación (5.2).

$$\begin{aligned} v_c &= +V_B \\ v_c &= +(+5.25\text{ V}) \\ v_c &= 5.25\text{ V} \end{aligned} \tag{5.2}$$

Si una fuente de voltaje está conectada entre un nodo y el nodo de referencia, entonces el valor de esa fuente será directamente el valor del voltaje del nodo, solo se debe calcular correctamente la polaridad del voltaje.

Para el nodo b :

Para calcular el voltaje de este nodo será necesario calcular las corrientes simbólicas I_1 , I_2 e I_3 , representadas en la Figura 5.3, y aplicar la ley de corrientes de Kirchhoff, tal como queda expresado en la ecuación (5.3).

$$\begin{aligned}\sum I_{entran} &= \sum I_{salen} \\ I_1 &= I_2 + I_3\end{aligned}\tag{5.3}$$

Ahora, para calcular la corriente en cada rama, a partir de la Figura 5.3, se define la diferencia de voltaje entre ambos nodos y se divide entre la resistencia que se encuentra en la rama, tal como queda expresado en las ecuaciones (5.4), (5.5) y (5.6).

$$I_1 = \frac{v_a - v_b}{R_1}\tag{5.4}$$

$$I_2 = \frac{v_b - 0 \text{ V}}{R_2} = \frac{v_b}{R_2}\tag{5.5}$$

$$I_3 = \frac{v_b - v_c}{R_3}\tag{5.6}$$

Se sustituyen las ecuaciones (5.4), (5.5) y (5.6) en la ecuación (5.3) resultando la ecuación (5.7).

$$\frac{v_a - v_b}{R_1} = \frac{v_b}{R_2} + \frac{v_b - v_c}{R_3}\tag{5.7}$$

De la ecuación (5.7) se despeja v_b , separamos cada voltaje entre su respectivo denominador y resulta.

$$\frac{v_a}{R_1} - \frac{v_b}{R_1} = \frac{v_b}{R_2} + \frac{v_b}{R_3} - \frac{v_c}{R_3}$$

Sacamos de factor común v_b y lo colocamos en el primer miembro de la ecuación, al resto de los términos los pasamos al segundo miembro.

$$v_b \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = \frac{v_a}{R_1} + \frac{v_c}{R_3}$$

Se despeja v_b para obtener la ecuación (5.8) quedando.

$$v_b = \frac{\frac{v_a}{R_1} + \frac{v_c}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \quad (5.8)$$

Sustituimos los valores de las resistencias, los voltajes ya definidos y resulta.

$$\begin{aligned} v_b &= \frac{\frac{42 \text{ V}}{6 \Omega} + \frac{5.25 \text{ V}}{1.5 \Omega}}{\frac{1}{6 \Omega} + \frac{1}{3 \Omega} + \frac{1}{1.5 \Omega}} \\ v_b &= \frac{7 \text{ A} + 3.5 \text{ A}}{1.1666 \Omega^{-1}} \\ v_b &= \frac{10.5 \text{ A}}{1.1666 \Omega^{-1}} \\ v_b &= 8.999 \text{ V} \approx 9 \text{ V} \end{aligned}$$

Cálculo de las corrientes de malla a partir de los voltajes de nodo

Con el análisis de nodos lo que se obtienen son los voltajes en cada nodo, mientras que con el análisis de mallas lo que se obtiene son las corrientes de malla. Para poder comparar los resultados de ambos análisis, a partir de los voltajes de nodo se pueden calcular las corrientes de malla o viceversa. Con las ecuaciones (5.4) y (5.6) se pueden calcular las corrientes de malla ya que, comparando las corrientes del circuito en la Figura 5.3 con las corrientes del circuito en la Figura 4.2, observamos que para este ejercicio la corriente I_1 del análisis con mallas es igual a la corriente I_1 del análisis con nodos, esto queda expresado en la ecuación (5.9).

$$I_{1\text{malla}} = I_{1\text{nodo}} = \frac{v_a - v_b}{R_1} \quad (5.9)$$

De igual manera, en este ejercicio la corriente I_2 del análisis con mallas es igual a la corriente I_3 del análisis con nodos, esto queda expresado en la ecuación (5.10).

$$I_{2\text{malla}} = I_{3\text{nodo}} = \frac{v_b - v_c}{R_3} \quad (5.10)$$

Por lo tanto, calculamos los valores de las ecuaciones (5.9) y (5.10) y los comparamos con las corrientes que ya se tienen del mismo problema, pero resuelto con el análisis de mallas en el capítulo anterior.

$$I_{1\text{malla}} = \frac{v_a - v_b}{R_1} = \frac{42 \text{ V} - 9 \text{ V}}{6 \Omega} = 5.5 \text{ A}$$

$$I_{2\text{malla}} = \frac{v_b - v_c}{R_3} = \frac{9 \text{ V} - 5.25 \text{ V}}{1.5 \Omega} = 2.5 \text{ A}$$

Ambas corrientes coinciden exactamente con los valores calculados con el análisis de mallas, por lo tanto, ambos tipos de análisis se pueden llevar a cabo para calcular corrientes o voltajes en el circuito.

Ejemplo 5-2. Calcular los voltajes de nodo de circuito de la Figura 5.4.

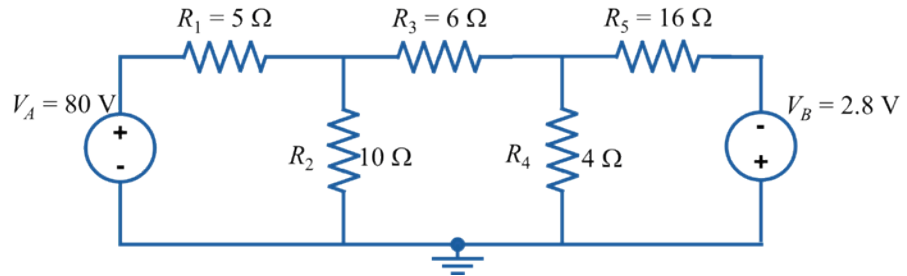


Figura 5.4. Circuito para aplicar el análisis con nodos.

Respuesta.

En el primer paso identificamos los nodos, los nombramos y al mismo tiempo asignamos las direcciones de las corrientes para cada rama. En la Figura 5.4 se observa que son cinco nodos ($n = 5$) los cuales se nombrarán nodo 0, nodo a , nodo b , nodo c , nodo d , y para cada uno de ellos quedará definido un voltaje (v_a , v_b , v_c y v_d) respecto del nodo 0. Observar que al igual que en el problema anterior, dos de los voltajes ya están definidos por las fuentes de voltaje (v_a y v_d) y solo restaría calcular los voltajes de los nodos restantes (v_b y v_c).

En la Figura 5.5 se muestra cómo quedarían los nodos, el nodo de referencia y las direcciones de las corrientes. En este problema se utiliza también la terminal de tierra como el nodo de referencia, observemos que, además de ser el nodo que tiene conectadas la mayor cantidad de ramas, tiene conectadas también a las dos fuentes de voltaje, sólo que ahora una con la terminal negativa (V_A) conectada a la referencia y la otra fuente con la terminal positiva (V_B) a la referencia.

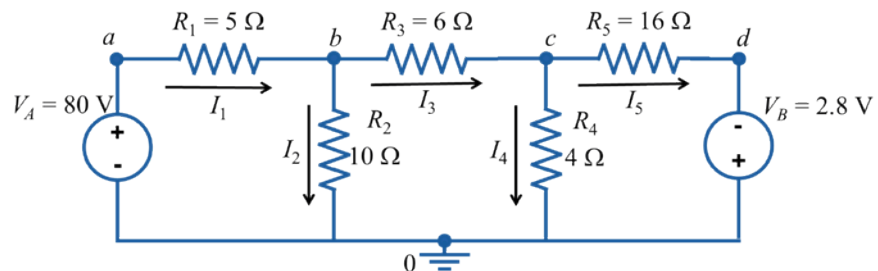


Figura 5.5. Identificación de los nodos y asignación de las direcciones de las corrientes en cada rama del circuito.

En el segundo paso, se construye una ecuación para cada uno de los nodos del circuito.

Para el nodo a :

El nodo a ya tiene definido un voltaje porque existe una fuente de voltaje entre éste y el nodo de referencia. Para representarlo correctamente se debe observar que la terminal positiva de la fuente de voltaje está conectada en el nodo a , por lo tanto, el voltaje se expresa como positivo respecto del nodo de referencia ($+V_A$) y además la magnitud del voltaje de la fuente también es positiva ($+80$ V), resultando al final en un voltaje positivo. Este valor queda expresado directamente en la ecuación (5.11) como se indica.

$$\begin{aligned}v_a &= +V_A \\v_a &= +(80 \text{ V}) \\v_a &= 80 \text{ V}\end{aligned}\tag{5.11}$$

Para el nodo d :

Analizamos el nodo d porque, al igual que el nodo a , también tiene una fuente de voltaje entre sí y el nodo de referencia, por lo tanto, no es necesario realizar ningún cálculo, sólo expresar el voltaje de la forma correcta. Lo que se debe observar es que la terminal negativa de la fuente de voltaje está conectada en el nodo d , entonces, el voltaje se expresa como negativo respecto del nodo de referencia ($-V_B$) y además como la magnitud del voltaje es positiva ($+2.8$ V) esto ocasiona que al final el voltaje sea negativo. Este valor queda expresado directamente en la ecuación (5.12).

$$\begin{aligned}v_d &= -V_B \\v_d &= -(2.8 \text{ V}) \\v_d &= -2.8 \text{ V}\end{aligned}\tag{5.12}$$

Para el nodo b :

Para calcular el voltaje de este nodo será necesario calcular las corrientes simbólicas I_1 , I_2 e I_3 representadas en la Figura 5.5 y aplicar la ley de corrientes de Kirchhoff en el nodo tal como queda expresado en la ecuación (5.13).

$$\begin{aligned}\sum I_{entran} &= \sum I_{salen} \\I_1 &= I_2 + I_3\end{aligned}\tag{5.13}$$

Ahora para calcular la corriente en cada rama, a partir de la Figura 5.5, se define la diferencia de voltaje entre ambos nodos y se divide entre la resistencia que se encuentra en la rama, tal como queda expresado en las ecuaciones (5.14), (5.15) y (5.16).

$$I_1 = \frac{v_a - v_b}{R_1} \quad (5.14)$$

$$I_2 = \frac{v_b - 0 \text{ V}}{R_2} = \frac{v_b}{R_2} \quad (5.15)$$

$$I_3 = \frac{v_b - v_c}{R_3} \quad (5.16)$$

Se sustituyen las ecuaciones (5.14), (5.15) y (5.16) en la ecuación (5.13) resultando la ecuación (5.17).

$$\frac{v_a - v_b}{R_1} = \frac{v_b}{R_2} + \frac{v_b - v_c}{R_3} \quad (5.17)$$

Sustituimos los valores de las resistencias y de los voltajes de la Figura 5.5 en la ecuación (5.17) para obtener una ecuación con dos incógnitas (v_b y v_c), resultando en la ecuación (5.18).

$$\frac{80 \text{ V} - v_b}{5 \Omega} = \frac{v_b}{10 \Omega} + \frac{v_b - v_c}{6 \Omega} \quad (5.18)$$

Para facilitar los cálculos, se omiten las unidades y en la ecuación (5.18) reacomodamos las variables en el primer miembro. Para facilitar la simplificación de la expresión, se multiplicarán ambos miembros de la ecuación por el mínimo común múltiplo de 5, 10 y 6, que en este caso es 30.

$$\left[\frac{80 - v_b}{5} = \frac{v_b}{10} + \frac{v_b - v_c}{6} \right] (30)$$

Multiplicamos término a término, simplificamos y reacomodamos para que resulte la ecuación (5.19).

$$\begin{aligned} (6)(80 - v_b) &= (3)v_b + (5)(v_b - v_c) \\ 480 - 6v_b &= 3v_b + 5v_b - 5v_c \\ -14v_b + 5v_c &= -480 \end{aligned} \quad (5.19)$$

Para el nodo c:

Para calcular el voltaje de este nodo será necesario volver a utilizar la corriente I_3 definida en la ecuación (5.16), y calcular las corrientes simbólicas I_4 e I_5 , representadas en la Figura 5.5 para aplicar la ley de corrientes de Kirchhoff en el nodo tal como queda expresado en la ecuación (5.20).

$$\begin{aligned} \sum I_{entran} &= \sum I_{salen} \\ I_3 &= I_4 + I_5 \end{aligned} \quad (5.20)$$

Ahora, para calcular las corrientes restantes en cada rama, a partir de la Figura 5.5, se define la diferencia de voltaje entre ambos nodos y se divide entre la resistencia que se encuentra en la rama, tal como queda expresado en las ecuaciones (5.16), (5.21) y (5.22).

$$I_4 = \frac{v_c - 0 \text{ V}}{R_4} = \frac{v_c}{R_4} \quad (5.21)$$

$$I_5 = \frac{v_c - v_d}{R_5} \quad (5.22)$$

Se sustituyen las ecuaciones (5.16), (5.21) y (5.22) en la ecuación (5.20) resultando la ecuación (5.23).

$$\frac{v_b - v_c}{R_3} = \frac{v_c}{R_4} + \frac{v_c - v_d}{R_5} \quad (5.23)$$

Sustituimos los valores de las resistencias y de los voltajes de la Figura 5.5 en la ecuación (5.23) para obtener la segunda ecuación con dos incógnitas (v_b y v_c), resultando en la ecuación (5.24).

$$\begin{aligned} \frac{v_b - v_c}{6 \Omega} &= \frac{v_c}{4 \Omega} + \frac{v_c - (-2.8 \text{ V})}{16 \Omega} \\ \frac{v_b - v_c}{6 \Omega} &= \frac{v_c}{4 \Omega} + \frac{v_c + 2.8 \text{ V}}{16 \Omega} \end{aligned} \quad (5.24)$$

Para facilitar los cálculos, se omiten las unidades y en la ecuación reacomodamos las variables en el primer miembro. Para facilitar la simplificación de la expresión, se multiplicará por el mínimo común múltiplo de 6, 4 y 16, que en este caso es 48.

$$\left[\frac{v_b - v_c}{6} = \frac{v_c}{4} + \frac{v_c + 2.8}{16} \right] (48)$$

Multiplicamos término a término y reacomodamos para que resulte la ecuación (5.25).

$$\begin{aligned} (8)(v_b - v_c) &= (12)v_c + (3)(v_c + 2.8) \\ 8v_b - 8v_c &= 12v_c + 3v_c + 8.4 \\ 8v_b - 23v_c &= 8.4 \end{aligned} \quad (5.25)$$

El tercer paso consiste en agrupar las ecuaciones (5.19) y (5.25) para formar un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, resolverlas y obtener los voltajes de los nodos.

$$\left. \begin{aligned} -14v_b + 5v_c &= -480 \\ 8v_b - 23v_c &= 8.4 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} Ec(I) \\ Ec(II) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Dos ecuaciones} \\ \text{con dos incógnitas} \end{array}$$

Utilizamos la regla de Cramer para resolver el sistema.

$$Det(A) = \begin{vmatrix} -14 & 5 \\ 8 & -23 \end{vmatrix} = [(-14)(-23)] - [(5)(8)] = 322 - 40$$

$$Det(A) = 282$$

$$v_b = \frac{\begin{vmatrix} -480 & 5 \\ 8.4 & -23 \end{vmatrix}}{Det(A)} = \frac{[(-480)(-23)] - [(5)(8.4)]}{282} = \frac{11040 - 42}{282}$$

$$v_b = \frac{10,998}{282} = 39 \text{ V}$$

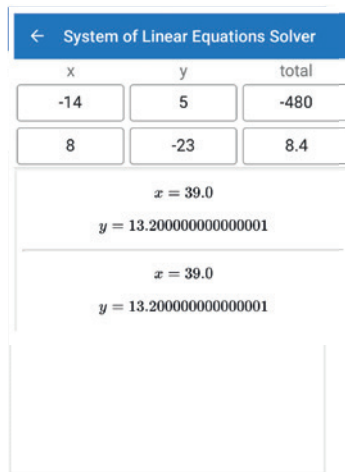
$$v_c = \frac{\begin{vmatrix} -14 & -480 \\ 8 & 8.4 \end{vmatrix}}{Det(A)} = \frac{[(-14)(8.4)] - [(-480)(8)]}{282} = \frac{-117.6 - (-3840)}{282}$$

$$v_c = \frac{3,722.4}{282} = 13.2 \text{ V}$$

Una manera rápida para resolver el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas del problema es utilizando la *app System of Linear Equations Solver*. A partir de la $E_c(I)$ y de la $E_c(II)$, de este problema, se sustituyen en la *app* y se obtienen los resultados para los voltajes.

$$\left. \begin{aligned} -14v_b + 5v_c &= -480 \\ 8v_b - 23v_c &= 8.4 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} Ec(I) \\ Ec(II) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Dos ecuaciones} \\ \text{con dos incógnitas} \end{array}$$

En la Figura 5.6 se muestra la aplicación con los datos de las ecuaciones y los resultados de los voltajes v_b y v_c solo que con nombres de variables distintos. En la aplicación los nombres de las variables son x , y , z y t , pero eso no es ningún inconveniente ya que el resultado es lo importante.



$$v_b = 39 \text{ V}$$

$$v_c = 13.2 \text{ V}$$

Figura 5.6. App System Linear Equations Solver para un Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Ejemplo 5-3. Calcular los voltajes de nodo corrientes del circuito de la Figura 5.7.

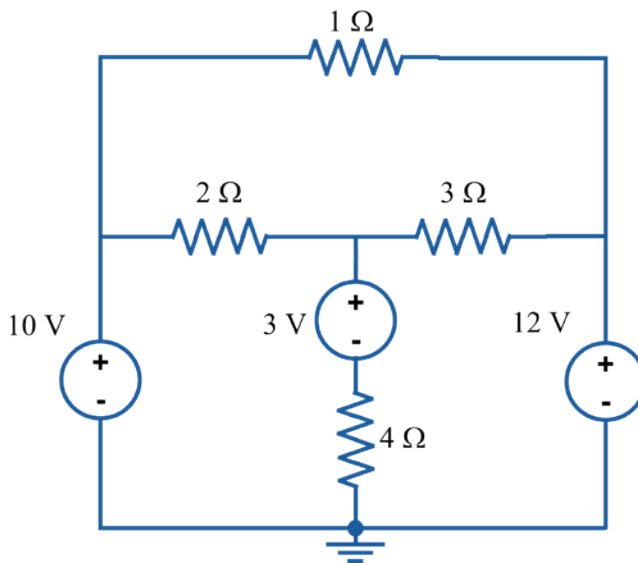


Figura 5.7. Circuito con tres fuentes de voltaje para cálculo de voltajes de nodo.

Respuesta.

En el circuito se aprecia la presencia de cinco nodos ($n = 5$) los cuales se nombrarán nodo 0, nodo a , nodo b , nodo c , nodo d , y para ellos quedarán definidos cuatro voltajes (v_a , v_b , v_c y v_d) respecto del nodo 0. Observar que al igual que en los problemas anteriores dos de los voltajes, en este caso el de 10 V y el de 12 V, ya están definidos por las fuentes de voltaje al estar conectados directamente en la terminal de tierra, pero existe una tercera fuente de 3 V que no está conectada directamente a tierra. Esta fuente de voltaje de 3 V se encuentra conectada en serie con una resistencia de 4 Ω y en una

rama que está compartida entre dos mallas. Para el análisis con nodos, resulta conveniente que todas las fuentes de voltaje estén conectadas a la terminal de tierra, por lo tanto, en este ejemplo veremos cómo poder conseguir esto para la tercera fuente de alimentación. La fuente de 3 V y la resistencia de $4\ \Omega$, al estar conectadas en una misma rama, se pueden intercambiar y no afectan al comportamiento eléctrico del circuito. De esta manera, las tres fuentes de voltaje estarían conectadas en la terminal de tierra y, así, tres de los cuatro voltajes que se necesitan calcular ya estarán definidos.

En la Figura 5.8 se muestra cómo queda el circuito al intercambiar la fuente de voltaje y la resistencia para que la fuente de voltaje quede conectada directamente a la terminal de tierra.

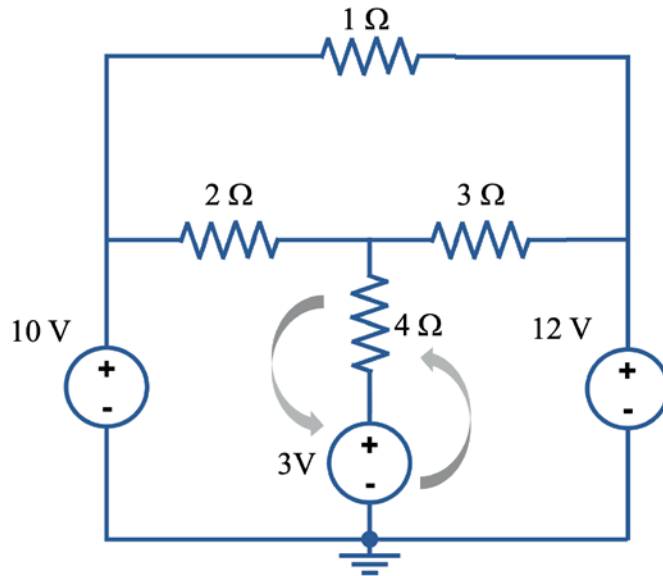


Figura 5.8. Intercambio de posición entre la fuente de voltaje y resistencia en una misma rama.

Una vez realizado este intercambio entre dos de los componentes de una misma rama, comenzamos con el análisis del circuito, aplicando los pasos para calcular los voltajes en los nodos.

Primero identificamos y nombramos los nodos y, al mismo tiempo, asignamos las direcciones de las corrientes para cada rama del circuito. En la Figura 5.9 se aprecia cómo quedan definidos los nodos y las direcciones de las corrientes.

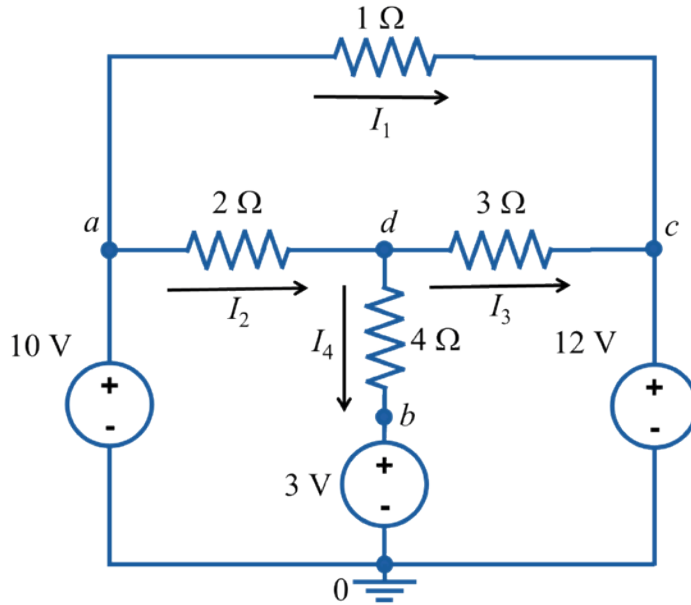


Figura 5.9. Identificación y nombramiento de los nodos, así como la dirección de las corrientes en el circuito.

En el segundo paso calculamos las ecuaciones para cada nodo y, en algunos casos, directamente el voltaje de cada nodo.

Para el nodo a :

El nodo a ya tiene definido un voltaje porque existe una fuente de voltaje entre éste y el nodo de referencia. Por lo tanto, no es necesario realizar ningún cálculo, sólo se debe expresar el voltaje que se encuentra entre el nodo a y el nodo de referencia de forma correcta. Para representarlo correctamente se debe observar que la terminal positiva de la fuente de voltaje está conectada en el nodo a , por lo tanto, el voltaje se expresa como positivo respecto del nodo de referencia y, además, la magnitud del voltaje de la fuente también es positiva, por lo tanto, resulta en un voltaje positivo de $+(+10\text{ V})$. Este valor queda expresado directamente en la ecuación (5.26), como se indica:

$$v_a = +(+10\text{ V})$$

$$v_a = 10\text{ V} \quad (5.26)$$

Para el nodo b :

En el nodo b ocurre exactamente lo mismo que con el nodo a , ya tiene definido un voltaje entre sí y el nodo de referencia. Por lo tanto, este valor queda expresado directamente en la ecuación (5.27) como se indica.

$$v_b = +(+3\text{ V})$$

$$v_b = 3\text{ V} \quad (5.27)$$

Para el nodo c :

En el nodo c ocurre lo mismo que con el nodo a y b , ya tiene definido un voltaje, por lo tanto, este valor queda expresado directamente en la ecuación (5.28) como se indica.

$$\begin{aligned}v_c &= +(+12 \text{ V}) \\v_c &= 12 \text{ V}\end{aligned}\tag{5.28}$$

Para el nodo d :

Para calcular el voltaje de este nodo es necesario calcular las corrientes simbólicas I_2 , I_3 e I_4 representadas en la Figura 5.9 y aplicar la ley de corrientes de Kirchhoff en el nodo d , tal como queda expresado en la ecuación (5.29).

$$\begin{aligned}\sum I_{entran} &= \sum I_{salen} \\I_2 &= I_3 + I_4\end{aligned}\tag{5.29}$$

Ahora, para calcular la corriente en cada rama, a partir de la Figura 5.9 se define la diferencia de voltaje entre ambos nodos y se divide entre la resistencia que se encuentra en la rama, tal como queda expresado en las ecuaciones (5.30), (5.31) y (5.32).

Para la corriente I_2 se tiene:

$$I_2 = \frac{v_a - v_d}{2 \Omega}$$

Sustituimos el valor de v_a y resulta:

$$I_2 = \frac{10 \text{ V} - v_d}{2 \Omega}\tag{5.30}$$

Para la corriente I_3 se tiene:

$$I_3 = \frac{v_d - v_c}{3 \Omega}$$

Sustituimos el valor de v_c y resulta:

$$I_3 = \frac{v_d - 12 \text{ V}}{3 \Omega}\tag{5.31}$$

Para la corriente I_4 se tiene:

$$I_4 = \frac{v_d - v_b}{4 \Omega}$$

Sustituimos el valor de v_b y resulta:

$$I_4 = \frac{v_d - 3 \text{ V}}{4 \Omega}\tag{5.32}$$

Se sustituyen las ecuaciones (5.30), (5.31) y (5.32) en la ecuación (5.29) pero, por facilidad en los cálculos, se omiten las unidades, resultando en la ecuación (5.33).

$$\frac{10 - v_d}{2} = \frac{v_d - 12}{3} + \frac{v_d - 3}{4} \quad (5.33)$$

Observamos que nos resulta una ecuación con una sola incógnita, en este caso “ v_d ”, en la que despejarla es sencillo ya que se multiplican ambos lados de la ecuación (5.33) por el mínimo común múltiplo de 2, 3 y 4, que en este caso es 12. Se simplifica la expresión y nos resulta la ecuación (5.34).

$$\left[\frac{10 - v_d}{2} = \frac{v_d - 12}{3} + \frac{v_d - 3}{4} \right] (12)$$

$$(6)(10 - v_d) = (4)(v_d - 12) + (3)(v_d - 3)$$

$$60 - 6v_d = 4v_d - 48 + 3v_d - 9$$

$$-13v_d = -117$$

$$v_d = \frac{-117}{-13}$$

$$v_d = 9 \text{ V} \quad (5.34)$$

De esta manera, y de una forma rápida y sencilla, se calculan los cuatro voltajes de los nodos. Ya con los voltajes definidos para todos los nodos, es posible calcular cualquier valor de corriente, voltaje o potencia en cualquier componente del circuito de la Figura 5.9.

Nótese también que, a pesar de que en el circuito se tienen cinco nodos ($n = 5$), y se esperaría haber tenido un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas, sólo se tuvo que resolver una sola ecuación con una incógnita, por tener 3 fuentes de voltaje conectadas directamente al nodo de referencia.

Este mismo problema se resolvió en el capítulo anterior utilizando el análisis con mallas, lo cual resultó un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

Ejemplo 5-4. Calcular los voltajes de nodo en el circuito de la Figura 5.10.

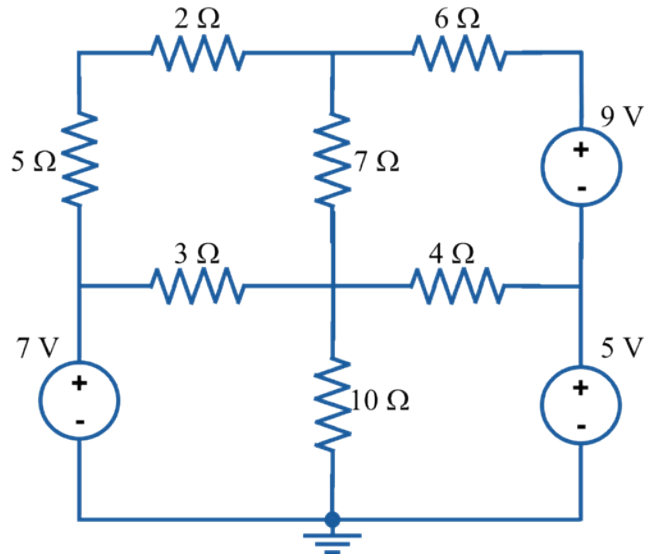


Figura 5.10. Circuito de 7 nodos con fuentes de voltaje.

Respuesta.

En el circuito se tienen 7 nodos ($n = 7$), pero, ya que las resistencias de $5\ \Omega$ y $2\ \Omega$ se encuentran conectadas en serie en la misma rama, se pueden sumar para dejar una sola resistencia equivalente de $7\ \Omega$. Con esto se consigue disminuir un nodo y de esta manera simplificar los cálculos.

Como primer paso se representarán 6 nodos ($n = 6$), los cuales se nombrarán nodo 0, nodo a , nodo b , nodo c , nodo d , nodo e y para los cuales quedan definidos cinco voltajes (v_a , v_b , v_c , v_d y v_e) respecto del nodo 0. En la Figura 5.11 se muestran cómo quedan propuestos los nodos, el nodo de referencia y las direcciones de las corrientes.

Al igual que ocurrió en los problemas anteriores ya están definidos tres de los 5 voltajes por tener fuentes de voltaje conectadas al nodo de referencia, en este caso la de $7\ \text{V}$, la de $5\ \text{V}$, y una de $14\ \text{V}$ (que resulta de la suma de la fuente de $9\ \text{V}$ y de la fuente de $5\ \text{V}$).

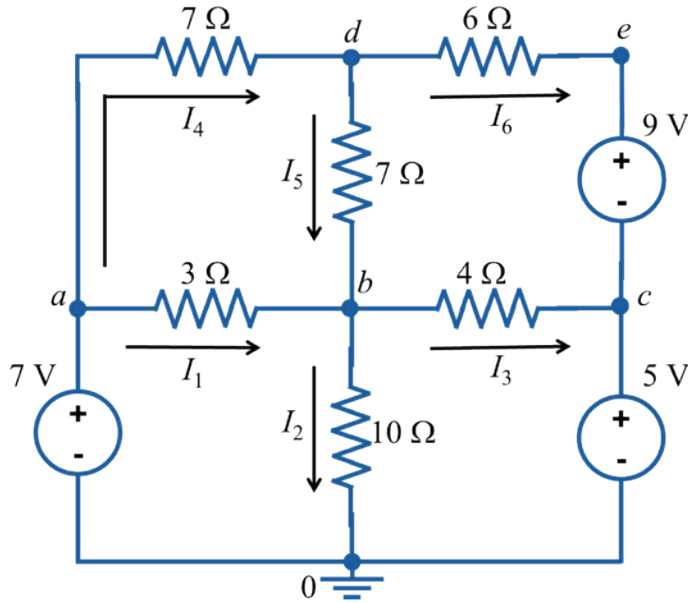


Figura 5.11. Propuesta de 6 nodos y direcciones de corrientes para el circuito.

En el segundo paso calculamos las ecuaciones para cada nodo y en algunos casos directamente el voltaje para cada nodo. Comenzamos con los nodos que ya tienen definido un voltaje por tener una fuente desde el nodo hasta el nodo de referencia.

Para el nodo a :

El nodo a ya tiene definido un voltaje porque existe una fuente de voltaje entre éste y el nodo de referencia. Para representarlo correctamente se debe observar que la terminal positiva de la fuente de voltaje está conectada en el nodo a , por lo tanto, el voltaje se expresa como positivo respecto del nodo de referencia y además la magnitud del voltaje de la fuente también es positiva, por lo tanto, resulta en un voltaje positivo de $+(+7\text{ V})$. Este valor queda expresado directamente en la ecuación (5.35) como se indica.

$$v_a = +(7\text{ V})$$

$$v_a = 7\text{ V} \tag{5.35}$$

Para el nodo c :

El nodo c ya tiene definido un voltaje porque existe una fuente de voltaje entre éste y el nodo de referencia. Este valor queda expresado directamente en la ecuación (5.36), como se indica:

$$v_c = +(5\text{ V})$$

$$v_c = 5\text{ V} \tag{5.36}$$

Para el nodo e :

El nodo e también ya tiene definido un voltaje porque existen dos fuentes de voltaje conectadas en serie desde éste hasta el nodo de

referencia. Para calcular este voltaje, primero representamos el voltaje de la fuente de 9 V tal como se indica en la ecuación (5.37).

$$v_{ec} = 9 \text{ V} \quad (5.37)$$

El valor del voltaje del nodo hasta el nodo de referencia queda expresado como se indica en la ecuación (5.38).

$$v_e = v_{ec} + v_c \quad (5.38)$$

Sustituimos los valores de los voltajes y resulta la ecuación (5.39) con el voltaje del nodo e .

$$\begin{aligned} v_e &= 9 \text{ V} + 5 \text{ V} \\ v_e &= 14 \text{ V} \end{aligned} \quad (5.39)$$

Continuamos con el cálculo del resto de los voltajes de los nodos.

Para el nodo b :

Para calcular el voltaje de este nodo es necesario calcular las corrientes simbólicas I_1 , I_2 , I_3 e I_5 representadas en la Figura 5.11 y aplicar la ley de corrientes de Kirchhoff en el nodo b tal como queda expresado en la ecuación (5.40).

$$\begin{aligned} \sum I_{entran} &= \sum I_{salen} \\ I_1 + I_5 &= I_2 + I_3 \end{aligned} \quad (5.40)$$

Ahora, para calcular la corriente en cada rama, a partir de la Figura 5.11 se define la diferencia de voltaje entre cada par de nodos y se divide entre la resistencia que se encuentra en la rama, tal como queda expresado en las ecuaciones (5.41), (5.42), (5.43) y (5.44).

Para la corriente I_1 se tiene:

$$I_1 = \frac{v_a - v_b}{3 \Omega}$$

Sustituimos el valor de v_a y resulta:

$$I_1 = \frac{7 \text{ V} - v_b}{3 \Omega} \quad (5.41)$$

Para la corriente I_5 se tiene:

$$I_5 = \frac{v_d - v_b}{7 \Omega} \quad (5.42)$$

Para la corriente I_2 se tiene:

$$I_2 = \frac{v_b - 0 \text{ V}}{10 \Omega}$$

$$I_2 = \frac{v_b}{10 \Omega} \quad (5.43)$$

Para la corriente I_3 se tiene:

$$I_3 = \frac{v_b - v_c}{4 \Omega}$$

Sustituimos el valor de v_c y resulta:

$$I_3 = \frac{v_b - 5 \text{ V}}{4 \Omega} \quad (5.44)$$

Se sustituyen las ecuaciones (5.41), (5.42), (5.43) y (5.44) en la ecuación (5.40) para obtener la ecuación (5.45).

$$\frac{7 \text{ V} - v_b}{3 \Omega} + \frac{v_d - v_b}{7 \Omega} = \frac{v_b}{10 \Omega} + \frac{v_b - 5 \text{ V}}{4 \Omega} \quad (5.45)$$

Para simplificar los cálculos se omiten las unidades y se multiplican ambos lados de la ecuación por el mínimo común múltiplo de 3, 7, 10 y 4 resultando en este caso 420. Al hacer la simplificación de los cálculos resulta la ecuación (5.46).

$$\left[\frac{7 - v_b}{3} + \frac{v_d - v_b}{7} = \frac{v_b}{10} + \frac{v_b - 5}{4} \right] (420)$$

$$(140)(7 - v_b) + (60)(v_d - v_b) = (42)(v_b) + (105)(v_b - 5)$$

$$980 - 140v_b + 60v_d - 60v_b = 42v_b + 105v_b - 525$$

$$-347v_b + 60v_d = -1,505 \quad (5.46)$$

Para el nodo d :

Para calcular el voltaje de este nodo es necesario calcular las corrientes simbólicas I_4 , I_5 , e I_6 , representadas en la Figura 5.11, y aplicar la ley de corrientes de Kirchhoff en el nodo d , tal como queda expresado en la ecuación (5.47).

$$\sum I_{entran} = \sum I_{salen}$$

$$I_4 = I_5 + I_6 \quad (5.47)$$

Ahora, para calcular la corriente en cada rama, a partir de la Figura 5.11 se define la diferencia de voltaje entre cada par de no-

dos y se divide entre la resistencia que se encuentra en la rama, tal como queda expresado en las ecuaciones (5.48), (5.42) y (5.49).

Para la corriente I_4 se tiene:

$$I_4 = \frac{v_a - v_d}{7 \Omega}$$

Sustituimos el valor de v_a y resulta:

$$I_4 = \frac{7 \text{ V} - v_d}{7 \Omega} \quad (5.48)$$

Para la corriente I_6 se tiene:

$$I_6 = \frac{v_d - v_e}{6 \Omega}$$

Sustituimos el valor de v_e y resulta:

$$I_6 = \frac{v_d - 14 \text{ V}}{6 \Omega} \quad (5.49)$$

Se sustituyen las ecuaciones (5.48), (5.42) y (5.49) en la ecuación (5.47) para obtener la ecuación (5.50).

$$\frac{7 \text{ V} - v_d}{7 \Omega} = \frac{v_d - v_b}{7 \Omega} + \frac{v_d - 14 \text{ V}}{6 \Omega} \quad (5.50)$$

Para simplificar los cálculos se omiten las unidades y se multiplican ambos lados de la ecuación por el mínimo común múltiplo de 7 y 6 resultando en este caso 42. Al hacer la simplificación de los cálculos resulta la ecuación (5.51).

$$\left[\frac{7 - v_d}{7} = \frac{v_d - v_b}{7} + \frac{v_d - 14}{6} \right] \quad (42)$$

$$(6)(7 - v_d) = (6)(v_d - v_b) + (7)(v_d - 14)$$

$$42 - 6v_d = 6v_d - 6v_b + 7v_d - 98$$

$$6v_b - 19v_d = -140 \quad (5.51)$$

El tercer paso consiste en agrupar las ecuaciones (5.46) y (5.51) para formar un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, resolverlas y obtener los voltajes de los nodos restantes.

$$\begin{cases} -347v_b + 60v_d = -1,505 & Ec(I) \\ 6v_b - 19v_d = -140 & Ec(II) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Dos ecuaciones} \\ \text{con dos incógnitas} \end{array}$$

Utilizamos la regla de Cramer para resolver el sistema.

$$\text{Det}(A) = \begin{vmatrix} -347 & 60 \\ 6 & -19 \end{vmatrix} = [(-347)(-19)] - [(60)(6)] = 6,593 - 360$$

$$\text{Det}(A) = 6,233$$

$$v_b = \frac{\begin{vmatrix} -1,505 & 60 \\ -140 & -19 \end{vmatrix}}{\text{Det}(A)} = \frac{[(-1,505)(-19)] - [(60)(-140)]}{6,233} = \frac{28,595 + 8,400}{6,233}$$

$$v_b = \frac{36,995}{6,233} = 5.93 \text{ V}$$

$$v_d = \frac{\begin{vmatrix} -347 & -1,505 \\ 6 & -140 \end{vmatrix}}{\text{Det}(A)} = \frac{[(-347)(-140)] - [(-1,505)(6)]}{6,233} = \frac{48,580 + 9,030}{6,233}$$

$$v_d = \frac{57,610}{6,233} = 9.24 \text{ V}$$

Resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas utilizando la *app System of Linear Equations Solver*. A partir de la *Ec(I)* y de la *Ec(II)* de este problema, se sustituyen en la *app* y se obtienen los resultados para los voltajes.

$$\begin{cases} -347v_b + 60v_d = -1,505 & Ec(I) \\ 6v_b - 19v_d = -140 & Ec(II) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Dos ecuaciones} \\ \text{con dos incógnitas} \end{array}$$

En la Figura 5.12 se muestra la aplicación con los datos de las ecuaciones y los resultados de los voltajes v_b y v_d , sólo que con nombres de variables distintos.

| ← System of Linear Equations Solver | | |
|--|-----|-------|
| x | y | total |
| -347 | 60 | -1505 |
| 6 | -19 | -140 |
| $x = \frac{36995}{6233}$ $y = \frac{57610}{6233}$ | | |
| $x = 5.935344136050056$ $y = 9.242740253489492$ | | |

$$v_b = 5.39 \text{ V}$$

$$v_d = 9.24 \text{ V}$$

Figura 5.12. *App System Linear Equations Solver* para un Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

NODOS CON FUENTES DE CORRIENTE

Ejemplo 5-5. Calcular los voltajes de nodo en el circuito de la Figura 5.13.

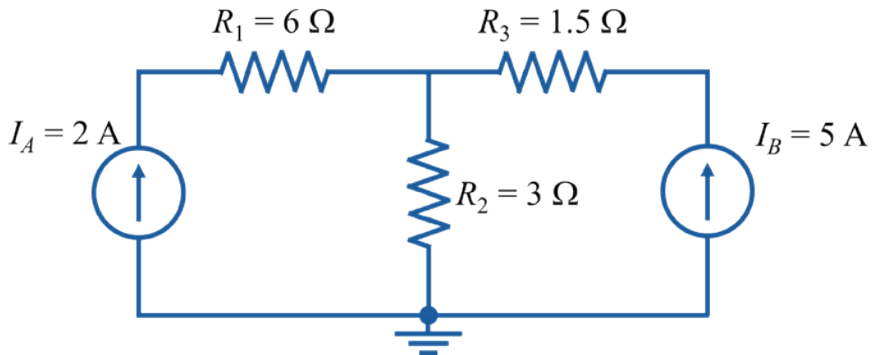


Figura 5.13. Circuito de cuatro nodos con fuentes de corriente.

Respuesta.

Como primer paso se identifican los nodos, en este caso 4 nodos ($n = 4$), los cuales se nombrarán nodo 0, nodo a , nodo b , nodo c , y para los cuales quedan definidos tres voltajes (v_a , v_b y v_c) respecto del nodo 0. En la Figura 5.14 se muestran cómo quedan propuestos los nodos, el nodo de referencia y las direcciones de las corrientes.

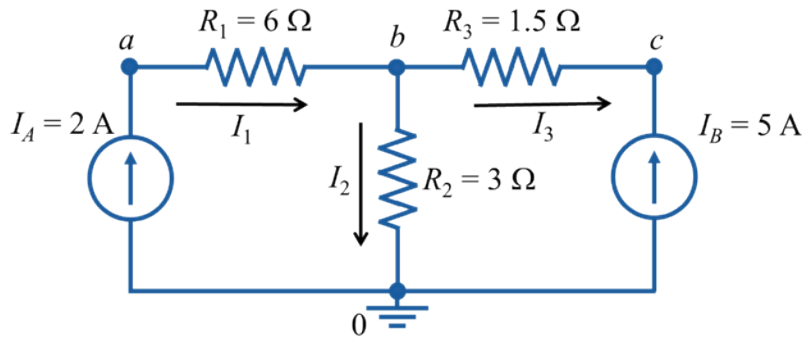


Figura 5.14. Identificación de los nodos y las direcciones de las corrientes en cada rama del circuito.

En el segundo paso, se construye una ecuación para cada uno de los nodos del circuito.

Para el nodo a :

Para calcular el voltaje de este nodo es necesario calcular la corriente simbólica I_1 , representada en la Figura 5.14, y aplicar la ley de corrientes de Kirchhoff en el nodo, tal como queda expresado en la ecuación (5.52).

$$\sum I_{\text{entran}} = \sum I_{\text{salen}}$$

$$I_A = I_1 \quad (5.52)$$

Ahora, para calcular la corriente en la rama, a partir de la Figura 5.14 se define la diferencia de voltaje entre ambos nodos y se divide entre la resistencia que se encuentra en la rama, tal como queda expresado en la ecuación (5.53).

$$I_1 = \frac{v_a - v_b}{R_1}$$

$$I_1 = \frac{v_a - v_b}{6 \Omega} \quad (5.53)$$

Sustituimos el valor de la corriente I_A de la Figura 5.14 y la ecuación (5.53) en la ecuación (5.52) resultando la ecuación (5.54).

$$2 \text{ A} = \frac{v_a - v_b}{6 \Omega} \quad (5.54)$$

Reacomodamos la ecuación anterior y omitimos las unidades para facilitar los cálculos quedando la ecuación (5.55).

$$v_a - v_b = 12 \quad (5.55)$$

Para el nodo b :

Para calcular el voltaje de este nodo es necesario utilizar las corrientes simbólicas I_1 , I_2 , e I_3 representadas en la Figura 5.14, y aplicar la ley de corrientes de Kirchhoff en el nodo b , tal como queda expresado en la ecuación (5.56).

$$\sum I_{entran} = \sum I_{salen}$$

$$I_1 = I_2 + I_3 \quad (5.56)$$

Ahora, para calcular la corriente en cada rama, a partir de la Figura 5.14 se define la diferencia de voltaje entre cada par de nodos y se divide entre la resistencia que se encuentra en la rama, tal como queda expresado en las ecuaciones (5.53), (5.57) y (5.58).

Para la corriente I_2 se tiene:

$$I_2 = \frac{v_b - 0 \text{ V}}{R_2}$$

$$I_2 = \frac{v_b}{3 \Omega} \quad (5.57)$$

Para la corriente I_3 se tiene:

$$I_3 = \frac{v_b - v_c}{R_3}$$

$$I_3 = \frac{v_b - v_c}{1.5 \Omega} \quad (5.58)$$

Se sustituyen las ecuaciones (5.53), (5.57) y (5.58) en la ecuación (5.56) para obtener la ecuación (5.59).

$$\frac{v_a - v_b}{6 \Omega} = \frac{v_b}{3 \Omega} + \frac{v_b - v_c}{1.5 \Omega} \quad (5.59)$$

Para simplificar los cálculos se omiten las unidades y se multiplican ambos lados de la ecuación por 6. Al hacer la simplificación de los cálculos resulta la ecuación (5.60).

$$\left[\frac{v_a - v_b}{6} = \frac{v_b}{3} + \frac{v_b - v_c}{1.5} \right] (6)$$

$$(v_a - v_b) = (2)(v_b) + (4)(v_b - v_c)$$

$$v_a - v_b = 2v_b + 4v_b - 4v_c$$

$$v_a - 7v_b + 4v_c = 0 \quad (5.60)$$

Para el nodo c :

Para calcular el voltaje de este nodo es necesario calcular la corriente simbólica I_3 , representada en la Figura 5.14, y aplicar la ley de corrientes de Kirchhoff en el nodo, tal como queda expresado en la ecuación (5.61).

$$\sum I_{entran} = \sum I_{salen}$$

$$I_3 + I_B = 0 \quad (5.61)$$

Sustituimos el valor de la corriente I_B de la Figura 5.14 y la ecuación (5.58) en la (5.61), resultando la ecuación (5.62).

$$\frac{v_b - v_c}{1.5 \Omega} + 5 \text{ A} = 0 \quad (5.62)$$

Reacomodamos la ecuación anterior y omitimos las unidades para facilitar los cálculos, quedando la ecuación (5.63).

$$v_b - v_c = -7.5 \quad (5.63)$$

Como tercer paso, agrupamos las ecuaciones (5.55), (5.60) y (5.63) para formar un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, resolverlas y calcular los voltajes de los nodos en el circuito.

$$v_a - v_b = 12 \quad Ec(I)$$

$$v_a - 7v_b + 4v_c = 0 \quad Ec(II)$$

$$v_b - v_c = -7.5 \quad Ec(III)$$

Resolvemos el sistema utilizando la regla de Cramer.

$$Det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -7 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = [(7) + (0) + (0)] - [(0) + (4) + (1)]$$

$$Det(A) = 2$$

$$v_a = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{12} & -1 & 0 \\ \mathbf{0} & -7 & 4 \\ \mathbf{-7.5} & 1 & -1 \end{vmatrix}}{Det(A)} = \frac{[(84) + (0) + (30)] - [(0) + (48) + (0)]}{2}$$

$$v_a = \frac{66}{2} = 33 \text{ V}$$

$$v_b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \mathbf{12} & 0 \\ 1 & \mathbf{0} & 4 \\ 0 & \mathbf{-7.5} & -1 \end{vmatrix}}{Det(A)} = \frac{[(0) + (0) + (0)] - [(0) + (-30) + (-12)]}{2}$$

$$v_b = \frac{42}{2} = 21 \text{ V}$$

$$v_c = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & \mathbf{12} \\ 1 & -7 & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & \mathbf{-7.5} \end{vmatrix}}{Det(A)} = \frac{[(52.5) + (12) + (0)] - [(0) + (0) + (7.5)]}{2}$$

$$v_c = \frac{57}{2} = 28.5 \text{ V}$$

Obtenemos los resultados resolviendo el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas utilizando la *app System of Linear Equations Solver* que se muestra en la Figura 5.15.

| ← System of Linear Equations Solver | | | |
|--|----|----|-------|
| x | y | z | total |
| 1 | -1 | 0 | 12 |
| 1 | -7 | 4 | 0 |
| 0 | 1 | -1 | -7.5 |
| $x = 33.0$ $y = 21.0$ $z = 28.5$ | | | |

$$v_a = 33 \text{ V}$$

$$v_b = 21 \text{ V}$$

$$v_c = 28.5 \text{ V}$$

Figura 5.15. Solución del sistema de ecuaciones para el problema de nodos con fuentes de corriente.

Obsérvese que al resolver este ejercicio utilizando el análisis con nodos resultó un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, mientras que con el análisis de mallas, en el capítulo anterior, los resultados se obtuvieron prácticamente sin hacer ningún cálculo.

Ejemplo 5-6. Calcular los voltajes de nodo en el circuito de la Figura 5.16.

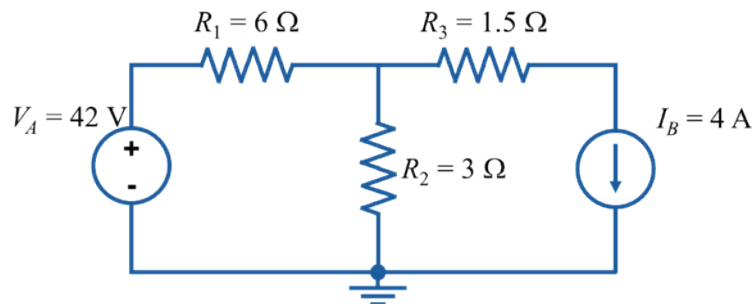


Figura 5.16. Circuito con fuente de voltaje y fuente de corriente.

Respuesta.

Como primer paso se identifican los nodos, en este caso 4 ($n = 4$), los cuales se nombrarán nodo 0, nodo a , nodo b , nodo c , y para los que quedan definidos tres voltajes (v_a , v_b y v_c) respecto del nodo 0. En la Figura 5.17 se presenta una propuesta de cómo quedan definidos los nodos y las direcciones de las corrientes.

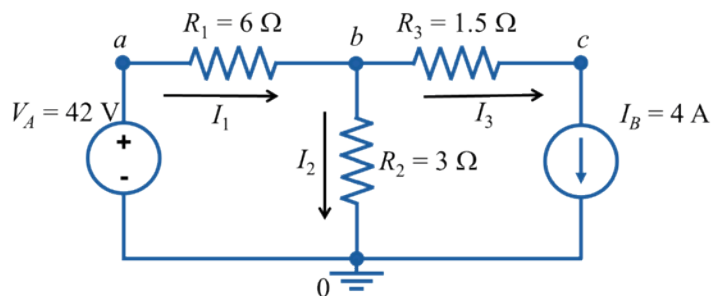


Figura 5.17. Nodos y direcciones de corrientes para el circuito con fuente de voltaje y fuente de corriente.

Como segundo paso, calculamos las ecuaciones de los voltajes de los nodos.

Nodo *a*:

Observamos que al igual que en los primeros ejercicios del capítulo ya se tiene definido este voltaje por tener una fuente de voltaje entre el nodo y el nodo de referencia. Este voltaje queda determinado en la ecuación (5.64). Sólo faltaría calcular los voltajes en los nodos restantes.

$$v_a = 42 \text{ V} \quad (5.64)$$

Nodo *b*:

Para calcular el voltaje de este nodo es necesario utilizar las corrientes simbólicas I_1 , I_2 , e I_3 representadas en la Figura 5.17 y aplicar la ley de corrientes de Kirchhoff en el nodo *b*, tal como queda expresado en la ecuación (5.56).

$$\begin{aligned} \sum I_{entran} &= \sum I_{salen} \\ I_1 &= I_2 + I_3 \end{aligned} \quad (5.65)$$

Ahora, para calcular la corriente en cada rama, a partir de la Figura 5.14 se define la diferencia de voltaje entre cada par de nodos y se divide entre la resistencia que se encuentra en la rama, tal como queda expresado en las ecuaciones (5.66), (5.67) y (5.69).

Para la corriente I_1 se tiene:

$$I_1 = \frac{v_a - v_b}{R_1}$$

Sustituimos los valores del circuito y resulta.

$$I_1 = \frac{42 \text{ V} - v_b}{6 \Omega} \quad (5.66)$$

Para la corriente I_2 se tiene:

$$I_2 = \frac{v_b - 0 \text{ V}}{R_2} = \frac{v_b}{R_2}$$

Sustituimos el valor de la resistencia y resulta.

$$I_2 = \frac{v_b}{3 \Omega} \quad (5.67)$$

Para la corriente I_3 se tiene:

$$I_3 = \frac{v_b - v_c}{R_3}$$

Sustituimos el valor de la resistencia y resulta.

$$I_3 = \frac{v_b - v_c}{1.5 \Omega} \quad (5.68)$$

Se sustituyen las ecuaciones (5.66), (5.67) y (5.68) en la ecuación (5.65) para obtener la ecuación (5.69).

$$\frac{42 \text{ V} - v_b}{6 \Omega} = \frac{v_b}{3 \Omega} + \frac{v_b - v_c}{1.5 \Omega} \quad (5.69)$$

Para simplificar los cálculos se omiten las unidades y se multiplican ambos lados de la ecuación por 6. Al hacer la simplificación de los cálculos resulta la ecuación (5.70).

$$\left[\frac{42 - v_b}{6} = \frac{v_b}{3} + \frac{v_b - v_c}{1.5} \right] (6)$$

$$(42 - v_b) = (2)(v_b) + (4)(v_b - v_c)$$

$$42 - v_b = 2v_b + 4v_b - 4v_c$$

$$-7v_b + 4v_c = -42 \quad (5.70)$$

Para el nodo c:

Para calcular el voltaje de este nodo sólo se utiliza la corriente simbólica I_3 , representada en la Figura 5.17, y aplicamos la ley de corrientes de Kirchhoff en el nodo, tal como queda expresado en la ecuación (5.71).

$$\sum I_{entran} = \sum I_{salen}$$

$$I_3 = I_B \quad (5.71)$$

Sustituimos el valor de la corriente simbólica I_3 y de la corriente I_B en la ecuación (5.71), resultando la ecuación (5.72).

$$\frac{v_b - v_c}{1.5 \Omega} = 4 \text{ A} \quad (5.72)$$

Reacomodamos la ecuación anterior y omitimos las unidades para facilitar los cálculos quedando la ecuación (5.73).

$$v_b - v_c = 6 \quad (5.73)$$

El tercer paso consiste en agrupar las ecuaciones (5.70) y (5.73) para formar un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, resolverlas y obtener los voltajes de los nodos restantes.

$$\left. \begin{array}{l} -7v_b + 4v_c = -42 \\ v_b - v_c = 6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} EC(I) \\ EC(II) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Dos ecuaciones} \\ \text{con dos incógnitas} \end{array}$$

Utilizamos la regla de Cramer para resolver el sistema.

$$\text{Det}(A) = \begin{vmatrix} -7 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = [7] - [4]$$

$$\text{Det}(A) = 3$$

$$v_b = \frac{\begin{vmatrix} -42 & 4 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}}{\text{Det}(A)} = \frac{[(-42)(-1)] - [(4)(6)]}{3} = \frac{42 - 24}{3}$$

$$v_b = \frac{18}{3} = 6 \text{ V}$$

$$v_c = \frac{\begin{vmatrix} -7 & -42 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}}{\text{Det}(A)} = \frac{[(-7)(6)] - [(-42)(1)]}{3} = \frac{-42 + 42}{3}$$

$$v_c = \frac{0}{3} = 0 \text{ V}$$

Resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas utilizando la *app System of Linear Equations Solver*. A partir de la *Ec(I)* y de la *Ec(II)* de este problema, se sustituyen en la *app* y se obtienen los resultados para los voltajes.

$$\begin{array}{l} -7v_b + 4v_c = -42 \\ v_b - v_c = 6 \end{array} \left. \begin{array}{l} Ec(I) \\ Ec(II) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Dos ecuaciones} \\ \text{con dos incógnitas} \end{array}$$

En la Figura 5.18 se muestra la aplicación con los datos de las ecuaciones y los resultados de los voltajes v_b y v_c .

| ← System of Linear Equations Solver | | | $v_b = 6 \text{ V}$ |
|-------------------------------------|----|-------|---------------------|
| x | y | total | $v_c = 0 \text{ V}$ |
| -7 | 4 | -42 | |
| 1 | -1 | 6 | |
| x = 6 | | | |
| y = 0 | | | |

Figura 5.18. *App System Linear Equations Solver* para un Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Ejemplo 5-7. Calcular los voltajes de nodo que se presentan en el circuito de la Figura 5.19.

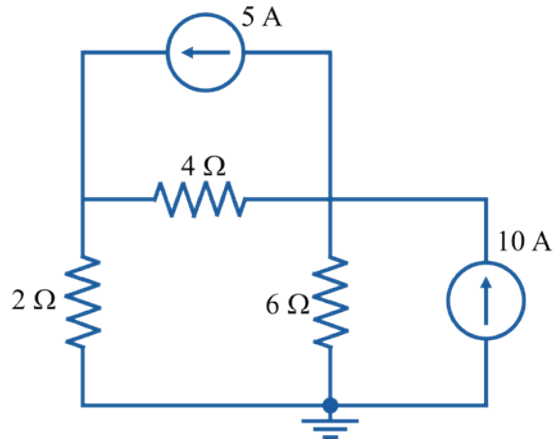


Figura 5.19. Circuito con tres nodos y dos fuentes de corriente.

Respuesta.

Como primer paso se identifican los nodos, en este caso 3 ($n = 3$), los cuales se nombrarán nodo 0, nodo a y nodo b , para los que quedan definidos dos voltajes (v_a y v_b) respecto del nodo 0. En la Figura 5.20 se presenta una propuesta de cómo quedan definidos los nodos y las direcciones de las corrientes.

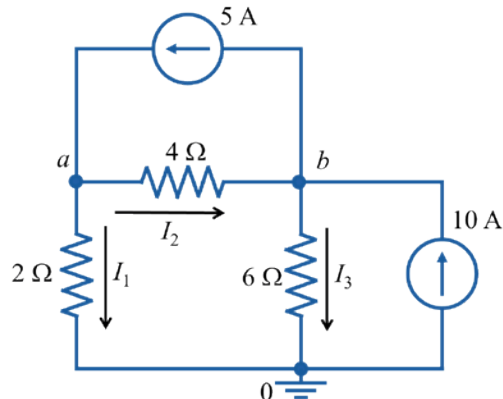


Figura 5.20. Nodos y direcciones de corrientes en el circuito.

En el segundo paso, calculamos las corrientes simbólicas y las ecuaciones de los voltajes de los nodos.

La corriente I_1 es:

$$I_1 = \frac{v_a - 0 \text{ V}}{2 \Omega} = \frac{v_a}{2 \Omega} \quad (5.74)$$

La corriente I_2 es:

$$I_2 = \frac{v_a - v_b}{4 \Omega} \quad (5.75)$$

La corriente I_3 es:

$$I_3 = \frac{v_b - 0 \text{ V}}{6 \Omega} = \frac{v_b}{6 \Omega} \quad (5.76)$$

Calculamos las ecuaciones de los voltajes de los nodos.

Nodo a :

Aplicamos la ley de corrientes de Kirchhoff en el nodo a y resulta la ecuación (5.77).

$$\begin{aligned} \sum I_{entran} &= \sum I_{salen} \\ 5 \text{ A} &= I_1 + I_2 \end{aligned} \quad (5.77)$$

Sustituimos las ecuaciones (5.74) y (5.75), simplificamos y obtenemos la ecuación (5.78).

$$5 \text{ A} = \frac{v_a}{2 \Omega} + \frac{v_a - v_b}{4 \Omega}$$

Para los cálculos en la ecuación eliminamos las unidades, aplicamos la propiedad simétrica y multiplicamos ambos lados de la ecuación por el mínimo común múltiplo de 2 y 4 para obtener la ecuación (5.78).

$$\begin{aligned} \left[\frac{v_a}{2} + \frac{v_a - v_b}{4} = 5 \right] (4) \\ 2v_a + v_a - v_b &= 20 \\ 3v_a - v_b &= 20 \end{aligned} \quad (5.78)$$

Nodo b :

Aplicamos la ley de corrientes de Kirchhoff en el nodo b y resulta la ecuación (5.79).

$$\begin{aligned} \sum I_{entran} &= \sum I_{salen} \\ 10 \text{ A} + I_2 &= 5 \text{ A} + I_3 \end{aligned} \quad (5.79)$$

Sustituimos las ecuaciones (5.75) y (5.76), simplificamos y obtenemos la ecuación (5.80).

$$10 \text{ A} + \frac{v_a - v_b}{4 \Omega} = 5 \text{ A} + \frac{v_b}{6 \Omega}$$

Para los cálculos, eliminamos las unidades y multiplicamos ambos lados de la ecuación por el mínimo común múltiplo de 4 y 6 para obtener la ecuación (5.78).

$$\left[10 + \frac{v_a - v_b}{4} = 5 + \frac{v_b}{6}\right] \quad (12)$$

$$120 + (3)(v_a - v_b) = 60 + 2v_b$$

$$120 + 3v_a - 3v_b = 60 + 2v_b$$

$$3v_a - 5v_b = -60 \quad (5.80)$$

En el tercer paso agrupamos las ecuaciones (5.78) y (5.80) para formar un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas; resolverlas y obtener los voltajes de los nodos.

$$\left. \begin{array}{l} 3v_a - v_b = 20 \\ 3v_a - 5v_b = -60 \end{array} \right\} \begin{array}{l} Ec(I) \\ Ec(II) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Dos ecuaciones} \\ \text{con dos incógnitas} \end{array}$$

El sistema se puede resolver con facilidad utilizando el método de suma o resta.

Multiplicamos la $Ec(II)$ por un factor de (-1) y resulta.

$$\begin{array}{rcl} [3v_a - 5v_b = -60](-1) & & Ec(II)^* \\ -3v_a + 5v_b & = & 60 \quad Ec(II)^* \end{array}$$

Sumamos la ecuación que resulta con la $Ec(I)$ y queda.

$$\begin{array}{rcl} \cancel{3v_a} - v_b & = & 20 \quad Ec(I) \\ \cancel{-3v_a} + 5v_b & = & 60 \quad Ec(II)^* \\ \hline 4v_b & = & 80 \end{array}$$

De la ecuación resultante despejamos el voltaje v_b .

$$v_b = \frac{80}{4}$$

$$\boxed{v_b = 20 \text{ V}}$$

Sustituimos el valor de v_b en la $Ec(I)$ o en la $Ec(II)$ para después despejar el valor de v_a ; en este caso, lo hacemos para la $Ec(I)$ obteniendo.

$$3v_a - v_b = 20$$

$$3v_a - (20) = 20$$

$$3v_a = 40$$

$$v_a = \frac{40}{3}$$

$$\boxed{v_a = 13.33 \text{ V}}$$

Reescribimos el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas para resolverlo ahora utilizando la regla de Cramer.

$$\left. \begin{array}{l} 3v_a - v_b = 20 \\ 3v_a - 5v_b = -60 \end{array} \right\} \begin{array}{l} Ec(I) \\ Ec(II) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Dos ecuaciones} \\ \text{con dos incógnitas} \end{array}$$

$$Det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = [(3)(-5)] - [(-1)(3)]$$

$$Det(A) = -12$$

$$v_a = \frac{\begin{vmatrix} 20 & -1 \\ -60 & -5 \end{vmatrix}}{Det(A)} = \frac{[(20)(-5)] - [(-1)(-60)]}{-12} = \frac{-100 - 60}{-12}$$

$$v_a = \frac{-160}{-12} = 13.33 \text{ V}$$

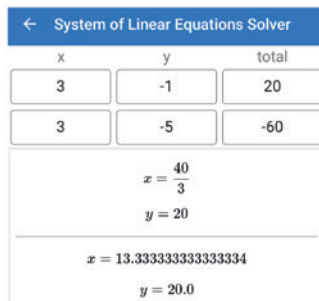
$$v_b = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 20 \\ 3 & -60 \end{vmatrix}}{Det(A)} = \frac{[(3)(-60)] - [(20)(3)]}{-12} = \frac{-180 - 60}{-12}$$

$$v_b = \frac{-240}{-12} = 20 \text{ V}$$

Se resuelve el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas utilizando la *app System of Linear Equations Solver*. A partir de la *Ec (I)* y de la *Ec (II)* de este problema, se sustituyen en la *app* y se obtienen los resultados para los voltajes.

$$\left. \begin{array}{l} 3v_a - v_b = 20 \\ 3v_a - 5v_b = -60 \end{array} \right\} \begin{array}{l} Ec(I) \\ Ec(II) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Dos ecuaciones} \\ \text{con dos incógnitas} \end{array}$$

En la Figura 5.21 se muestra la aplicación con los datos de las ecuaciones y los resultados de los voltajes v_a y v_b .



$$v_a = 13.33 \text{ V}$$

$$v_b = 20 \text{ V}$$

Figura 5.21. *App System Linear Equations Solver* para un Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

FUENTE DE VOLTAJE Y SUPERNODO

Se dice que tenemos un Supernodo cuando en el circuito está presente una fuente de voltaje que no está conectada directamente al nodo de referencia. Si ese es el caso, entonces esta fuente de voltaje producirá dos ecuaciones, una con el valor del voltaje de la fuente y los nodos a los que está conectada, y otra ecuación aplicando la ley de corrientes de Kirchhoff para todas las corrientes que entran y salen del Supernodo.

No se tratará de un Supernodo cuando la fuente de voltaje esté conectada a otra u otras fuentes de voltaje que sí estén conectadas directamente al nodo de referencia. Normalmente la fuente de voltaje de un Supernodo estará conectada en sus extremos únicamente a elementos pasivos (resistencias, inductores o capacitores) o fuentes de corriente.

Existe un Supernodo si una fuente de voltaje se encuentra conectada entre dos nodos y ninguno de ellos sea el nodo de referencia u otra fuente de voltaje conectada al nodo de referencia.

Un Supernodo define el voltaje entre los dos nodos en los que se encuentra conectado. Esta condición de voltaje determinará una ecuación que se debe incluir al momento de resolver las ecuaciones del sistema en el circuito. La forma de definir esta condición de voltaje es igualando el voltaje de la fuente con la diferencia de voltaje expresada en el nodo de la terminal positiva (v_{n+}) y el nodo de la terminal negativa (v_{n-}) de la fuente, tal como se indica en la ecuación (5.81).

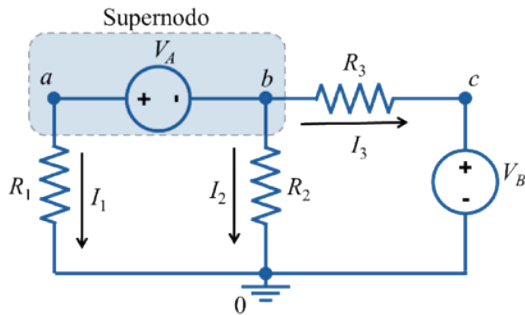
$$v_{n+} - v_{n-} = \text{Voltaje de la fuente} \quad (5.81)$$

De igual manera, en un Supernodo se deberá aplicar la ley de corrientes de Kirchhoff a todas las corrientes que entran y salen de él, para poder construir otra ecuación que se incluirá en las ecuaciones del sistema, tal como se indica en la (5.82).

$$\sum I_{\text{entran en Supernodo}} = \sum I_{\text{salen en Supernodo}} \quad (5.82)$$

En la Tabla 5.1 se presentan 5 ejemplos para identificar si se trata o no de un Supernodo y la forma de obtener las dos ecuaciones asociadas para cada uno de ellos.

Tabla 5.1. Ejemplos de cómo identificar un Supernodo y cómo obtener las ecuaciones asociadas



Es un Supernodo porque ambos nodos están conectados únicamente a elementos pasivos y ninguno de ellos es el nodo de referencia.

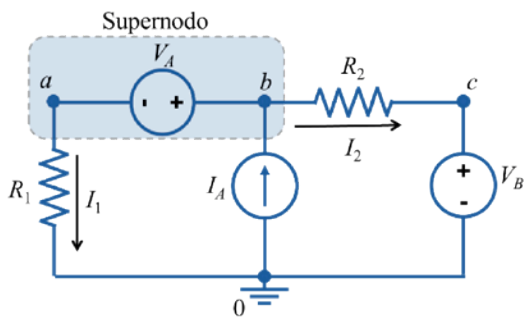
Condición de voltaje:

$$v_a - v_b = V_A$$

Ley de corrientes de Kirchoff en el Supernodo:

$$\sum I_{\text{entran}} = \sum I_{\text{salen}}$$

$$0 = I_1 + I_2 + I_3$$



Es un Supernodo porque el nodo a está conectado a una resistencia y el nodo b a una resistencia y una fuente de corriente. Ninguno de los nodos es el nodo de referencia.

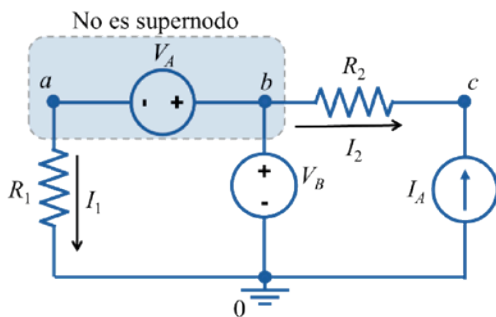
Condición de voltaje:

$$v_b - v_a = V_A$$

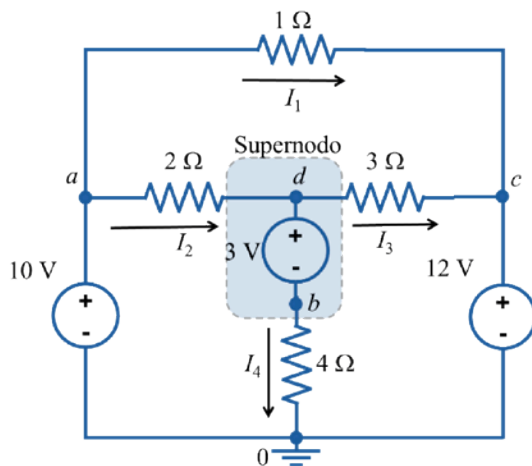
Ley de corrientes de Kirchoff en el Supernodo:

$$\sum I_{\text{entran}} = \sum I_{\text{salen}}$$

$$I_A = I_1 + I_2$$



No es un Supernodo porque el nodo b está conectado a una fuente de voltaje (V_B) y ésta, a su vez, está conectada directamente al nodo de referencia. Nota: En este problema, resultaría mejor intercambiar el nodo de referencia y el nodo, de esta manera ya se conocerían dos de los tres voltajes que se buscan.



Es un Supernodo porque el nodo d está conectado a dos resistencias y el nodo b a una resistencia. Ninguno de los nodos es el nodo de referencia.

Condición de voltaje:

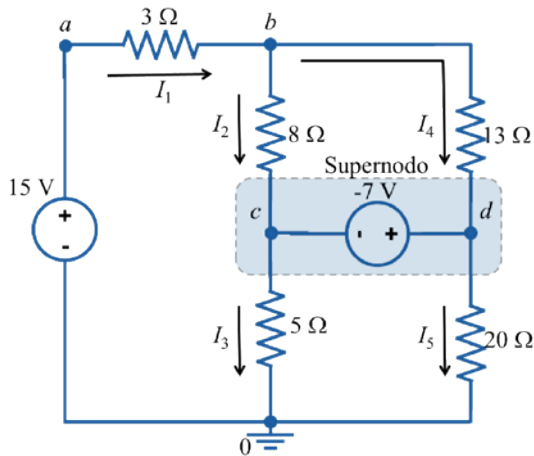
$$v_d - v_b = 3 \text{ V}$$

Ley de corrientes de Kirchoff en el Supernodo:

$$\sum I_{\text{entran}} = \sum I_{\text{salen}}$$

$$I_2 = I_3 + I_4$$

Nota: En este problema, se pueden intercambiar la fuente de 3 V con la resistencia de 4 Ω y de esta manera evitar la presencia del Supernodo. (Este problema se resolvió en el Ejemplo 3 de este capítulo).



Es un Supernodo porque el nodo c y el nodo d están conectados a dos resistencias cada uno. Ninguno de los nodos es el nodo de referencia.

Condición de voltaje:

$$v_d - v_c = -7 \text{ V}$$

Ley de corrientes de Kirchhoff en el Supernodo:

$$\sum I_{\text{entran}} = \sum I_{\text{salen}}$$

$$I_2 + I_4 = I_3 + I_5$$

Ejemplo 5-8. Calcular los voltajes de nodo que se presentan en el circuito de la Figura 5.22.

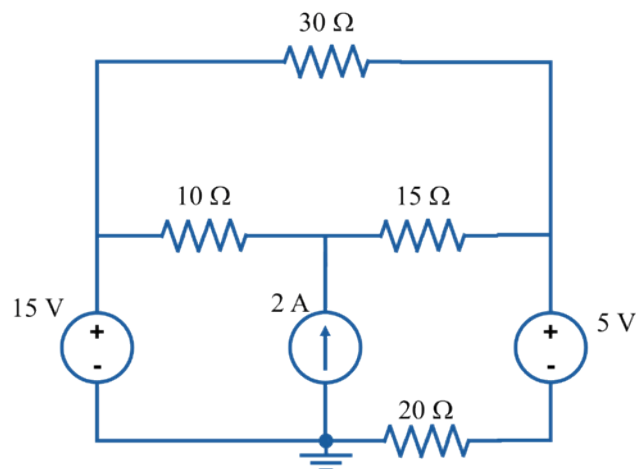


Figura 5.22. Circuito que se resuelve utilizando “Supernodo”.

Respuesta.

El problema se resuelve aplicando los tres pasos utilizados en el análisis con nodos; la diferencia radica en que, al momento de calcular las ecuaciones, se deberán calcular también las ecuaciones asociadas al Supernodo.

Como primer paso se identifican los nodos y el Supernodo, en este caso 5 nodos ($n = 5$) los cuales se nombrarán nodo 0, nodo a , nodo b , nodo c y nodo d , en los cuales quedan definidos los voltajes (v_a , v_b , v_c y v_d) respecto del nodo 0. En la Figura 5.23 se muestra el Supernodo y se presenta una propuesta de cómo quedan definidos los nodos y las direcciones de las corrientes.

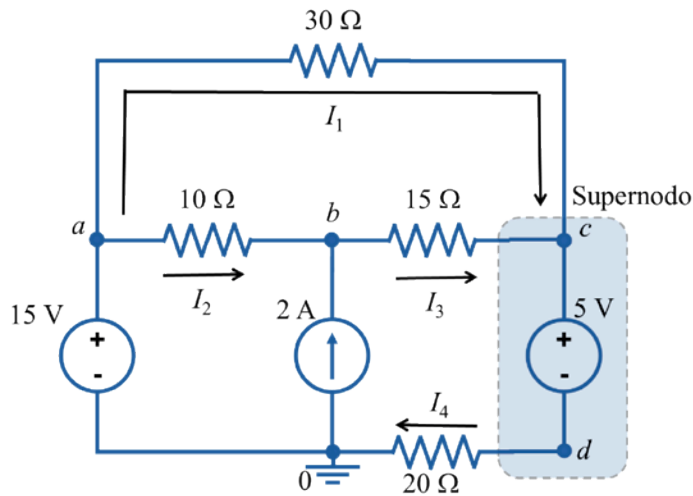


Figura 5.23. Identificación de nodos, Supernodo y las direcciones de las corrientes en el circuito.

En el segundo paso, calculamos las corrientes simbólicas y las ecuaciones de los voltajes de los nodos, así como las ecuaciones del Supernodo. Observamos que el nodo a ya tiene definido el valor del voltaje por estar presente una fuente de voltaje entre el nodo y el nodo de referencia, en este caso el voltaje del nodo a queda definido por la ecuación (5.83).

$$v_a = 15 \text{ V} \quad (5.83)$$

La corriente I_1 es:

$$I_1 = \frac{v_a - v_c}{30 \Omega} = \frac{15 \text{ V} - v_c}{30 \Omega} \quad (5.84)$$

La corriente I_2 es:

$$I_2 = \frac{v_a - v_b}{10 \Omega} = \frac{15 \text{ V} - v_b}{10 \Omega} \quad (5.85)$$

La corriente I_3 es:

$$I_3 = \frac{v_b - v_c}{15 \Omega} \quad (5.86)$$

La corriente I_4 es:

$$I_4 = \frac{v_d - 0 \text{ V}}{20 \Omega} = \frac{v_d}{20 \Omega} \quad (5.87)$$

Las ecuaciones relacionadas con el Supernodo son dos, la condición del voltaje y la ley de corrientes de Kirchhoff aplicada al Supernodo.

Condición de voltaje en el Supernodo:

$$v_c - v_d = 5 \text{ V} \quad (5.88)$$

La ley de corrientes de Kirchhoff aplicada al Supernodo nos produce la ecuación (5.89):

$$\begin{aligned} \sum I_{entran} &= \sum I_{salen} \\ I_1 + I_3 &= I_4 \end{aligned} \quad (5.89)$$

Sustituimos las corrientes simbólicas I_1 , I_2 e I_3 en la ecuación (5.89), por facilidad en los cálculos omitimos las unidades y obtenemos la ecuación (5.90).

$$\frac{15 - v_c}{30} + \frac{v_b - v_c}{15} = \frac{v_d}{20}$$

Multiplicamos ambos lados de la ecuación por el mínimo común múltiplo de 30, 15 y 20, siendo en este caso 60, y resulta:

$$\begin{aligned} \left(\frac{15 - v_c}{30} + \frac{v_b - v_c}{15} = \frac{v_d}{20} \right) (60) \\ (2)(15 - v_c) + (4)(v_b - v_c) &= (3)v_d \\ 30 - 2v_c + 4v_b - 4v_c &= 3v_d \end{aligned}$$

Simplificamos, reacomodamos la ecuación y resulta:

$$4v_b - 6v_c - 3v_d = -30 \quad (5.90)$$

Calculamos las ecuaciones de voltaje para los nodos.

Nodo b :

En la Figura 5.23 aplicamos la ley de corrientes de Kirchhoff en el nodo b y resulta la ecuación (5.91).

$$\begin{aligned} \sum I_{entran} &= \sum I_{salen} \\ I_2 + 2 \text{ A} &= I_3 \end{aligned} \quad (5.91)$$

Sustituimos las ecuaciones (5.85) y (5.86) en la ecuación (5.91), simplificamos y obtenemos la ecuación (5.80).

$$\frac{15 \text{ V} - v_b}{10 \Omega} + 2 \text{ A} = \frac{v_b - v_c}{15 \Omega}$$

Para los cálculos, en la ecuación eliminamos las unidades y multiplicamos ambos lados por el mínimo común múltiplo de 10 y 15 para obtener la ecuación (5.92).

$$\left[\frac{15 - v_b}{10} + 2 = \frac{v_b - v_c}{15} \right] (30)$$

$$(3)(15 - v_b) + 60 = (2)(v_b - v_c)$$

$$45 - 3v_b + 60 = 2v_b - 2v_c$$

$$-5v_b + 2v_c = -105 \quad (5.92)$$

Ya no se calculan ecuaciones para el nodo c y nodo d puesto que están incluidas en el Supernodo.

En el tercer paso agrupamos las ecuaciones (5.88), (5.90) y (5.92) para formar un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, resolverlas y obtener los voltajes de los nodos.

$$\begin{array}{rcl} v_c & -v_d & = 5 & Ec(I) \\ 4v_b & -6v_c & -3v_d & = -30 & Ec(II) \\ -5v_b & +2v_c & & = -105 & Ec(III) \end{array}$$

Resolvemos el sistema utilizando la regla de Cramer.

$$Det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -6 & -3 \\ -5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = [(0) + (-8) + (15)] - [(-30) + (0) + (0)]$$

$$Det(A) = 37$$

$$v_b = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -30 & -6 & -3 \\ -105 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{Det(A)} = \frac{[(0) + (60) + (315)] - [(-630) + (-30) + (0)]}{37}$$

$$v_b = \frac{375 + 660}{37} = \frac{1035}{37}$$

$$\boxed{v_b = 27.97 \text{ V}}$$

$$v_c = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 4 & -30 & -3 \\ -5 & -105 & 0 \end{vmatrix}}{Det(A)} = \frac{[(0) + (420) + (75)] - [(-150) + (0) + (0)]}{37}$$

$$v_c = \frac{495 + 150}{37} = \frac{645}{37}$$

$$\boxed{v_c = 17.43 \text{ V}}$$

$$v_d = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & -30 \\ -5 & 2 & -105 \end{vmatrix}}{\text{Det}(A)} = \frac{[(0) + (40) + (150)] - [(150) + (0) + (-420)]}{37}$$

$$v_d = \frac{190 + 270}{37} = \frac{460}{37}$$

$v_d = 12.43 \text{ V}$

Obtenemos los resultados resolviendo el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas utilizando la *app System of Linear Equations Solver* que se muestra en la Figura 5.15.

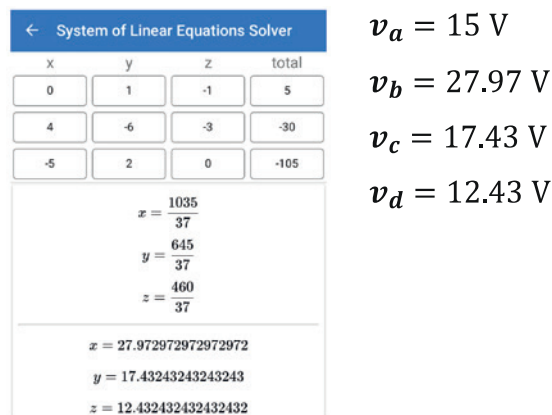
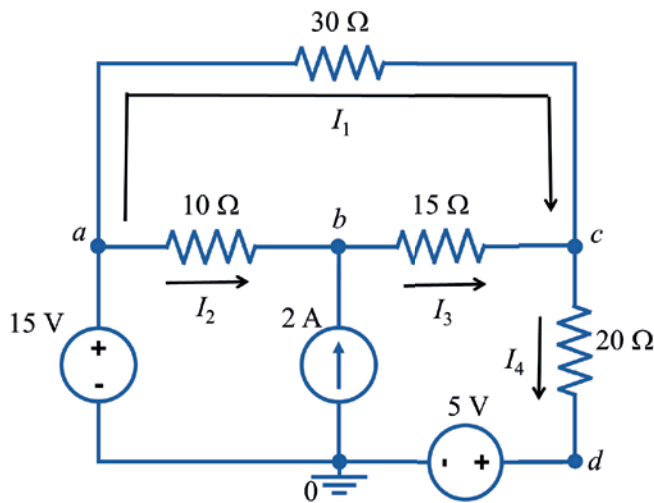


Figura 5.24. Solución del sistema de ecuaciones para el problema de nodos con Supernodo.

Este ejemplo se resolvió en el capítulo anterior aplicando el análisis con mallas y en dicho análisis resultó ser necesario resolver el problema utilizando una “Supermalla”. Utilizando el análisis con nodos resultó necesario resolverlo también como un caso especial de nodos llamado “Supernodo”.

Sin embargo, si observamos la Figura 5.22, nos damos cuenta de que, al igual que sucedió con el Ejemplo 3 de este mismo capítulo, se puede intercambiar la fuente de voltaje de 5 V con la resistencia de 20 Ω por estar conectadas en serie en una misma rama. El problema del “Supernodo” desaparecería y además sólo se tendría que resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, porque ya se conocerían dos de los cuatro voltajes de los nodos. En la Figura 5.25 se muestra el aspecto del circuito intercambiando estos elementos y los resultados de los voltajes en los nodos resultantes. Obsérvese que sólo cambia el valor del voltaje en el nodo *d* ya que es ahora el valor del voltaje en la fuente de 5 V. Este ejercicio se deja para que lo compruebe el estudiante aplicando el análisis con nodos.



$$v_a = 15 \text{ V}$$

$$v_b = 27.97 \text{ V}$$

$$v_c = 17.43 \text{ V}$$

$$v_d = 5 \text{ V}$$

Figura 5.25. Intercambio de la fuente de voltaje de 5 V por la resistencia de 20 Ω para eliminar el Supernodo.

Ejemplo 5-9. Calcular los voltajes de nodo que se presentan en el circuito de la Figura 5.26.

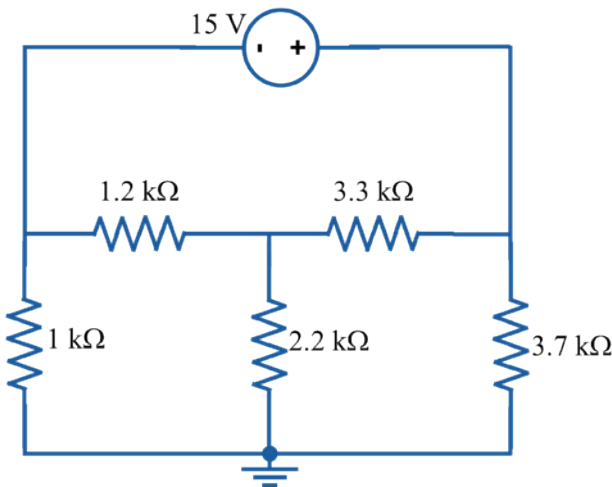


Figura 5.26. Circuito que se resuelve utilizando "Supernodo".

En el primer paso, identificamos los nodos con los que cuenta el circuito, en este caso, de la Figura 5.26 se observa que son cuatro nodos ($n = 4$), los cuales se nombrarán nodo 0, nodo a , nodo b , nodo c , y para cada uno de ellos quedará definido un voltaje (v_a , v_b , v_c) respecto del nodo 0. Notamos que aparece un Supernodo el cual identificaremos en el circuito. En la Figura 5.27 se muestran los cuatro nodos, el Supernodo y una propuesta de las direcciones de las corrientes en cada rama y su representación en el circuito.

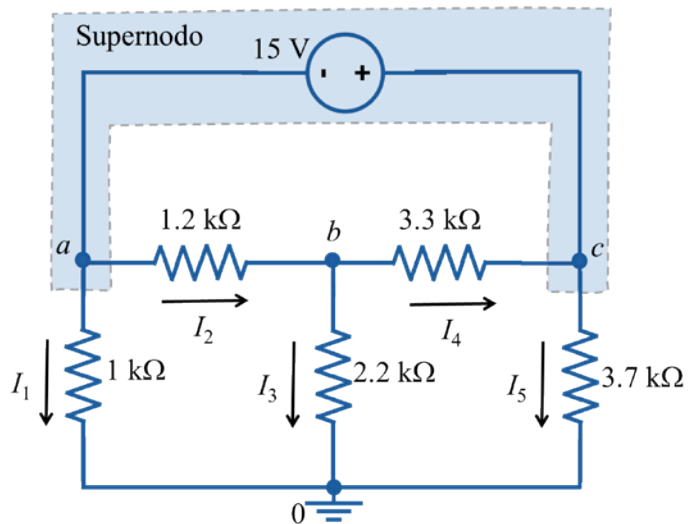


Figura 5.27. Identificación y marcado de nodos y Supernodo en el circuito.

En el segundo paso, calculamos las corrientes simbólicas y las ecuaciones de los voltajes de los nodos así como las ecuaciones del Supernodo.

La corriente I_1 es:

$$I_1 = \frac{v_a - 0 \text{ V}}{1 \text{ k}\Omega} = \frac{v_a}{1 \text{ k}\Omega} \quad (5.93)$$

La corriente I_2 es:

$$I_2 = \frac{v_a - v_b}{1.2 \text{ k}\Omega} \quad (5.94)$$

La corriente I_3 es:

$$I_3 = \frac{v_b - 0 \text{ V}}{2.2 \text{ k}\Omega} = \frac{v_b}{2.2 \text{ k}\Omega} \quad (5.95)$$

La corriente I_4 es:

$$I_4 = \frac{v_b - v_c}{3.3 \text{ k}\Omega} \quad (5.96)$$

La corriente I_5 es:

$$I_5 = \frac{v_c - 0 \text{ V}}{3.7 \text{ k}\Omega} = \frac{v_c}{3.7 \text{ k}\Omega} \quad (5.97)$$

Supernodo:

Las ecuaciones relacionadas con el Supernodo son dos, la condición del voltaje, y la ley de corrientes de Kirchhoff aplicada al Supernodo.

Condición de voltaje en el Supernodo:

$$v_c - v_a = 15 \text{ V} \quad (5.98)$$

La ley de corrientes de Kirchhoff aplicada al Supernodo nos produce la ecuación (5.89):

$$\begin{aligned} \sum I_{entran} &= \sum I_{salen} \\ I_4 &= I_1 + I_2 + I_5 \end{aligned} \quad (5.99)$$

Sustituimos las corrientes simbólicas I_1 , I_2 , I_4 e I_5 en la ecuación (5.99), por facilidad en los cálculos omitimos las unidades y obtenemos la ecuación (5.100).

$$\frac{v_b - v_c}{3,300} = \frac{v_a}{1,000} + \frac{v_a - v_b}{1,200} + \frac{v_c}{3,700}$$

Multiplicamos ambos lados de la ecuación por el mínimo común múltiplo de 3,300, 1,000, 1,200 y 3,700 siendo en este caso 2,442,000 y resulta.

$$\begin{aligned} \left(\frac{v_b - v_c}{3,300} = \frac{v_a}{1,000} + \frac{v_a - v_b}{1,200} + \frac{v_c}{3,700} \right) (2,442,000) \\ (740)(v_b - v_c) = 2,442v_a + 2,035(v_a - v_b) + 660v_c \end{aligned}$$

Simplificamos, reacomodamos la ecuación y resulta:

$$-4,477v_a + 2,775v_b - 1,400v_c = 0 \quad (5.100)$$

Calculamos la ecuación de voltaje de para el nodo restante.

Nodo b :

En la Figura 5.27 aplicamos la ley de corrientes de Kirchhoff en el nodo b y resulta la ecuación (5.101).

$$\begin{aligned} \sum I_{entran} &= \sum I_{salen} \\ I_2 &= I_3 + I_4 \end{aligned} \quad (5.101)$$

Sustituimos las corrientes simbólicas I_2 , I_3 e I_4 en la ecuación (5.101), simplificamos y obtenemos la ecuación (5.102).

$$\frac{v_a - v_b}{1,200 \Omega} = \frac{v_b}{2,200 \Omega} + \frac{v_b - v_c}{3,300 \Omega}$$

Para los cálculos, en la ecuación eliminamos las unidades y multiplicamos ambos lados por el mínimo común múltiplo de 1,200, 2,200 y 3,300 para obtener la ecuación (5.102).

$$\left[\frac{v_a - v_b}{1,200} = \frac{v_b}{2,200} + \frac{v_b - v_c}{3,300} \right] (66,000)$$

$$(55)(v_a - v_b) = 30v_b + (20)(v_b - v_c)$$

$$55v_a - 55v_b = 30v_b + 20v_b - 20v_c$$

$$55v_a - 105v_b + 20v_c = 0 \quad (5.102)$$

Ya no se calculan ecuaciones para el nodo a y nodo c puesto que están incluidas en el Supernodo.

En el tercer paso agrupamos las ecuaciones (5.98), (5.100) y (5.102) para formar un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, resolverlas y obtener los voltajes de los nodos.

$$\begin{array}{rcll} -v_a & & +v_c & = 15 & Ec(I) \\ -4477v_a & 2775v_b & -1400v_c & = 0 & Ec(II) \\ 55v_a & -105v_b & +20v_c & = 0 & Ec(III) \end{array}$$

Resolvemos el sistema utilizando la regla de Cramer.

$$Det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -4,477 & 2,775 & -1,400 \\ 55 & -105 & 20 \end{vmatrix}$$

$$Det(A) = [(-55,500) + (470,085) + (0)] - [(152,625) + (-147,000) + (0)]$$

$$Det(A) = 408,960$$

$$v_a = \frac{\begin{vmatrix} 15 & 0 & 1 \\ 0 & 2,775 & -1,400 \\ 0 & -105 & 20 \end{vmatrix}}{Det(A)} = \frac{[(832,500) + (0) + (0)] - [(0) + (2,205,000) + (0)]}{408,960}$$

$$v_a = \frac{832,500 - 2,205,000}{408,960} = \frac{-1,372,500}{408,960}$$

$$\boxed{v_a = -3.35 \text{ V}}$$

$$v_b = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 15 & 1 \\ -4,477 & 0 & -1,400 \\ 55 & 0 & 20 \end{vmatrix}}{Det(A)}$$

$$v_b = \frac{[(0) + (0) + (-1,155,000)] - [(0) + (0) + (-1,343,100)]}{408,960}$$

$$v_b = \frac{-1,155,000 + 1,343,100}{408,960} = \frac{188,100}{408,960} =$$

$$\boxed{v_b = 0.459 \text{ V}}$$

$$v_c = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 15 \\ -4,477 & 2,775 & 0 \\ 55 & -105 & 0 \end{vmatrix}}{\text{Det}(A)} = \frac{[(0) + (7,051,275) + (0)] - [(2,289,375) + (0) + (0)]}{408,960}$$

$$v_c = \frac{7,051,275 - 2,289,375}{408,960} = \frac{4,761,900}{408,960}$$

$v_c = 11.64 \text{ V}$

Obtenemos los resultados resolviendo el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas utilizando la *app System of Linear Equations Solver* que se muestra en la Figura 5.28.

| ← System of Linear Equations Solver | | | |
|-------------------------------------|------|-------|-------|
| x | y | z | total |
| -1 | 0 | 1 | 15 |
| -4477 | 2775 | -1400 | 0 |
| 55 | -105 | 20 | 0 |

$v_a = -3.35 \text{ V}$
 $v_b = 0.459 \text{ V}$
 $v_c = 11.64 \text{ V}$

$x = \frac{-7625}{2272}$
 $y = \frac{1045}{2272}$
 $z = \frac{26455}{2272}$

 $x = -3.356073943661972$
 $y = 0.45994718309859156$
 $z = 11.643926056338028$

Figura 5.28. Solución del sistema de ecuaciones para el problema de nodos con Supernodo.

CIRCUITOS CON NODOS Y FUENTES DEPENDIENTES

Hasta el momento se han resuelto distintos ejercicios con diferentes características para aplicar la técnica del análisis con nodos. Sólo nos falta hacer ejemplos en los que se involucren fuentes dependientes.

Para resolver problemas en los que aparezcan fuentes dependientes, se aplica exactamente lo mismo que se ha aplicado para los ejercicios anteriores. El tratamiento que se les dará a las fuentes dependientes será igual al que se les dio a las fuentes independientes, es decir, si las fuentes dependientes son de voltaje y están conectadas en el nodo de referencia, el valor de la fuente dependiente será el valor del voltaje en el nodo. Si una fuente dependiente de voltaje se conecta entre dos nodos y ninguno es el nodo de referencia, entonces esa fuente dependiente producirá un “Supernodo”. Para el caso de las fuentes de corriente dependientes se tratan del mismo modo que se trató a las fuentes de corriente independientes, son útiles para calcular las ecuaciones de los voltajes en los nodos.

A continuación, se presentan algunos ejemplos en los que se incluyen fuentes dependientes de voltaje y de corriente y que se resolverán utilizando la técnica de análisis con nodos.

Ejemplo 5-10. En el circuito de la Figura 5.29, calcular los voltajes de los nodos, utilizando la técnica de análisis con nodos.

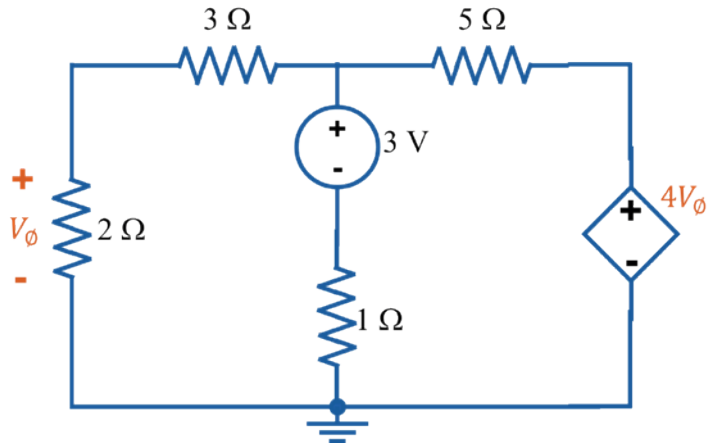


Figura 5.29. Circuito de cinco nodos con fuente dependiente.

Respuesta.

En el primer paso, identificamos los nodos con los que cuenta el circuito, se trata de un circuito con 5 nodos ($n = 5$), por lo tanto, son 4 voltajes respecto del nodo de referencia (v_a, v_b, v_c y v_d) y, además, el circuito presenta un Supernodo (que podría eliminarse si se intercambiara la resistencia de 1Ω con la fuente de voltaje de 3 V). Para el caso de las resistencias de 2Ω y de 3Ω no se pueden sumar a pesar de estar en serie porque se perdería la referencia del voltaje V_ϕ . En la Figura 5.30 se muestran los nodos, el Supernodo y una propuesta de las direcciones de las corrientes en cada rama y su representación en el circuito.

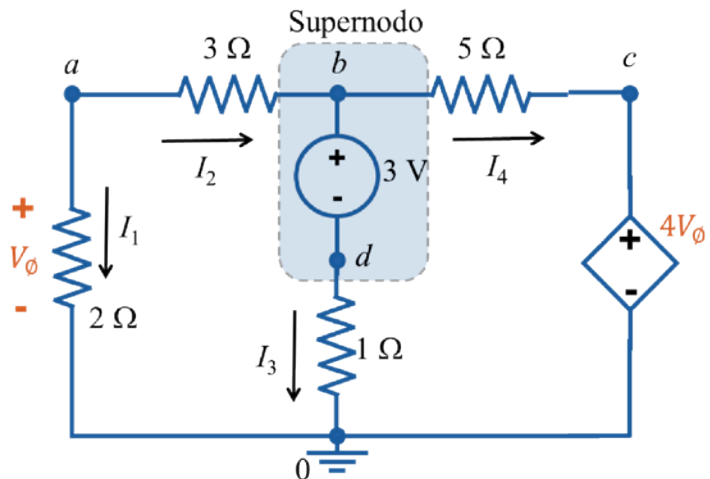


Figura 5.30. Identificación de nodos, Supernodo y asignación de corrientes en el circuito con fuente dependiente.

En el segundo paso, calculamos las corrientes simbólicas y las ecuaciones de los voltajes de los nodos, así como las ecuaciones del Supernodo.

La corriente I_1 es:

$$I_1 = \frac{v_a - 0 \text{ V}}{2 \Omega} = \frac{v_a}{2 \Omega} \quad (5.103)$$

La corriente I_2 es:

$$I_2 = \frac{v_a - v_b}{3 \Omega} \quad (5.104)$$

La corriente I_3 es:

$$I_3 = \frac{v_d - 0 \text{ V}}{1 \Omega} = \frac{v_d}{1 \Omega} \quad (5.105)$$

La corriente I_4 es:

$$I_4 = \frac{v_b - v_c}{5 \Omega} \quad (5.106)$$

Nodo a :

En la Figura 5.30 aplicamos la ley de corrientes de Kirchhoff en el nodo a y resulta la ecuación (5.107).

$$\begin{aligned} \sum I_{entran} &= \sum I_{salen} \\ 0 &= I_1 + I_2 \end{aligned} \quad (5.107)$$

Sustituimos las corrientes simbólicas I_1 e I_2 en la ecuación (5.107) y resulta:

$$0 = \frac{v_a}{2 \Omega} + \frac{v_a - v_b}{3 \Omega}$$

Para los cálculos, en la ecuación aplicamos la propiedad simétrica, eliminamos las unidades y multiplicamos ambos lados por el mínimo común múltiplo de 2 y 3 para obtener la ecuación (5.108).

$$\begin{aligned} \left[\frac{v_a}{2} + \frac{v_a - v_b}{3} = 0 \right] (6) \\ 3v_a + 2v_a - 2v_b = 0 \\ 5v_a - 2v_b = 0 \end{aligned} \quad (5.108)$$

Nodo c :

Este nodo cuenta con una fuente de voltaje dependiente conectada al nodo de referencia, por lo tanto, el valor del voltaje en este nodo

está sujeto al valor de la fuente dependiente tal como lo indica la ecuación (5.109).

$$v_c = 4V_\emptyset \quad (5.109)$$

Sin embargo, falta averiguar cuánto vale el voltaje V_\emptyset . Observamos que el voltaje V_\emptyset coincide con el voltaje del nodo v_a , por lo tanto, en términos de los voltajes de nodo, el voltaje V_\emptyset se puede escribir como lo indica la ecuación (5.110) y, a su vez, el voltaje del nodo c queda redefinido como lo indica la ecuación (5.111).

$$V_\emptyset = v_a \quad (5.110)$$

$$v_c = 4v_a \quad (5.111)$$

Supernodo:

Las ecuaciones relacionadas con el Supernodo son dos, la condición del voltaje, y la ley de corrientes de Kirchhoff aplicada al Supernodo.

Condición de voltaje en el Supernodo:

$$v_b - v_d = 3 \text{ V} \quad (5.112)$$

La ley de corrientes de Kirchhoff aplicada al Supernodo nos produce la ecuación (5.113):

$$\begin{aligned} \sum I_{entran} &= \sum I_{salen} \\ I_2 &= I_3 + I_4 \end{aligned} \quad (5.113)$$

Sustituimos las corrientes simbólicas I_2 , I_3 e I_4 en la ecuación (5.113).

$$\frac{v_a - v_b}{3 \Omega} = \frac{v_d}{1 \Omega} + \frac{v_b - v_c}{5 \Omega}$$

De igual manera sustituimos la ecuación (5.111) del voltaje v_c en la ecuación anterior, resultando:

$$\frac{v_a - v_b}{3 \Omega} = \frac{v_d}{1 \Omega} + \frac{v_b - 4v_a}{5 \Omega}$$

Multiplicamos ambos lados de la ecuación por el mínimo común múltiplo de 3, 1 y 5, siendo en este caso 15. Por facilidad en los cálculos omitimos las unidades y obtenemos la ecuación (5.114).

$$\begin{aligned} \left(\frac{v_a - v_b}{3} = \frac{v_d}{1} + \frac{v_b - 4v_a}{5} \right) (15) \\ (5)(v_a - v_b) &= 15v_d + (3)(v_b - 4v_a) \\ 5v_a - 5v_b &= 15v_d + 3v_b - 12v_a \end{aligned}$$

Simplificamos, reacomodamos la ecuación y resulta:

$$17v_a - 8v_b - 15v_d = 0 \quad (5.114)$$

En el tercer paso agrupamos las ecuaciones (5.108), (5.112) y (5.114) para formar un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, resolverlas y obtener los voltajes de los nodos.

$$5v_a - 2v_b = 0 \quad Ec(I)$$

$$v_b + v_d = 3 \quad Ec(II)$$

$$17v_a - 8v_b - 15v_d = 0 \quad Ec(III)$$

Resolvemos el sistema utilizando la regla de Cramer.

$$Det(A) = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 17 & -8 & -15 \end{vmatrix} = [(-75) + (0) + (34)] - [(0) + (40) + (0)]$$

$$Det(A) = -81$$

$$v_a = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & -15 \end{vmatrix}}{Det(A)} = \frac{[(0) + (0) + (0)] - [(0) + (0) + (90)]}{-81} = \frac{-90}{-81}$$

$$\boxed{v_a = 1.111 \text{ V}}$$

$$v_b = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 17 & 0 & -15 \end{vmatrix}}{Det(A)} = \frac{[(-225) + (0) + (0)] - [(0) + (0) + (0)]}{-81}$$

$$v_b = \frac{-225}{-81} =$$

$$\boxed{v_b = 2.777 \text{ V}}$$

$$v_d = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 17 & -8 & 0 \end{vmatrix}}{Det(A)} = \frac{[(0) + (0) + (-102)] - [(0) + (-120) + (0)]}{-81}$$

$$v_d = \frac{18}{-81}$$

$$\boxed{v_d = -0.222 \text{ V}}$$

Obtenemos los resultados resolviendo el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas utilizando la *app System of Linear Equations Solver* que se muestra en la Figura 5.31.

| x | y | z | total |
|----|----|-----|-------|
| 0 | 1 | -1 | 3 |
| 17 | -8 | -15 | 0 |
| 5 | -2 | 0 | 0 |

$$x = \frac{10}{9}$$

$$y = \frac{25}{9}$$

$$z = \frac{-2}{9}$$

$$x = 1.1111111111111112$$

$$y = 2.7777777777777777$$

$$z = -0.2222222222222222$$

$$v_a = 1.111 \text{ V}$$

$$v_b = 2.777 \text{ V}$$

$$v_d = -0.222 \text{ V}$$

Figura 5.31. Solución del sistema de ecuaciones para el problema de nodos con Supernodo y fuente dependiente.

Si se desea conocer el valor del voltaje v_c , entonces simplemente se sustituye el valor en la ecuación (5.111) y se obtiene.

$$v_c = 4v_a$$

$$v_c = 4(1.111 \text{ V})$$

$$\boxed{v_c = 4.444 \text{ V}}$$

Ejemplo 5-11. Utilizando análisis con nodos, resolver el circuito de la Figura 5.32 y calcular los voltajes de nodo.

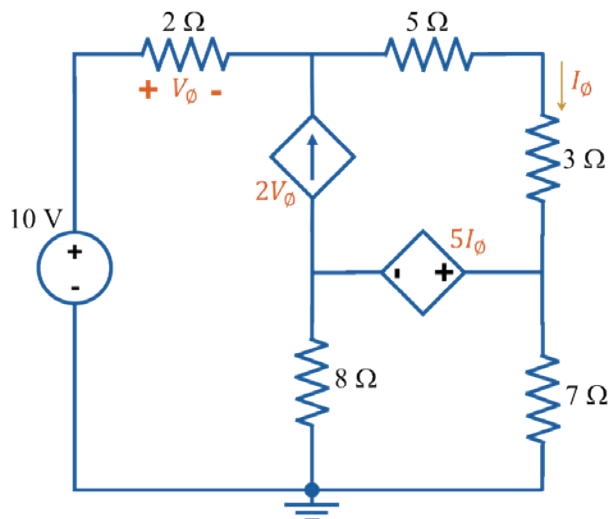


Figura 5.32. Circuito de tres mallas con fuentes dependientes.

Respuesta.

Identificamos los nodos y marcamos las direcciones de las corrientes simbólicas (Figura 5.33).

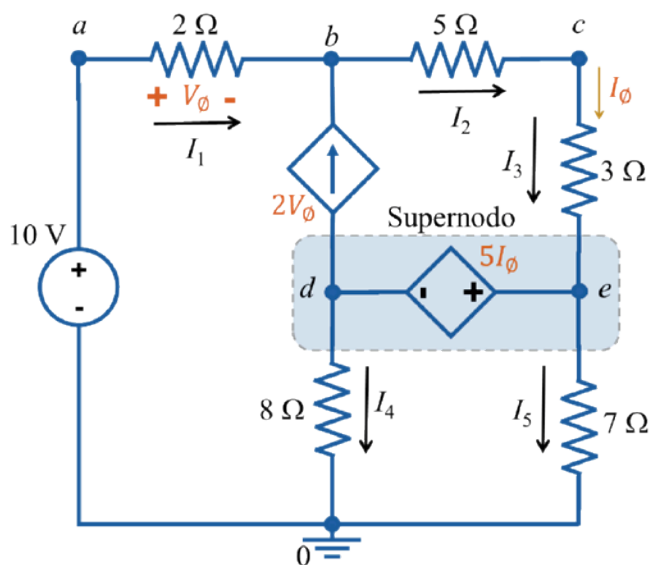


Figura 5.33. Nodos y corrientes simbólicas en circuito con Supernodo y fuentes dependientes.

Observamos que en el circuito el voltaje del nodo a ya se encuentra definido.

$$v_a = 10 \text{ V} \quad (5.115)$$

Calculamos las corrientes simbólicas.

La corriente I_1 es:

$$I_1 = \frac{v_a - v_b}{2 \Omega} = \frac{10 \text{ V} - v_b}{2 \Omega} \quad (5.116)$$

La corriente I_2 es:

$$I_2 = \frac{v_b - v_c}{5 \Omega} \quad (5.117)$$

La corriente I_3 es:

$$I_3 = \frac{v_c - v_e}{3 \Omega} \quad (5.118)$$

La corriente I_4 es:

$$I_4 = \frac{v_d - 0 \text{ V}}{8 \Omega} = \frac{v_d}{8 \Omega} \quad (5.119)$$

La corriente I_5 es:

$$I_5 = \frac{v_e - 0 \text{ V}}{7 \Omega} = \frac{v_e}{7 \Omega} \quad (5.120)$$

Definimos las fuentes dependientes en términos de los voltajes de los nodos, quedando:

$$I_\phi = I_3$$

$$I_\phi = \frac{v_c - v_e}{3 \Omega} \quad (5.121)$$

$$V_\phi = v_a - v_b$$

$$V_\phi = 10 \text{ V} - v_b \quad (5.122)$$

Calculamos los voltajes en los nodos restantes.

Nodo b :

$$\sum I_{entran} = \sum I_{salen}$$

$$I_1 + 2V_\phi = I_2$$

$$\frac{10 \text{ V} - v_b}{2 \Omega} + 2(10 \text{ V} - v_b) = \frac{v_b - v_c}{5 \Omega}$$

$$\left(\frac{10 - v_b}{2} + 2(10 - v_b) = \frac{v_b - v_c}{5} \right) (10)$$

$$50 - 5v_b + 200 - 20v_b = 2v_b - 2v_c$$

$$-27v_b + 2v_c = -250 \quad (5.123)$$

Nodo c :

$$\sum I_{entran} = \sum I_{salen}$$

$$I_2 = I_3$$

$$\frac{v_b - v_c}{5 \Omega} = \frac{v_c - v_e}{3 \Omega}$$

$$\left(\frac{v_b - v_c}{5} = \frac{v_c - v_e}{3} \right) (15)$$

$$3v_b - 3v_c = 5v_c - 5v_e$$

$$3v_b - 8v_c + 5v_e = 0 \quad (5.124)$$

Supernodo:
Condición de voltaje.

$$\begin{aligned}
 v_e - v_d &= 5I_\phi \\
 v_e - v_d &= 5\left(\frac{v_c - v_e}{3\Omega}\right) \\
 3v_e - 3v_d &= 5v_c - 5v_e \\
 -5v_c - 3v_d + 8v_e &= 0
 \end{aligned} \tag{5.125}$$

LKC en el Supernodo.

$$\begin{aligned}
 \sum I_{entran} &= \sum I_{salen} \\
 I_3 &= 2V_\phi + I_4 + I_5 \\
 \frac{v_c - v_e}{3\Omega} &= 2(10\text{ V} - v_b) + \frac{v_d}{8\Omega} + \frac{v_e}{7\Omega} \\
 \left(\frac{v_c - v_e}{3} = 2(10 - v_b) + \frac{v_d}{8} + \frac{v_e}{7}\right) &(168) \\
 56v_c - 56v_e &= 3360 - 336v_b + 21v_d + 24v_e \\
 336v_b + 56v_c - 21v_d - 80v_e &= 0
 \end{aligned} \tag{5.126}$$

Agrupamos las ecuaciones y resolvemos el sistema para calcular los voltajes de nodo.

$$\begin{array}{rcccccc}
 336v_b & +56v_c & -21v_d & -80v_e & = & 3,360 & Ec(I) \\
 -27v_b & +2v_c & & & = & -250 & Ec(II) \\
 3v_b & -8v_c & & +5v_e & = & 0 & Ec(III) \\
 & -5v_c & -3v_d & +8v_e & = & 0 & Ec(IV)
 \end{array}$$

El sistema se puede reducir multiplicando la $Ec(IV)$ por un factor de (-7) y sumarse con la $Ec(I)$, para quedar en un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas.

$$\begin{array}{rcccccc}
 336v_b & +91v_c & -136v_e & = & 3,360 & Ec(I)^* \\
 -27v_b & +2v_c & & = & -250 & Ec(II) \\
 3v_b & -8v_c & +5v_e & = & 0 & Ec(III)
 \end{array}$$

Resolvemos el sistema utilizando la regla de Cramer.

$$Det(A) = \begin{vmatrix} 336 & 91 & -136 \\ -27 & 2 & 0 \\ 3 & -8 & 5 \end{vmatrix}$$

$$Det(A) = [(3,360) + (-30,464) + (0)] - [(-816) + (0) + (-12,285)]$$

$$Det(A) = -12,915$$

$$v_b = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{3,360} & 91 & -136 \\ -250 & 2 & 0 \\ \mathbf{0} & -8 & 5 \end{vmatrix}}{Det(A)} =$$

$$v_b = \frac{[(33,600) + (-272,000) + (0)] - [(0) + (0) + (-113,750)]}{-12,915} = \frac{-124,650}{-12,915}$$

$$\boxed{v_b = 9.65 \text{ V}}$$

$$v_c = \frac{\begin{vmatrix} 336 & \mathbf{3,360} & -136 \\ -27 & -250 & 0 \\ 3 & \mathbf{0} & 5 \end{vmatrix}}{Det(A)} =$$

$$v_c = \frac{[(-420,000) + (0) + (0)] - [(102,000) + (0) + (-453,600)]}{-12,915} = \frac{-68,400}{-12,915}$$

$$\boxed{v_c = 5.29 \text{ V}}$$

$$v_e = \frac{\begin{vmatrix} 336 & 91 & \mathbf{3,360} \\ -27 & 2 & -250 \\ 3 & -8 & \mathbf{0} \end{vmatrix}}{Det(A)}$$

$$v_e = \frac{[(0) + (725,760) + (-68,250)] - [(20,160) + (672,000) + (0)]}{-12,915} = \frac{-34,650}{-12,915}$$

$$\boxed{v_e = 2.68 \text{ V}}$$

Para calcular el voltaje v_d , se despeja de la $Ec(IV)$ resultando:

$$v_d = \frac{5v_c - 8v_e}{-3} \quad (5.127)$$

Sustituimos los valores de los voltajes previamente calculados y resulta:

$$v_d = \frac{5(5.29 \text{ V}) - 8(2.68 \text{ V})}{-3}$$

$$\boxed{v_d = -1.67 \text{ V}}$$

Comprobamos los resultados resolviendo el sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas utilizando la *app System of Linear Equations Solver* que se muestra en la Figura 5.34, y se deja al estudiante comprobar los resultados con cualesquiera de los otros métodos mencionados.

| ← System of Linear Equations Solver | | | | |
|-------------------------------------|----|-----|-----|-------|
| x | y | z | t | total |
| 336 | 56 | -21 | -80 | 3360 |
| -27 | 2 | 0 | 0 | -250 |
| 3 | -8 | 0 | 5 | 0 |
| 0 | -5 | -3 | 8 | 0 |

| |
|------------------------|
| $y = \frac{1520}{287}$ |
| $z = \frac{-480}{287}$ |
| $t = \frac{110}{41}$ |

| |
|---------------------------|
| $x = 9.651567944250871$ |
| $y = 5.29616724738676$ |
| $z = -1.6724738675958188$ |
| $t = 2.682926829268293$ |

$$v_b = 9.65 \text{ V}$$

$$v_c = 5.29 \text{ V}$$

$$v_d = -1.67 \text{ V}$$

$$v_e = 2.68 \text{ V}$$

Figura 5.34. Solución del sistema de ecuaciones para el problema de nodos con fuentes dependientes y Supernodo.

RESUMEN Y CONCLUSIÓN DEL CAPÍTULO

La técnica de nodos, al igual que la técnica de mallas, es una técnica que sirve para resolver prácticamente cualquier tipo de circuito eléctrico que se presente. Sin embargo, hay algunas características en los circuitos que hacen de esta técnica mucho más rápida que el análisis de mallas, como por ejemplo tener las fuentes de voltaje conectadas en el nodo de referencia.

En este capítulo se resolvieron la mayoría de los ejercicios previamente solucionados con el análisis con mallas, de esta manera, el estudiante puede comparar directamente cuál de las dos técnicas es más útil o rápida para resolver un problema de acuerdo a sus características de conexión y elementos que lo integran.

En el primero de los ejercicios de este capítulo, una vez determinados los voltajes de los nodos, y con el fin de demostrar cómo llevar a cabo esta aproximación, se procedió a calcular las corrientes a partir de dichos voltajes.

Al inicio de cada ejemplo se incluyó una breve descripción del circuito y cómo comenzar a resolverlo. Se explicó que las fuentes de voltaje conectadas al nodo de referencia son directamente los volta-

jes de nodo, sólo hay que tener cuidado con la polaridad del voltaje que se les asigna. De igual manera, cuando una fuente de voltaje aparece entre dos nodos y ninguno de ellos es el nodo de referencia, entonces será necesario resolver el problema utilizando un Supernodo.

En este capítulo se resolvieron 11 ejemplos, comenzando con ejercicios sencillos y terminando con ejemplos cada vez más complejos. En los ejemplos se trató de incluir todo tipo de circuitos que se pueden presentar cuando se analizan circuitos con nodos. Se incluyeron circuitos con fuentes de voltaje, fuentes de corriente, fuentes dependientes de corriente y dependientes de voltaje, así como ejemplos que obligaron a utilizar “Supernodo”. Se hicieron ejemplos de 2, 3 y hasta 4 ecuaciones con 4 incógnitas. Todos y cada uno de los ejemplos se resolvieron paso a paso explicando detalladamente cómo comenzar a resolver el circuito, cómo plantear las ecuaciones y qué aspectos tomar en cuenta para resolverlos rápida y adecuadamente.

Para resolver los sistemas de n-ecuaciones con n-incógnitas que resultaron, se utilizó básicamente la “Regla de Cramer”; sólo en el último ejemplo, en un paso, se usó el método de “Suma o resta” para reducir el sistema de 4 ecuaciones con cuatro incógnitas a uno de 3 ecuaciones con 3 incógnitas. Invariablemente, en todos los casos, para comprobar los resultados, se utilizó la aplicación gratuita *System of Linear Equations Solver*.

PROBLEMAS PROPUESTOS

A continuación, se proponen una serie de problemas para poner en práctica todo lo aprendido sobre la técnica del análisis de circuitos con nodos. Se deberán calcular los voltajes de nodo en cada uno de los problemas que se muestran a continuación. Para todos los problemas se incluyen los voltajes de nodo, considerando para todos ellos la terminal de tierra como el nodo de referencia.

Prob. 5.1. Figura 5.35.

(Sol. -30 V , 11.25 V , 5.25 V).

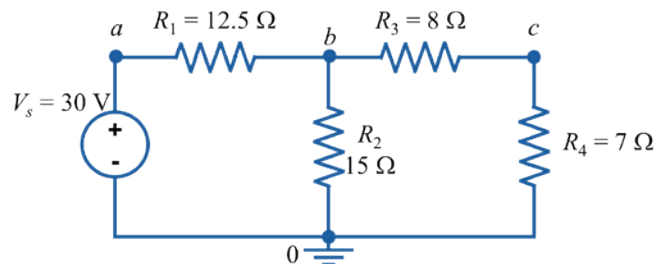


Figura 5.35.

Prob. 5.2. Figura 5.36.

(Sol. -33.5 V , 0.459 V , 11.64 V).

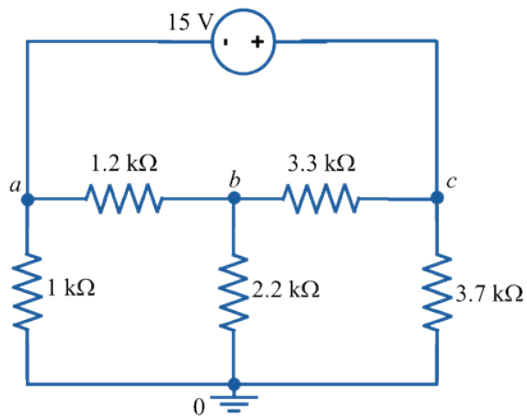


Figura 5.36.

Prob. 5.3. Figura 5.37.

(Sol. 15 V , 5.52 V , -4.47 V , -21.67 V , 2.34 V).

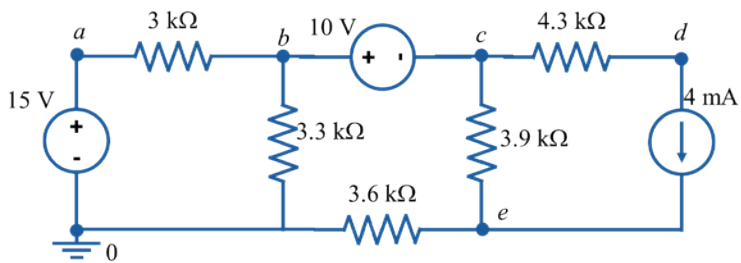


Figura 5.37.

Prob. 5.4. Figura 5.38.

(Sol. 15.8 V, 20.33 V, 15.46 V, 25 V).

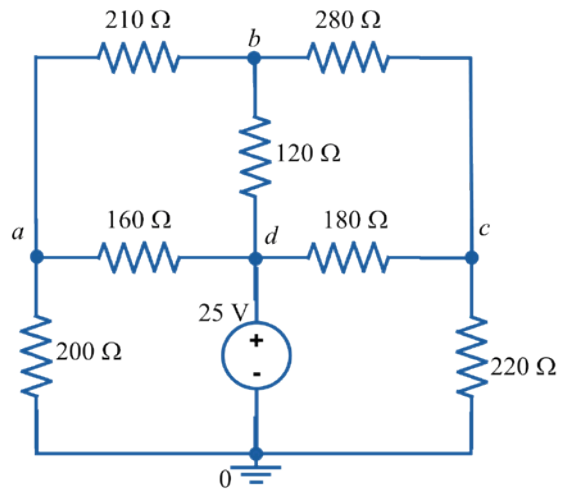


Figura 5.38.

Prob. 5.5. Figura 5.39.

Sol. -40 V, -28.62 V, 36.46 V, -53.55 V).

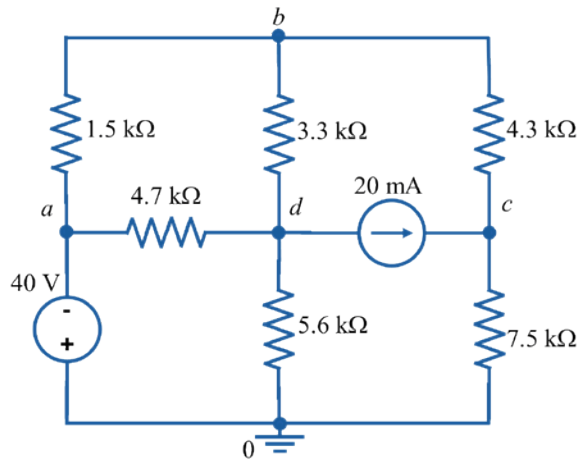


Figura 5.39.

Prob. 5.6. Figura 5.40.

(Sol. 9 V, 14 V, 11.11V 11.8 V, 8.1 V, 4.8 V).

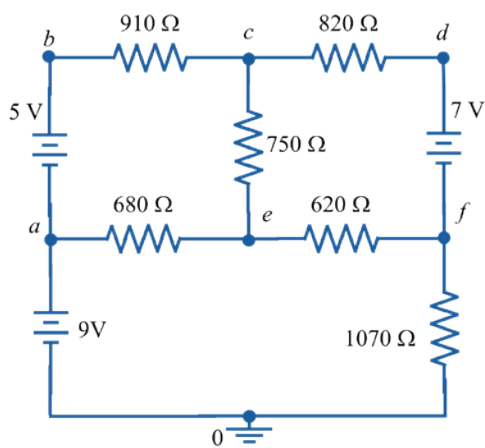


Figura 5.40.

Prob. 5.7. Figura 5.41.

(Sol. 10 V, 31.41 V, 60 V, 22.6 V, 22.6 V, 33.27 V).

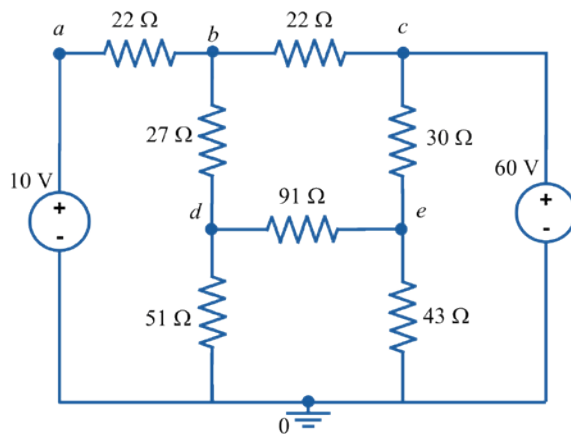


Figura 5.41.

Prob. 5.8. Figura 5.42.

(Sol. 12 V, 8.7 V, 3.7 V, 3 V).

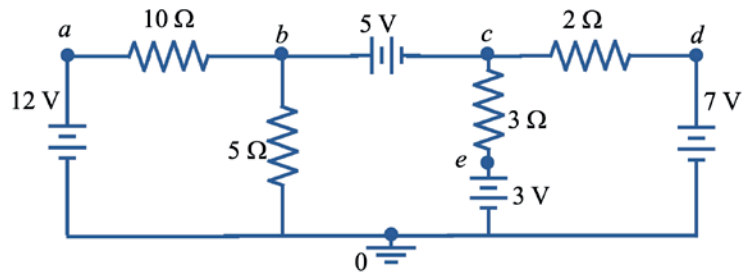


Figura 5.42.

Prob. 5.9. Figura 5.43.

(Sol. 15 V, 10.891 V, 4.37 V, 2.96 V, 5.89 V).

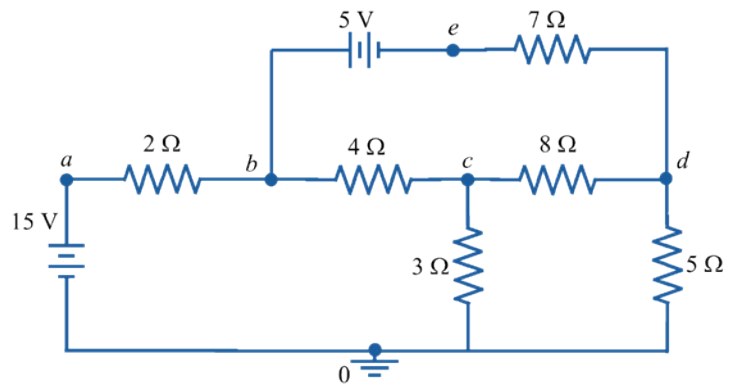


Figura 5.43.

Prob. 5.1.0 Figura 5.44.

(Sol. 15 V, 40 V, 175 V).

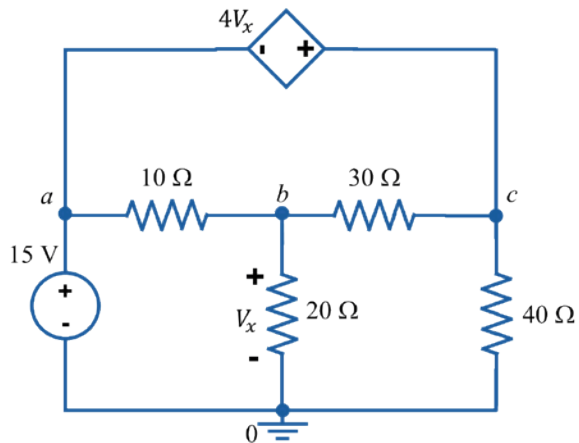


Figura 5.44.

Prob. 5.11. Figura 5.45.

(Sol. 25 V, 17 V, -10 V, 5 V, 2.14 V).

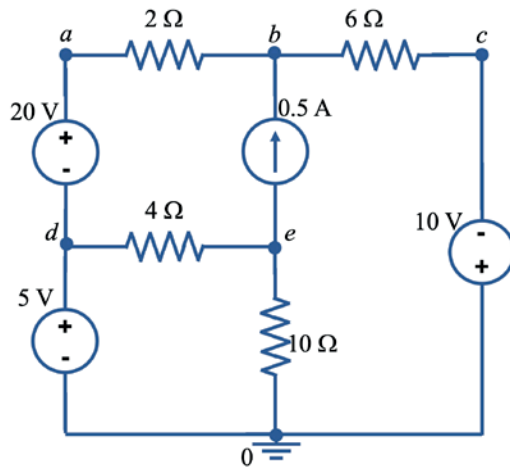


Figura 5.45.

Prob. 5.12. Figura 5.46.

(Sol. 12 V, 3 V, 2.5 V, -1 V).

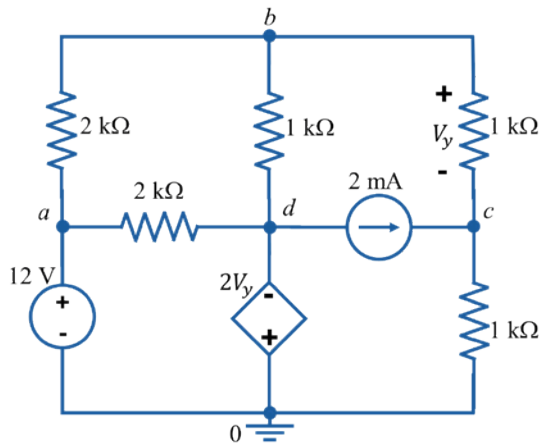


Figura 5.46.

Prob. 5.13. Figura 5.47.

(Sol. -25.48 V , 17.96 V , -11.98 mV , -15 V).

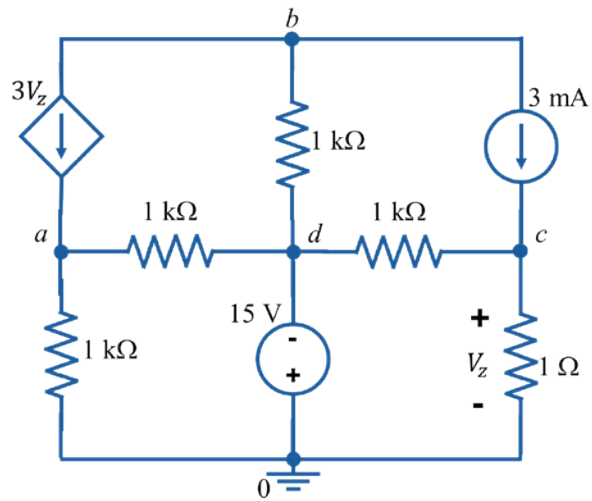


Figura 5.47.

Prob. 5.14. Figura 5.48.

(Sol. 6.23 V , 2.07 V , 13 V).

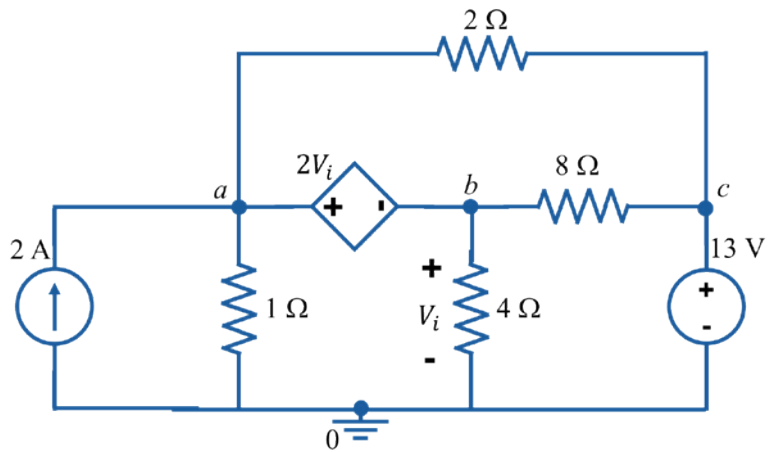


Figura 5.48.

Prob. 5.15. Figura 5.49.

(Sol. 5 V, 12.5 V, 20 V).

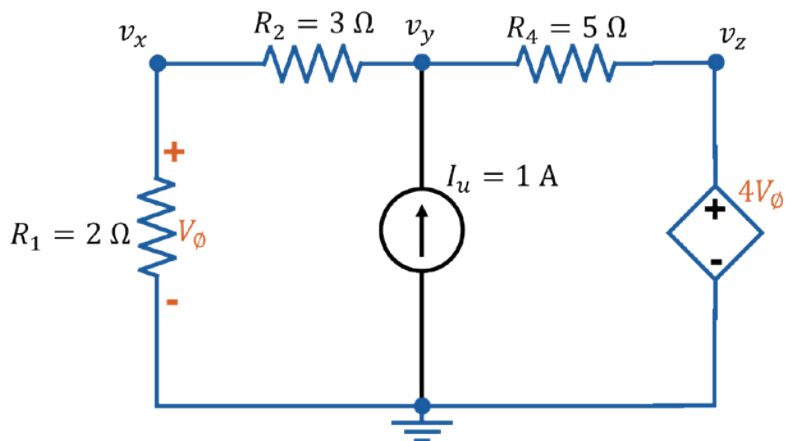


Figura 5.49.

Prob. 5.16. Figura 5.50.

(Sol. 1 V, -28 V, -5 V, -12 V).

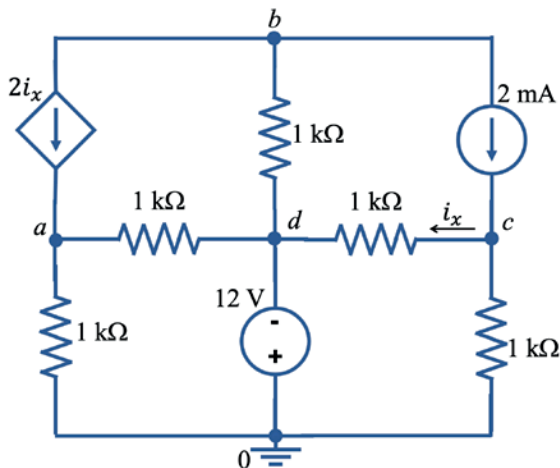


Figura 5.50.

REFERENCIAS DEL CAPÍTULO

- Hernández, M. (s. f.). Análisis de circuitos y sistemas lineales. En *Técnicas de análisis sistemático de circuitos: Análisis por mallas y nodos*. https://repositorio.innovacionumh.es/Proyectos/P_19/Tema_1/UMH_07.htm.
- Flores-Oropeza, L. A. [Luis Flores Circuitos]. (2017, marzo 21). 02 Nodos en Circuitos Eléctricos en CD [archivo de video]. Recuperado de <https://www.youtube.com/watch?v=35G4Wy8XOiw>

- McAllister, W. (2008a). La terminología de los circuitos. *Khan Academy*. <https://es.khanacademy.org/science/electrical-engineering/ee-circuit-analysis-topic/circuit-elements/a/ee-circuit-terminology>
- McAllister, W. (2008b). Las leyes de Kirchhoff. *Khan Academy*. Recuperado el 10 de enero de 2021 de: <https://es.khanacademy.org/science/physics/circuits-topic/circuits-resistance/a/ee-kirchhoffs-laws>
- Método de los voltajes de nodos (2013). En *EcuRed*. Recuperado el 21 de marzo en https://www.ecured.cu/M%C3%A9todo_de_los_voltajes_de_nodos



**LINEALIDAD
Y SUPERPOSICIÓN**

6

INTRODUCCIÓN

La linealidad se caracteriza porque para un sistema que tiene una entrada existe una salida que es proporcional a la entrada. Si la entrada se duplica, entonces la respuesta en la salida se duplica también; si la entrada disminuye, entonces la salida también lo hace en la misma proporción (McAllister, 2008).

Un ejemplo de linealidad puede ser el de una persona que camina 2 minutos y alcanza un recorrido de 1 km. Si caminase el doble, es decir cuatro minutos, entonces alcanzaría un recorrido de 2 km. El tiempo y la distancia recorrida están relacionadas linealmente por una expresión proporcional que establece que una persona recorre una distancia de 0.5 km en promedio en un tiempo de 1 minuto tal como se expresa en la ecuación (6.1).

$$S(t) = \left(0.5 \frac{\text{km}}{\text{min}}\right) t \quad (6.1)$$

Donde:

$S(t)$ = Distancia recorrida en kilometros (km)

t = tiempo del recorrido en minutos (min)

$\left(0.5 \frac{\text{km}}{\text{min}}\right)$ = Distancia promedio recorrida en un minuto (CTE)

Para los circuitos eléctricos con elementos pasivos sucede lo mismo, el voltaje y la corriente están relacionados linealmente el uno con la otra. El voltaje aplicado a una resistencia ocasiona que fluya un valor de corriente, si el voltaje aumenta al doble, entonces la corriente aumenta también al doble, si el voltaje disminuye a la mitad, entonces la corriente también lo hace. Ocurre lo mismo si la resistencia es alimentada por una fuente de corriente, si la corriente aumenta o disminuye, el voltaje aumenta o disminuye en la resistencia en la misma proporción que la corriente.

McAllister (2008) explica que cuando un sistema es lineal, como los que se acaban de describir, se puede derivar la propiedad de aditividad. Todas las funciones lineales tienen la forma de una recta con factor de escala (la pendiente) a , tal como se expresa en la ecuación (6.2):

$$f(x) = ax \quad (6.2)$$

Si la entrada es la suma de dos entradas diferentes ($x_1 + x_2$), entonces

$$f(x_1 + x_2) = a(x_1 + x_2) \quad (6.3)$$

y, usando la propiedad distributiva resulta la ecuación (6.4),

$$f(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2 \quad (6.4)$$

Los términos del lado derecho son equivalentes a:

$$ax_1 = f(x_1)$$

$$ax_2 = f(x_2)$$

Ahora se tiene una propiedad para la suma (llamada aditividad, en lenguaje matemático):

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \quad (6.5)$$

Entonces, si el sistema es lineal y se alimenta con una entrada x_1 , tendrá una respuesta $f(x_1)$, y si se alimentan con una entrada x_2 , tendrá una respuesta $f(x_2)$, y lo mismo sucede si se alimenta con una entrada $(x_1 + x_2)$; la respuesta será $f(x_1 + x_2)$ o lo que es lo mismo $f(x_1) + f(x_2)$.

Esta característica es llamada principio de “Superposición” en la solución de circuitos eléctricos. Consiste en obtener la salida del circuito de forma independiente para cada una de las fuentes de entrada y al final simplemente sumar algebraicamente las salidas para obtener la respuesta completa del sistema.

Pasos para aplicar el principio de superposición

Básicamente, se debe analizar el circuito de forma separada, con cada una de las fuentes de voltaje o corriente independientes que están en el circuito, y al final sumar algebraicamente los resultados que se obtienen con cada una de ellas.

A continuación, se proponen los siguientes tres pasos para resolver un circuito eléctrico aplicando el principio de superposición.

Paso 1.

Construir un subcircuito para cada una de las fuentes de alimentación independientes que aparecen en el circuito.

A partir del circuito original, se construyen tantos subcircuitos como fuentes independientes aparecen en él. Se marca el voltaje o la corriente en el elemento que se desea analizar, utilizando comillas o números romanos. Para construir el subcircuito con una sola fuente a la vez, se deja una sola fuente de alimentación y el resto se anula (se hace cero). Para anular las fuentes de corriente o voltaje se procede de la siguiente manera: la fuente de voltaje se anula o se hace de cero voltios (0 V), cortocircuitando sus terminales tal como se muestra en la Figura 6.1a; la fuente de corriente se

anula o se hace de cero amperes (0 A), dejando en circuito abierto sus terminales tal como se muestra en la Figura 6.1b.

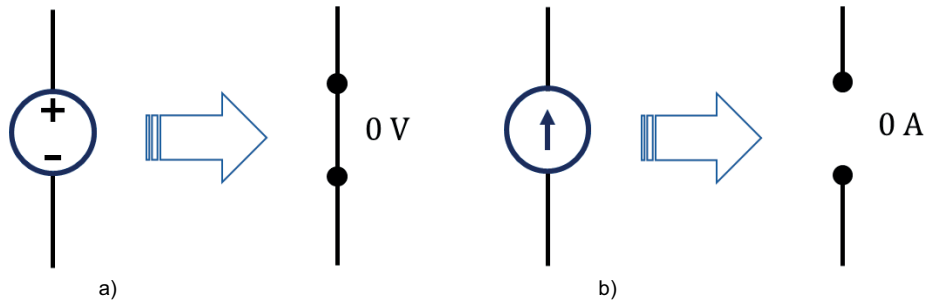


Figura 6.1. Para anular las fuentes, a) la fuente de voltaje se sustituye por un corto circuito y b) la fuente de corriente se sustituye por un circuito abierto.

Paso 2.

Resolver cada subcircuito por separado con cada una de las fuentes independientes.

Se resuelve cada uno de los subcircuitos reduciéndolos mediante combinaciones serie, paralelo o mixtas y se calcula la corriente o el voltaje del elemento que se está analizando. Esto significa que se resuelven tantos subcircuitos como fuentes independientes aparecen en él. En ocasiones es necesario aplicar alguna de las otras técnicas para el análisis de circuitos eléctricos, como el análisis de mallas, de nodos, transformaciones estrella y delta o alguna de las que se verán en capítulos posteriores.

Paso 3.

Sumar algebraicamente todos los voltajes o corrientes que se obtuvieron del elemento analizado.

Una vez que se tienen todas las corrientes o todos los voltajes calculados del elemento con cada una de las fuentes de alimentación, se suman algebraicamente para obtener el voltaje o la corriente total que se está buscando del circuito. Normalmente a los valores de voltaje o corriente que se calculan con cada una de las fuentes de alimentación se les va identificando con comillas para saber a cuál análisis pertenece. Por ejemplo, si se está calculando el voltaje en una resistencia v_R , se le coloca una comilla para saber que es el voltaje que se obtuvo con la primera fuente de alimentación (v_R'), dos comillas para saber que es el voltaje calculado con la segunda fuente de alimentación (v_R'') y así sucesivamente. A partir de la cuarta fuente en adelante, en lugar de comillas se suelen utilizar números romanos para identificar la contribución de corriente o voltaje de cada fuente de alimentación (v_R' , v_R'' , v_R''' , v_R^{IV} , v_R^V ..., etc. Por ejemplo, en las ecuaciones (6.6) y (6.7) se muestra cómo quedaría formada la ecuación para el voltaje y la corriente, respectivamente, en una resistencia para un circuito que cuente con 5 fuentes de alimentación.

$$v_R = v_R' + v_R'' + v_R''' + v_R^{IV} + v_R^V \quad (6.6)$$

$$i_R = i_R' + i_R'' + i_R''' + i_R^{IV} + i_R^V \quad (6.7)$$

ANÁLISIS DE CIRCUITOS UTILIZANDO EL PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

A continuación, se presentan una serie de ejercicios en los que se aplica el principio de superposición para calcular un voltaje o una corriente en el circuito. Se pretenden hacer los ejercicios suficientes para ejemplificar la mayor cantidad de casos posibles para que quede clara la explicación del tema.

Ejemplo 6-1. Utilizando el principio de superposición, calcular el voltaje v_x marcado en el circuito de la Figura 6.2.

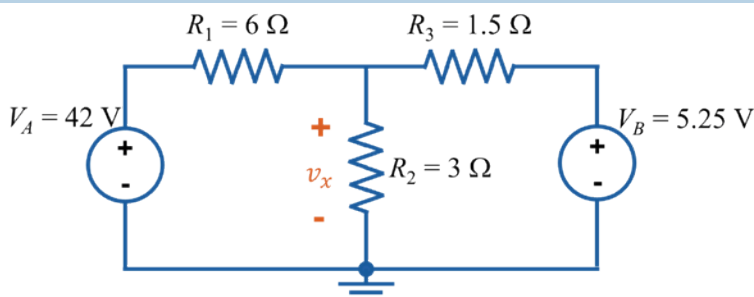


Figura 6.2. Circuito para aplicar el principio de superposición.

Respuesta.

Primero, observamos que en el circuito se cuenta con dos fuentes de voltaje independientes V_A y V_B , por lo tanto, es necesario construir dos subcircuitos para aplicar el principio de superposición. Un subcircuito en el que sólo aparezca la fuente V_A (en el que $V_B = 0V$) y otro subcircuito en el que sólo aparezca la fuente V_B (en el que $V_A = 0V$). En la Figura 6.3a y en la Figura 6.3b se muestra cómo quedan contruidos los subcircuitos para cada una de las fuentes de alimentación, haciendo cero la otra fuente de voltaje respectivamente.

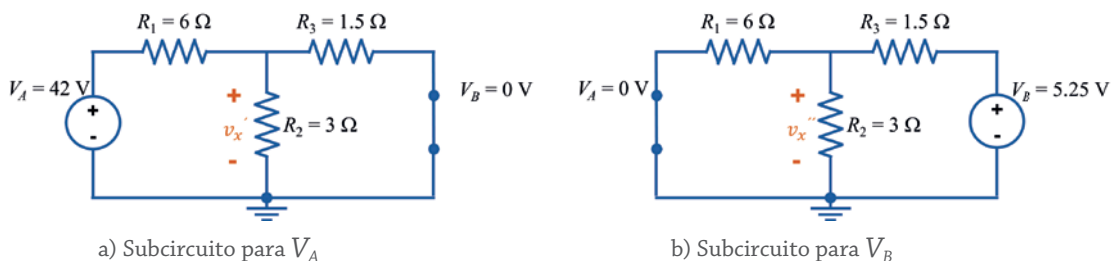


Figura 6.3. Construcción de subcircuitos para cada una de las fuentes de alimentación.

El segundo paso consiste en resolver cada uno de los subcircuitos y calcular los voltajes v_x' y v_x'' . Para resolver cada uno de los subcircuitos, se procede de la forma en que se solucionaron los circuitos mixtos (capítulo 2) o utilizando las fórmulas de divisor de corriente y divisor de voltaje (capítulo 3).

A continuación, se resuelven por separado cada subcircuito. Calculamos v_x' a partir del subcircuito para V_A de la Figura 6.3a.

Agrupamos las resistencias R_2 y R_3 en paralelo para poder aplicar un divisor de voltaje ya que tienen el mismo voltaje v_x' . La resistencia y el circuito equivalente se muestran en la Figura 6.4. La resistencia equivalente en paralelo resulta.

$$R_{23} = \frac{(R_2)(R_3)}{R_2 + R_3} = \frac{(3 \Omega)(1.5 \Omega)}{3 \Omega + 1.5 \Omega} = 1 \Omega$$

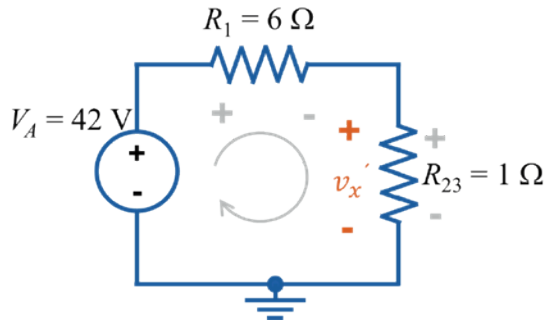


Figura 6.4. Circuito equivalente para poder aplicar divisor de voltaje.

Utilizando el divisor de voltaje calculamos el voltaje v_x' tal como se expresa en la ecuación (6.8).

$$v_x' = V_A \frac{R_{23}}{R_{23} + R_1} \quad (6.8)$$

Sustituimos los valores y nos resulta.

$$v_x' = (42 \text{ V}) \frac{1 \Omega}{1 \Omega + 6 \Omega}$$

$$v_x' = 6 \text{ V} \quad (6.9)$$

Calculamos v_x'' a partir del subcircuito para V_B de la Figura 6.3b.

Agrupamos las resistencias R_1 y R_2 en paralelo para poder aplicar un divisor de voltaje, ya que tienen el mismo voltaje v_x'' . La resistencia y el circuito equivalente se muestran en la Figura 6.5.

La resistencia equivalente en paralelo resulta:

$$R_{12} = \frac{(R_1)(R_2)}{R_1 + R_2} = \frac{(6 \Omega)(3 \Omega)}{6 \Omega + 3 \Omega} = 2 \Omega$$

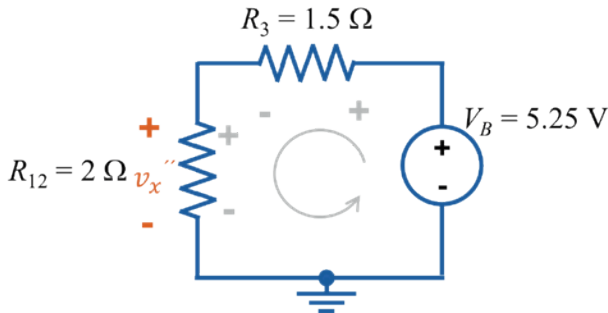


Figura 6.5. Circuito equivalente para poder aplicar divisor de voltaje.

Utilizando un divisor de voltaje calculamos el voltaje v_x'' , tal como se expresa en la ecuación (6.10).

$$v_x'' = V_B \frac{R_{12}}{R_{12} + R_3} \quad (6.10)$$

Sustituimos los valores y nos resulta:

$$v_x'' = (5.25 \text{ V}) \frac{2 \Omega}{2 \Omega + 1.5 \Omega}$$

$$v_x'' = 3 \text{ V} \quad (6.11)$$

En el tercer y último paso, sumamos algebraicamente los voltajes v_x' y v_x'' en uno solo para tener la ecuación (6.12).

$$v_x = v_x' + v_x'' \quad (6.12)$$

Sustituimos los valores y obtenemos el voltaje que se pide en el problema.

$$v_x = 6 \text{ V} + 3 \text{ V}$$

$$v_x = 9 \text{ V} \quad (6.13)$$

Obsérvese que este mismo problema se resolvió en el Ejemplo 1 del análisis con nodos del capítulo anterior, sólo que en ese problema el voltaje se llamó v_b . Nótese que en ambos problemas el resultado fue exactamente el mismo sólo que, en este caso, para llegar al resultado se tuvieron que resolver por separado dos sub-circuitos sencillos.

La diferencia con respecto al análisis de nodos y de mallas es que, al momento de resolver un problema utilizando el análisis por superposición, el procedimiento se centra en obtener un solo resultado. En el caso del análisis con nodos y mallas se calculan todos los voltajes de nodo y todas las corrientes de malla respectivamente.

Ejemplo 6-2. Utilizando el principio de superposición, resolver el mismo problema del ejemplo anterior, sólo que ahora para calcular el voltaje v_y marcado en el circuito de la Figura 6.6.

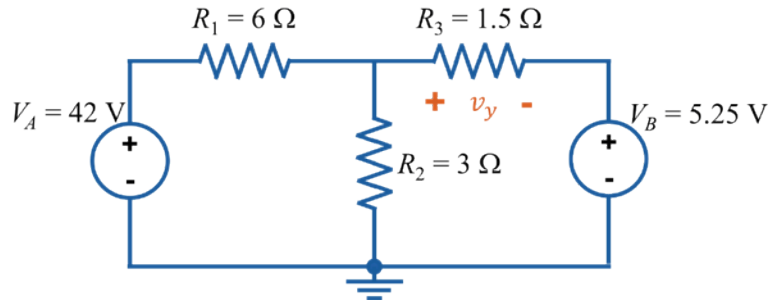


Figura 6.6. Circuito para aplicar el análisis por nodos.

Respuesta.

Primero, al igual que en el problema anterior, se cuenta con dos fuentes de voltaje independientes, V_A y V_B ; por lo tanto, es necesario construir dos subcircuitos para aplicar el principio de superposición. En la Figura 6.7a y en la Figura 6.7b se muestra cómo quedan contruidos los subcircuitos para cada una de las fuentes de alimentación, haciendo cero la otra fuente de voltaje respectivamente.

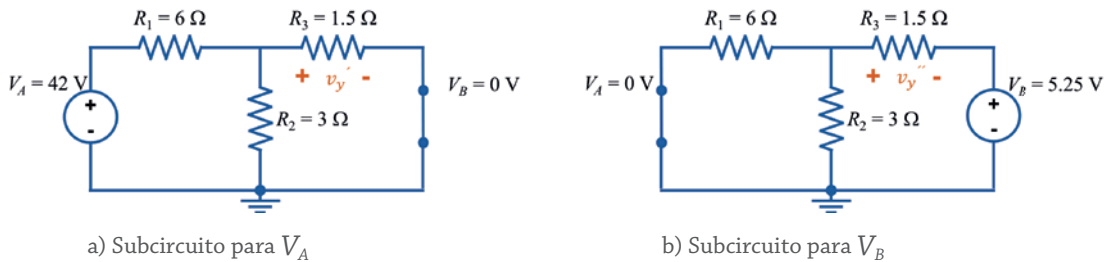


Figura 6.7. Construcción de subcircuitos para cada una de las fuentes de alimentación.

El segundo paso consiste en resolver cada uno de los subcircuitos y calcular los voltajes v_y' y v_y'' .

A continuación, se resuelven por separado cada subcircuito.

Calculamos v_y' a partir del subcircuito para V_A de la Figura 6.7a. Se resuelve exactamente igual que en el ejemplo anterior, ya que tanto R_2 y R_3 están en paralelo y tienen el mismo voltaje.

La resistencia y el circuito equivalente se muestran en la Figura 6.8.

La resistencia equivalente en paralelo resulta:

$$R_{23} = \frac{(R_2)(R_3)}{R_2 + R_3} = \frac{(3 \Omega)(1.5 \Omega)}{3 \Omega + 1.5 \Omega} = 1 \Omega$$

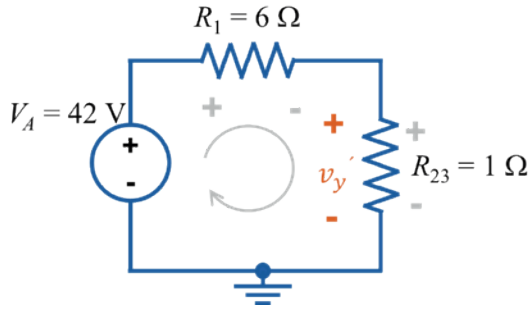


Figura 6.8. Circuito equivalente para poder aplicar divisor de voltaje.

Utilizando el divisor de voltaje calculamos el voltaje v_y' tal como se expresa en la ecuación (6.14).

$$v_y' = V_A \frac{R_{23}}{R_{23} + R_1} \quad (6.14)$$

Sustituimos los valores y nos resulta:

$$v_y' = (42 \text{ V}) \frac{1 \Omega}{1 \Omega + 6 \Omega}$$

$$v_y' = 6 \text{ V} \quad (6.15)$$

Calculamos v_y'' a partir del subcircuito para V_B de la Figura 6.7b. En este caso, volvemos a calcular la resistencia equivalente del paralelo entre R_1 y R_2 , sólo que ahora el voltaje que se busca no es el de estas dos resistencias sino el voltaje de la resistencia R_3 . La resistencia y el circuito equivalente se muestran en la Figura 6.9.

La resistencia equivalente en paralelo resulta:

$$R_{12} = \frac{(R_1)(R_2)}{R_1 + R_2} = \frac{(6 \Omega)(3 \Omega)}{6 \Omega + 3 \Omega} = 2 \Omega$$

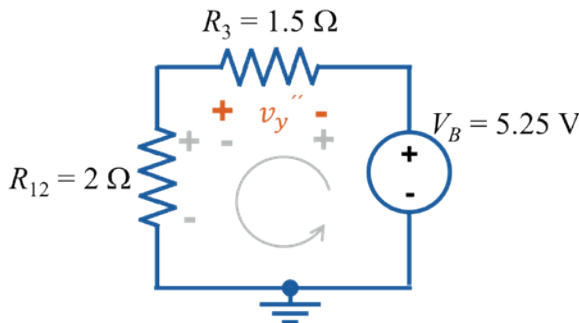


Figura 6.9. Circuito equivalente para poder aplicar divisor de voltaje.

Obsérvese que, de acuerdo con la convención pasiva de signos, los signos que corresponden para la resistencia R_3 son invertidos respecto del voltaje v_y'' . Por lo tanto, a la hora de calcular el voltaje en la resistencia R_3 con la fuente V_B se tiene que incluir un signo negativo.

Utilizando un divisor de voltaje calculamos el voltaje v_x'' tal como se expresa en la ecuación (6.16).

$$v_y'' = -V_B \frac{R_3}{R_3 + R_{12}} \quad (6.16)$$

Sustituimos los valores y nos resulta:

$$v_y'' = -(5.25 \text{ V}) \frac{1.5 \Omega}{1.5 \Omega + 2 \Omega}$$

$$v_y'' = -2.25 \text{ V} \quad (6.17)$$

En el tercer y último paso, sumamos algebraicamente los voltajes v_y' y v_y'' en uno solo para tener la ecuación (6.18).

$$v_y = v_y' + v_y'' \quad (6.18)$$

Sustituimos los valores y obtenemos el voltaje que se pide en el problema:

$$v_y = 6 \text{ V} - 2.25 \text{ V}$$

$$v_y = 3.75 \text{ V} \quad (6.19)$$

Observamos que, a pesar de que lo que se pide es un voltaje muy parecido al del ejemplo anterior, existe una ligera diferencia al estar ubicado en una posición en la que uno de los voltajes resultó invertido respecto del voltaje que se pide. Por lo tanto, se tuvo la necesidad de colocar un signo negativo en la ecuación (6.16) y al momento de calcular el voltaje total se restó del otro voltaje.

Esto mismo puede aplicar para calcular la corriente, entonces, se debe tener mucho cuidado con el análisis que se hace para evitar que se obtengan resultados equivocados.

Ejemplo 6-3. Aplicando el principio de superposición calcular la corriente i_x que se indica en la Figura 6.10.

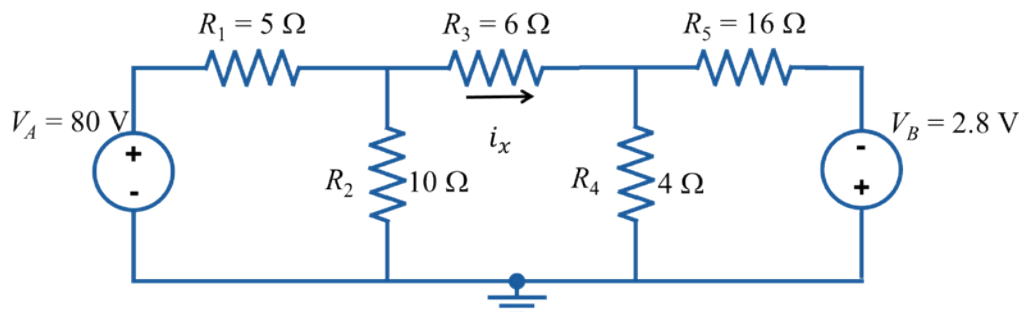


Figura 6.10. Circuito para calcular una corriente aplicando el principio de superposición.

Primero se construyen los dos subcircuitos que resultan por las dos fuentes de voltaje independientes V_A y V_B . En la Figura 6.11

y en la Figura 6.12 se muestra cómo quedan contruidos los subcircuitos para cada una de las fuentes de alimentación, haciendo cero la otra fuente de voltaje respectivamente. También se muestra (en color gris) cómo queda marcada cada una de las corrientes (en color gris) que se obtienen para cada circuito con sus respectivas fuentes de voltaje y de acuerdo con la convención pasiva de signos.

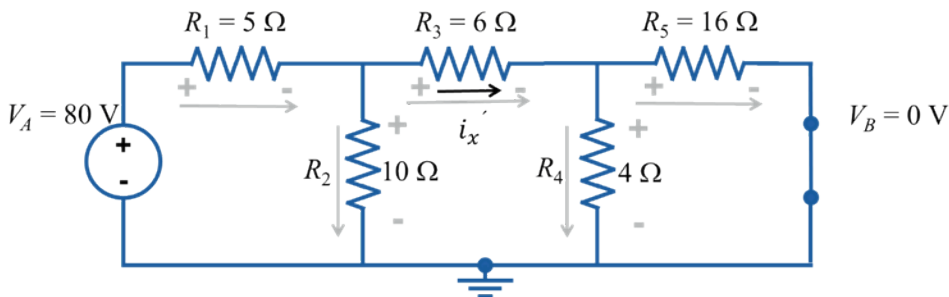


Figura 6.11. Subcircuito para el voltaje V_A .

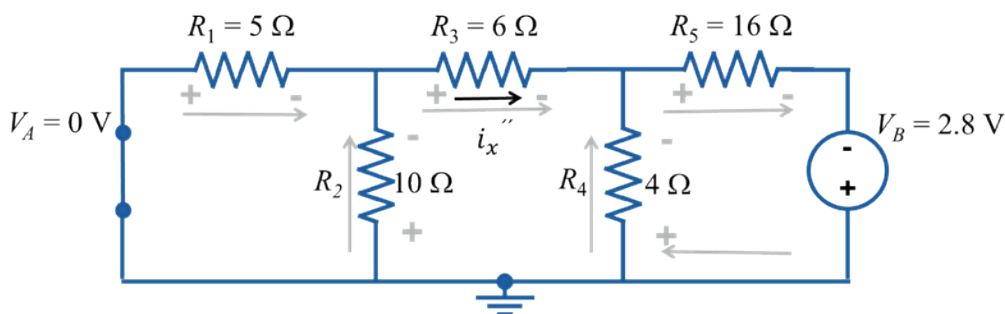


Figura 6.12. Subcircuito para el voltaje V_B .

El segundo paso consiste en resolver cada uno de los subcircuitos y calcular las corrientes i_x' e i_x'' .

Para calcular i_x' a partir de la Figura 6.11 se observa que se pueden agrupar las resistencias R_4 y R_5 en paralelo para quedar como se aprecia en la Figura 6.13.

$$R_{45} = \frac{(R_4)(R_5)}{R_4 + R_5} = \frac{(4\ \Omega)(16\ \Omega)}{4\ \Omega + 16\ \Omega} = 3.2\ \Omega$$

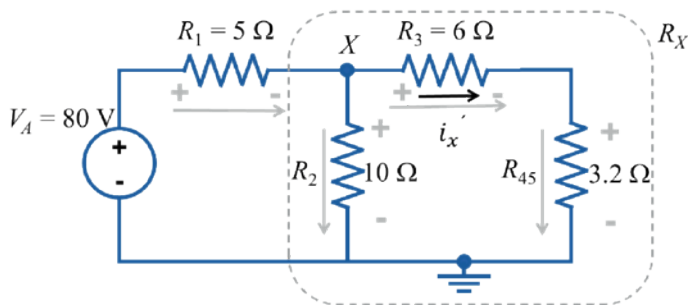


Figura 6.13. Simplificación de dos resistencias en paralelo.

La resistencia R_3 queda en serie con la resistencia R_{45} y todo este conjunto, a su vez, en paralelo con la resistencia R_2 . A todo este grupo de resistencias les llamaremos R_x y al voltaje de esta resistencia lo llamaremos V_x . En la Figura 6.14 se muestra cómo queda representada la resistencia R_x y el voltaje V_x .

$$R_x = \frac{(R_3 + R_{45})(R_2)}{(R_3 + R_{45}) + R_2} = \frac{(9.2 \Omega)(10 \Omega)}{9.2 \Omega + 10 \Omega} = 4.79 \Omega$$

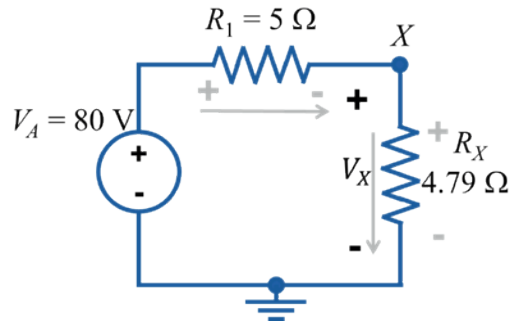


Figura 6.14. Simplificación del circuito para poder calcular la corriente i_x .

Utilizando un divisor de voltaje calculamos el voltaje V_x tal como se expresa en la ecuación (6.20).

$$V_x = V_A \frac{R_x}{R_x + R_1} \quad (6.20)$$

Sustituimos los valores del subcircuito en la ecuación anterior y nos resulta:

$$V_x = (80 \text{ V}) \frac{4.79 \Omega}{4.79 \Omega + 5 \Omega}$$

$$V_x = 39.14 \text{ V} \quad (6.21)$$

Con el voltaje V_x se puede calcular la corriente i_x' ya que este voltaje es el que se aplica a la suma de las resistencias R_3 y R_{45} que están conectadas en serie. Por lo tanto, la corriente i_x' se calcula con la ley de Ohm aplicada en esa rama del subcircuito con la ecuación (6.22).

$$i_x' = \frac{V_x}{R_3 + R_{45}} \quad (6.22)$$

Sustituimos los valores y resulta:

$$i_x' = \frac{39.14 \text{ V}}{6 \Omega + 3.2 \Omega}$$

$$i_x' = 4.25 \text{ A} \quad (6.23)$$

Para calcular i_x a partir de la Figura 6.12 se observa que se pueden agrupar las resistencias R_1 y R_2 en paralelo para quedar como se aprecia en la Figura 6.15.

$$R_{12} = \frac{(R_1)(R_2)}{R_1 + R_2} = \frac{(5 \Omega)(10 \Omega)}{5 \Omega + 10 \Omega} = 3.33 \Omega$$

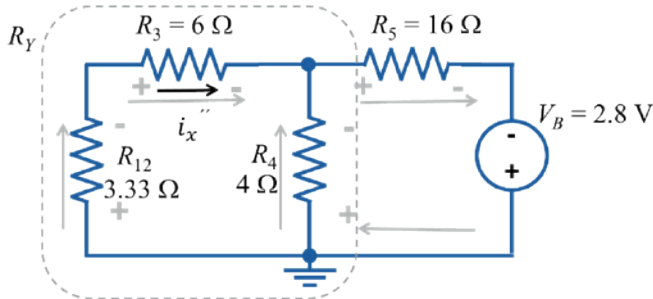


Figura 6.15. Simplificación de dos resistencias en paralelo.

La resistencia R_{12} queda en serie con la resistencia R_3 y todo este conjunto a su vez en paralelo con la resistencia R_4 . A todo este grupo de resistencias les llamaremos R_Y y al voltaje de esta resistencia lo llamaremos V_Y . En la Figura 6.16 se muestra cómo queda representada la resistencia R_Y y el voltaje V_Y .

$$R_Y = \frac{(R_{12} + R_3)(R_4)}{(R_{12} + R_3) + R_4} = \frac{(9.33 \Omega)(4 \Omega)}{9.33 \Omega + 4 \Omega} = 2.8 \Omega$$

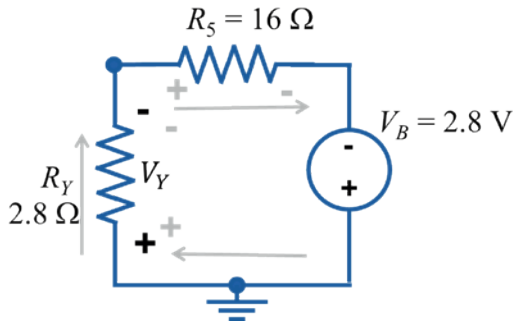


Figura 6.16. Simplificación del circuito para poder calcular la corriente i_x .

Utilizando un divisor de voltaje calculamos el voltaje V_Y tal como se expresa en la ecuación (6.24).

$$V_Y = V_B \frac{R_Y}{R_Y + R_5} \quad (6.24)$$

Sustituimos los valores del subcircuito en la ecuación anterior y nos resulta:

$$V_Y = (2.8 \text{ V}) \frac{2.8 \Omega}{2.8 \Omega + 16 \Omega}$$

$$V_Y = 0.417 \text{ V} \quad (6.25)$$

Con el voltaje V_Y se puede calcular la corriente i_x'' ya que este mismo voltaje es el que se aplica a la suma de las resistencias R_{12} y R_3 que están conectadas en serie. Por lo tanto, la corriente i_x'' se calcula con la ley de Ohm aplicada en esa rama del subcircuito con la ecuación (6.26).

$$i_x'' = \frac{V_Y}{R_{12} + R_3} \quad (6.26)$$

Sustituimos los valores y resulta:

$$i_x'' = \frac{0.417 \text{ V}}{3.33 \Omega + 6 \Omega}$$

$$i_x'' = 0.044,69 \text{ A} \quad (6.27)$$

En el tercer y último paso, sumamos algebraicamente las corrientes i_x' y i_x'' en una sola para tener la ecuación (6.28).

$$i_x = i_x' + i_x'' \quad (6.28)$$

Sustituimos los valores y obtenemos la corriente que se pide en el problema.

$$i_x = 4.25 \text{ A} + 0.044,69 \text{ A}$$

$$i_x = 4.294,69 \text{ A} \quad (6.29)$$

Obsérvese que en ambos subcircuitos la dirección de la corriente coincidió con la dirección de corriente buscada, por esa razón ambos valores de corriente fueron positivos y se sumaron.

Este mismo valor de corriente i_x se calculó resolviendo el mismo problema con el análisis de mallas (capítulo 4, Ejemplo 2). Sólo que, con el análisis de mallas, se tuvo que resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas y la corriente se llamó I_2 .

Ejemplo 6-4. Aplicando el principio de superposición calcular el voltaje v_b que se muestra en el circuito de la Figura 6.17.

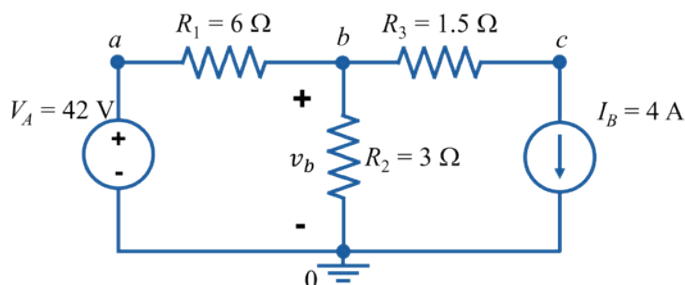


Figura 6.17. Circuito fuente de voltaje y fuente de corriente para aplicar el principio de superposición.

Respuesta.

Es un circuito con dos fuentes independientes, una de voltaje (V_A) y una de corriente (I_B), por lo tanto, se deben construir dos subcircuitos, uno para cada fuente de alimentación. En la Figura 6.18 se muestra la construcción del subcircuito utilizando la fuente de voltaje independiente e indicando las direcciones de corrientes de acuerdo con la convención de signos pasiva. De igual forma, en la Figura 6.19 se presenta el subcircuito para el caso de la fuente de corriente, y en donde además se observa que la polaridad del voltaje en v_b'' es invertida respecto del valor que se está buscando.

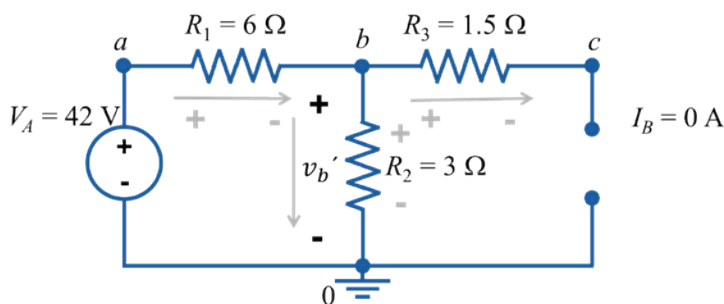


Figura 6.18. Subcircuito para la fuente de voltaje V_A .

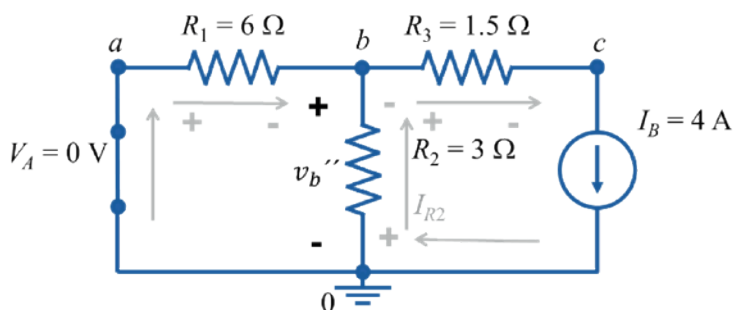


Figura 6.19. Subcircuito para la fuente de corriente I_B .

En el segundo paso calculamos los valores de v_b' y v_b'' en los subcircuitos.

Calcular el valor de v_b' a partir de la Figura 6.18 resulta muy sencillo ya que sólo se tienen conectadas las resistencias R_1 y R_2 a la fuente de voltaje. La resistencia R_3 no se considera porque la terminal que estaba conectada a la fuente de corriente quedó en circuito abierto.

Utilizando un divisor de voltaje calculamos el voltaje v_b' tal como se expresa en la ecuación (6.30).

$$v_b' = V_A \frac{R_2}{R_2 + R_1} \quad (6.30)$$

Sustituimos los valores y nos resulta:

$$\begin{aligned} v_b' &= (42 \text{ V}) \frac{3 \Omega}{3 \Omega + 6 \Omega} \\ v_b' &= 14 \text{ V} \end{aligned} \quad (6.31)$$

Calcular el valor de v_b'' a partir de la Figura 6.19 resulta también sencillo ya que, al tratarse de una fuente de corriente que se separa entre las resistencias R_1 y R_2 , un simple divisor de corriente es suficiente para medir el valor de la corriente a través de la resistencia R_2 y por lo tanto para calcular inmediatamente el voltaje v_b'' .

Utilizando un divisor de corriente calculamos la corriente a través de la resistencia R_2 con la ecuación (6.32).

$$I_{R2} = I_B \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (6.32)$$

Sustituimos los valores y nos resulta:

$$\begin{aligned} I_{R2} &= (4 \text{ A}) \frac{6 \Omega}{6 \Omega + 3 \Omega} \\ I_{R2} &= 2.666 \text{ A} \end{aligned} \quad (6.33)$$

Con este valor de corriente se calcula de forma directa el voltaje v_b'' , sólo se debe observar que la corriente (I_{R2}), que está circulando a través de la resistencia R_2 , produce un voltaje invertido (signos grises) respecto del que estamos buscando (signos negros). Por lo tanto, se debe incluir un signo negativo en la expresión para obtener la polaridad del voltaje que se pide.

$$\begin{aligned} v_b'' &= -(I_{R2})(R_2) \\ v_b'' &= -(2.666 \text{ A})(3 \Omega) \\ v_b'' &= -7.998 \text{ V} \approx -8 \text{ V} \end{aligned} \quad (6.34)$$

En el tercer y último paso, se suman algebraicamente los voltajes v_b' y v_b'' en uno solo para tener la ecuación (6.18).

$$v_b = v_b' + v_b'' \quad (6.35)$$

Sustituimos los valores y obtenemos el voltaje que se pide en el problema.

$$\begin{aligned} v_b &= 14 \text{ V} - 8 \text{ V} \\ v_b &= 6 \text{ V} \end{aligned} \quad (6.36)$$

Este mismo problema se resolvió con el análisis de nodos (Capítulo 5, Ejemplo 5-6); en él, se calculó este y todos los voltajes de nodo, pero se tuvo que resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Ejemplo 6-5. Aplicando el principio de superposición calcular el voltaje V_x y las corrientes I_A , I_B e I_C marcadas en el circuito de la Figura 6.20.

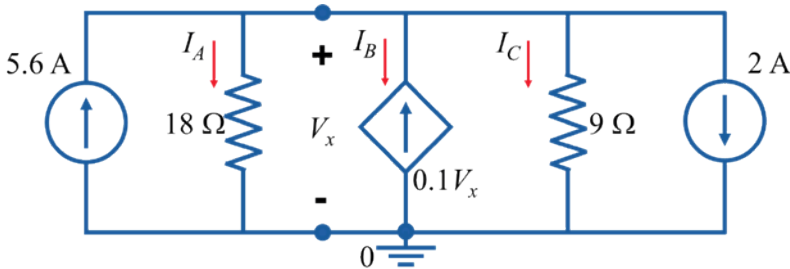


Figura 6.20. Circuito con fuente de corriente dependiente de voltaje para aplicar el principio de superposición.

Respuesta.

A pesar de que se piden cuatro valores, en realidad sólo es necesario calcular el valor del voltaje V_x y a partir de éste se calcula el resto.

Al igual que para los ejemplos anteriores, lo primero que se debe hacer es construir un subcircuito para cada una de las fuentes de corriente independientes. En la Figura 6.21 y la Figura 6.22 se muestran los dos subcircuitos que resultan del circuito original.

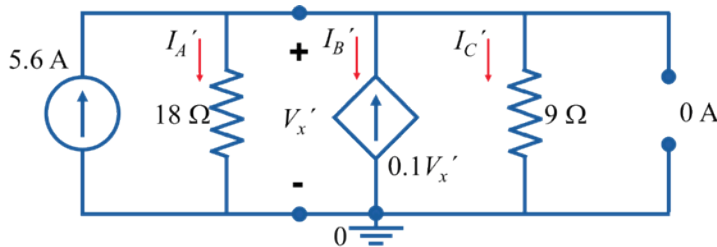


Figura 6.21. Subcircuito para la fuente de corriente de 5.6A.

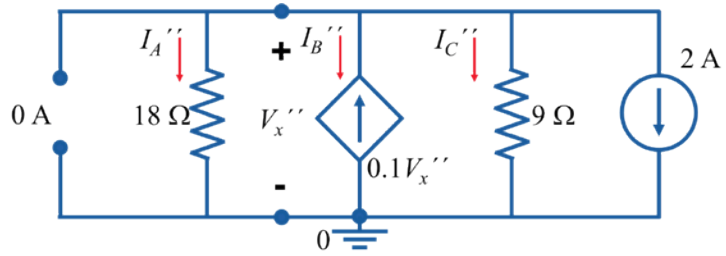


Figura 6.22. Subcircuito para la fuente de corriente de 2 A.

El segundo paso consiste en resolver cada uno de los subcircuitos y en ellos calcular V_x' y V_x'' respectivamente.

Resolvemos el subcircuito de la Figura 6.21 para la fuente de corriente de 5.6 A. Al tratarse de un circuito formado por dos nodos, se resuelve como los ejemplos explicados en el capítulo 3. Aplicamos la ley de corrientes de Kirchhoff en el nodo superior de la Figura 6.21 y nos resulta la ecuación (6.37).

$$\sum I_{entran} = \sum I_{salen}$$

$$5.6 \text{ A} = I_{A'} + I_{B'} + I_{C'} \quad (6.37)$$

Definimos cada una de las corrientes en función del voltaje V_x' .

Para la corriente $I_{A'}$ se tiene:

$$I_{A'} = \frac{V_x'}{18 \Omega} \quad (6.38)$$

Para la corriente $I_{B'}$ se tiene:

$$I_{B'} = -0.1V_x' \quad (6.39)$$

Para la corriente $I_{C'}$ se tiene:

$$I_{C'} = \frac{V_x'}{9 \Omega} \quad (6.40)$$

Sustituimos las ecuaciones (6.38), (6.39) y (6.40) en la ecuación (6.37). Para facilidad en los cálculos se omiten las unidades y resulta la ecuación (6.41).

$$5.6 = \frac{V_x'}{18} + (-0.1V_x') + \frac{V_x'}{9} \quad (6.41)$$

De la ecuación anterior despejamos el valor del voltaje V_x' y nos resulta:

$$\begin{aligned}
 5.6 &= \frac{V_x'}{18} - 0.1V_x' + \frac{V_x'}{9} \\
 5.6 &= V_x' \left(\frac{1}{18} - 0.1 + \frac{1}{9} \right) \\
 V_x' &= \frac{5.6}{\left(\frac{1}{18} - 0.1 + \frac{1}{9} \right)} \\
 V_x' &= 83.99 \text{ V} \approx 84 \text{ V} \tag{6.42}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, al sustituir el voltaje V_x' se obtienen los valores de las corrientes I_A' , I_B' e I_C' .

$$I_A' = \frac{84 \text{ V}}{18 \Omega} = 4.666 \text{ A} \tag{6.43}$$

Para la corriente I_B' se tiene:

$$I_B' = -0.1 \frac{\text{A}}{\text{V}} V_x' = -0.1 \frac{\text{A}}{\text{V}} (84 \text{ V}) = -8.4 \text{ A} \tag{6.44}$$

Para la corriente I_C' se tiene:

$$I_C' = \frac{V_x'}{9 \Omega} = \frac{84 \text{ V}}{9 \Omega} = 9.333 \text{ A} \tag{6.45}$$

Ahora resolvemos el subcircuito de la Figura 6.22 para la fuente de corriente de 2 A. También se trata de un circuito con dos nodos, por lo tanto, se resuelve de la misma manera que el circuito anterior. Aplicamos la ley de corrientes de Kirchhoff en el nodo superior de la Figura 6.22 y nos resulta la ecuación (6.46).

$$\begin{aligned}
 \sum I_{entran} &= \sum I_{salen} \\
 0 \text{ A} &= I_A'' + I_B'' + I_C'' + 2 \text{ A} \tag{6.46}
 \end{aligned}$$

Definimos cada una de las corrientes en función del voltaje V_x'' .

Para la corriente I_A'' se tiene:

$$I_A'' = \frac{V_x''}{18 \Omega} \tag{6.47}$$

Para la corriente I_B'' se tiene:

$$I_B'' = -0.1V_x'' \tag{6.48}$$

Para la corriente I_C'' se tiene:

$$I_C'' = \frac{V_x''}{9 \Omega} \quad (6.49)$$

Sustituimos las ecuaciones (6.47), (6.48) y (6.49) en la ecuación (6.46). Para facilidad en los cálculos se omiten las unidades y resulta la ecuación (6.50).

$$0 = \frac{V_x'}{18} + (-0.1V_x'') + \frac{V_x''}{9} + 2 \quad (6.50)$$

De la ecuación anterior despejamos el valor del voltaje V_x'' y nos resulta:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{V_x''}{18} - 0.1V_x'' + \frac{V_x''}{9} \\ -2 &= V_x'' \left(\frac{1}{18} - 0.1 + \frac{1}{9} \right) \\ V_x'' &= \frac{-2}{\left(\frac{1}{18} - 0.1 + \frac{1}{9} \right)} \\ V_x'' &= -30 \text{ V} \end{aligned} \quad (6.51)$$

Por lo tanto, al sustituir el voltaje V_x'' se obtienen los valores de las corrientes I_A'' , I_B'' e I_C'' .

$$I_A'' = \frac{-30 \text{ V}}{18 \Omega} = -1.666 \text{ A} \quad (6.52)$$

Para la corriente I_B'' se tiene:

$$I_B'' = -0.1 \frac{\text{A}}{\text{V}} V_x'' = -0.1 \frac{\text{A}}{\text{V}} (-30 \text{ V}) = 3 \text{ A} \quad (6.53)$$

Para la corriente I_C'' se tiene:

$$I_C'' = \frac{V_x''}{9 \Omega} = \frac{-30 \text{ V}}{9 \Omega} = -3.333 \text{ A} \quad (6.54)$$

En el tercer y último paso, se suman algebraicamente los voltajes V_x' y V_x'' , las corrientes I_A' con I_A'' , I_B' con I_B'' e I_C' con I_C'' , respectivamente para obtener los valores de voltaje y corriente que se piden en el problema tal como se aprecia en las ecuaciones (6.55) a (6.58) resultando:

$$\begin{aligned} V_x &= V_x' + V_x'' \\ V_x &= 84 \text{ V} - 30 \text{ V} = 54 \text{ V} \end{aligned} \quad (6.55)$$

$$I_A = I_A' + I_A''$$

$$I_A = 4.666 \text{ A} - 1.666 \text{ A} = 3 \text{ A} \quad (6.56)$$

$$I_B = I_B' + I_B''$$

$$I_B = -8.4 \text{ A} + 3 \text{ A} = -5.4 \text{ A} \quad (6.57)$$

$$I_C = I_C' + I_C''$$

$$I_C = 9.333 \text{ A} - 3.333 \text{ A} = 6 \text{ A} \quad (6.58)$$

Este mismo problema se resolvió en el capítulo 3 en el tema de Análisis de circuitos de un par de nodos (Ejemplo 3-3).

¿CUÁNDO ES CONVENIENTE APLICAR EL PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN?

El principio de superposición es muy útil cuando se trata de resolver circuitos de pocas resistencias y con pocas fuentes de alimentación (dos o tres máximo), ya que, con la reducción de resistencias en serie, paralelo y mixta y con la aplicación de divisores de voltaje y de corriente, se puede obtener con relativa sencillez el voltaje o la corriente que se busca. De esta manera se puede evitar la necesidad de resolver sistemas de ecuaciones simultáneas con dos, tres o más incógnitas. Sin embargo, para muchos otros casos, la aplicación del principio de superposición no refleja una ventaja significativa frente a los métodos ya explicados en capítulos anteriores, debido a que, para resolver cada subcircuito, probablemente sea necesario hacer transformaciones estrella-delta o incluso haya necesidad de utilizar los métodos de mallas o de nodos. En esos casos, es preferible utilizar alguno de esos métodos para resolver el circuito ya que, con seguridad, el circuito será resuelto mucho más rápido.

Por otro lado, existen circuitos eléctricos en los que aplicar el principio de superposición es la única alternativa para poder analizar y resolver el problema. Esta clase de circuitos es aquella en la que conviven simultáneamente fuentes o señales de corriente directa (V_{CD}) y fuentes o señales de corriente alterna (V_{CA}) (señales periódicas que varían en el tiempo). En la Figura 6.23 se muestra el ejemplo de un circuito que está integrado por una fuente de voltaje de corriente directa (V_{CD}) conectada a un arreglo de resistencias y en el que también está conectada a una fuente de voltaje de corriente alterna (V_{CA}).

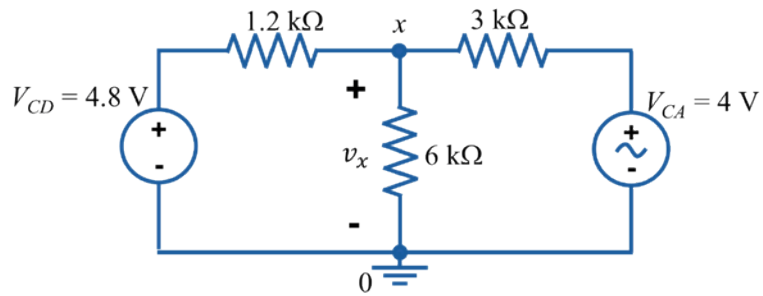


Figura 6.23. Circuito con la presencia de dos fuentes de alimentación, una de corriente directa V_{CD} y otra de corriente alterna V_{CA} .

Para este problema, será suficiente con interpretar que el voltaje de corriente alterna (V_{CA}) tiene la forma que se muestra en la Figura 6.24. Se trata de una señal de voltaje que oscila su valor entre +4 V y -4 V pasando por 0 V de forma periódica. Este tipo de señales se estudiarán más a fondo en el curso de circuitos eléctricos de corriente alterna.

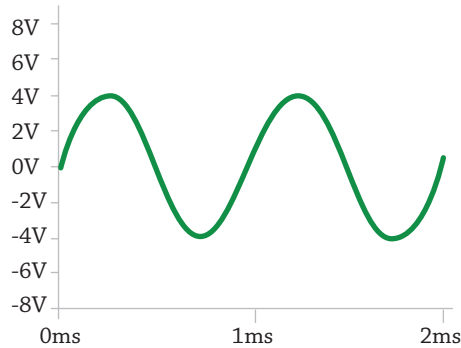


Figura 6.24. Señal de voltaje de corriente alterna V_{CA} . (Fuente: Señal obtenida mediante el simulador de circuitos eléctricos LTspice -ANALOG-DEVICES, 1999-).

Para resolver este circuito y obtener el voltaje v_x se hace exactamente igual que como se resolvieron los ejemplos anteriores, es decir, para cada fuente de voltaje (ya sea de corriente alterna o de corriente directa), se tiene que construir un subcircuito y resolverlo por separado para calcular v_x con cada fuente y, al final, sumar los resultados.

Para calcular v_x' con la fuente de voltaje de corriente directa el subcircuito que resulta se aprecia en la Figura 6.25.

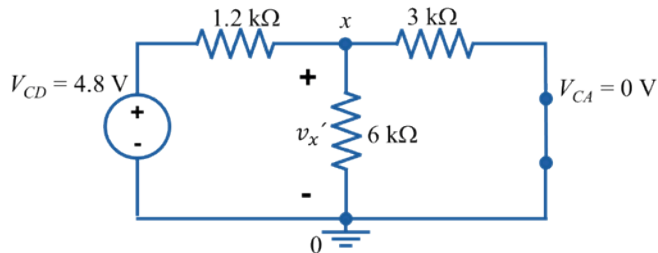


Figura 6.25. Subcircuito para la fuente de voltaje de corriente directa V_{CD} .

El circuito se reduce para calcular v_x' ; las resistencias de $6\text{ k}\Omega$ y de $3\text{ k}\Omega$ se agrupan en paralelo, resultando una resistencia equivalente de $2\text{ k}\Omega$. Al estar ambas resistencias en paralelo entonces tienen el mismo voltaje. Con un divisor de tensión entre la resistencia de $1.2\text{ k}\Omega$ y la resistencia equivalente de $2\text{ k}\Omega$ el resultado del voltaje v_x' queda de la siguiente manera:

$$v_x' = V_{CD} \frac{2\text{ k}\Omega}{1.2\text{ k}\Omega + 2\text{ k}\Omega} = (4.8\text{ V}) \frac{2\text{ k}\Omega}{1.2\text{ k}\Omega + 2\text{ k}\Omega}$$

$$v_x' = 3\text{ V} \quad (6.59)$$

Para la fuente de voltaje de corriente alterna el subcircuito para calcular v_x'' resulta como se aprecia en la Figura 6.26.

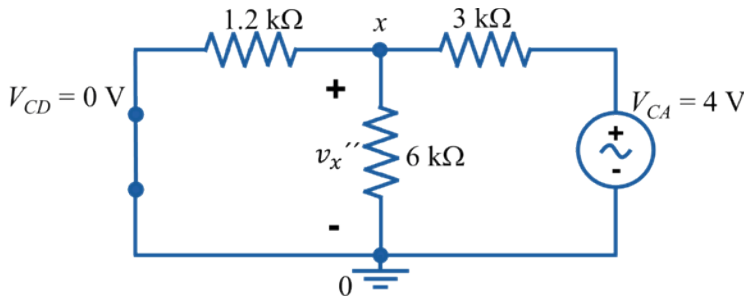


Figura 6.26. Subcircuito para la fuente de voltaje de corriente alterna V_{CA} .

Para calcular v_x'' se agrupan en paralelo las resistencias de $1.2\text{ k}\Omega$ y de $6\text{ k}\Omega$, resultando una resistencia equivalente de $1\text{ k}\Omega$. Al estar ambas resistencias en paralelo entonces tienen el mismo voltaje. Con un divisor de tensión entre la resistencia de $3\text{ k}\Omega$ y la resistencia equivalente de $1\text{ k}\Omega$ el resultado del voltaje v_x'' queda de la siguiente manera:

$$v_x'' = V_{CA} \frac{1\text{ k}\Omega}{3\text{ k}\Omega + 1\text{ k}\Omega} = (4\text{ V}) \frac{1\text{ k}\Omega}{3\text{ k}\Omega + 1\text{ k}\Omega}$$

$$v_x'' = 1\text{ V} \quad (6.60)$$

Esto significa que la señal de corriente alterna (V_{CA}) contribuye en la resistencia de $6\text{ k}\Omega$ con un voltaje de 1 V , pero de corriente alterna. Esta señal estará oscilando alternadamente entre $+1\text{ V}$ y -1 V pasando por 0 V de forma periódica.

Para obtener la respuesta completa, sólo se suman eléctricamente las señales de voltaje que se obtuvieron tal como se expresa en la ecuación (6.61), pero en esta ocasión la suma se dejará indicada ya que se trata de señales de distinta índole. Como ya se mencionó desde el principio del problema, una es de voltaje de corriente directa y la otra es de voltaje de corriente alterna. Matemáticamente éste sería el resultado que se obtendría ya que no se pueden sumar directamente las señales por ser de distinto tipo.

$$v_x = v_x' + v_x''$$

$$v_x = 3 V_{CD} + 1 V_{CA} \quad (6.61)$$

Una forma gráfica de comprender lo anterior se ilustra en la secuencia de figuras que se presentan a continuación. En la Figura 6.27a se muestra v_x' y la forma en que se grafica; en ella se observa que se trata de un valor constante de voltaje de 3 V todo el tiempo, mientras que en la Figura 6.27b se muestra v_x'' , de la cual se observa que es una señal de voltaje que está variando en el tiempo y su valor oscila entre +1 V y -1 V, pasando por 0 V de forma periódica.

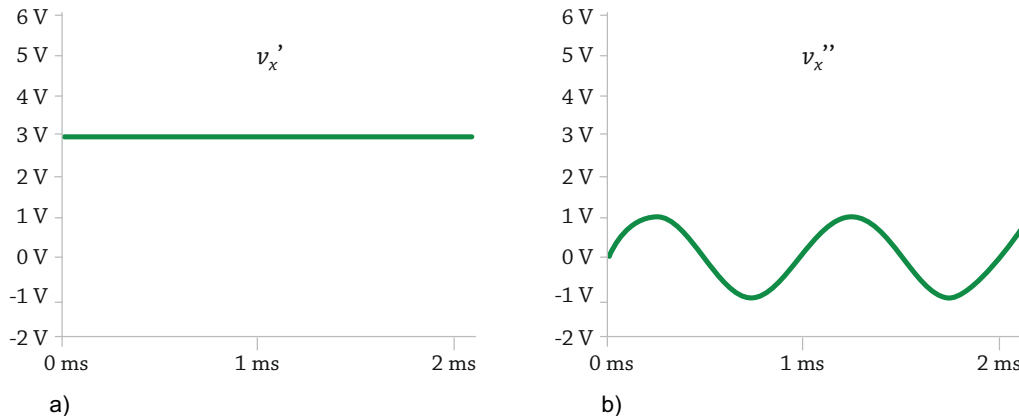


Figura 6.27. Contribución de voltaje de cada una de las fuentes a la resistencia de 6 k Ω . a) La fuente de voltaje de corriente directa aporta 4 V constantes mientras que b) la fuente de corriente alterna contribuye con 1 V que se alterna de positivo a negativo. (Fuente: Señales obtenidas mediante el simulador de circuitos eléctricos LTspice –ANALOG-DEVICES, 1999–).

Al momento de sumarse eléctricamente ambas señales en el circuito de la Figura 6.23, la señal v_x será una señal de 3 V en la que se superpone (superposición) la señal de ± 1 V teniendo puntos de voltaje máximo de 4 V y puntos de voltaje mínimo de 2 V tal como se aprecia en la Figura 6.28.

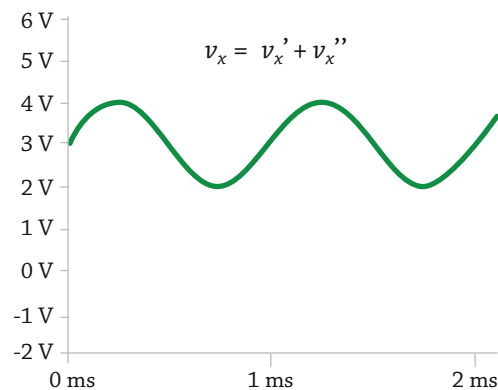


Figura 6.28. Resultado de sumar una señal de voltaje de corriente directa v_x' y una señal de voltaje de corriente alterna v_x'' en la resistencia de un circuito eléctrico. (Fuente: Señal obtenida mediante el simulador de circuitos eléctricos LTspice (ANALOG-DEVICES, 1999).

RESUMEN Y CONCLUSIÓN

En este capítulo, se presentó la técnica de análisis de circuitos utilizando la propiedad de linealidad en los circuitos eléctricos. Esta propiedad establece que si el circuito está integrado únicamente por componentes lineales como resistencias, inductores o capacitores, entonces se puede analizar por separado para cada una de las fuentes de alimentación y después sumar los resultados obtenidos con cada una de las fuentes y formar una respuesta completa. Las fuentes de alimentación pueden ser de voltaje o de corriente y en el circuito puede haber fuentes dependientes, pero estas no se analizan por separado.

Esta técnica de análisis resulta útil y práctica para circuitos que están conformados por pocos elementos y pocas fuentes de alimentación. En este capítulo se resolvieron paso a paso distintos ejercicios utilizando fuentes de voltaje, fuentes de corriente y fuentes dependientes. En cada ejemplo se construyeron los subcircuitos que se derivaron de cada ejercicio y se calcularon por separado todos y cada uno de ellos para después sumarse y obtener la respuesta total.

Si los circuitos que se van a resolver se dividen en más de 3 subcircuitos o si es necesario hacer transformaciones complejas como de estrella a delta o de delta a estrella, o si para cada subcircuito se debe utilizar otra técnica de análisis como el método de mallas o de nodos, entonces no es recomendable utilizar el análisis de superposición. Es preferible seleccionar desde un principio dichas técnicas de análisis, ya que por el método de superposición resultará mucho más tardado y probablemente confuso.

Sin embargo, la técnica de análisis de superposición encuentra enorme utilidad en el análisis de circuitos en los que conviven señales de corriente directa y corriente alterna, ya que es la única forma en la que se pueden analizar dichos circuitos. En este capítulo, se incluye al final el análisis de un circuito con estas características.

PROBLEMAS PROPUESTOS

A continuación, se proponen una serie de problemas para poner en práctica lo aprendido del análisis de circuitos utilizando el método de superposición. Se deberá calcular el voltaje o la corriente indicada en cada uno de los problemas siguientes.

Prob. 6.1. Figura 6.29.

(Sol. $v_b = 20$ V).

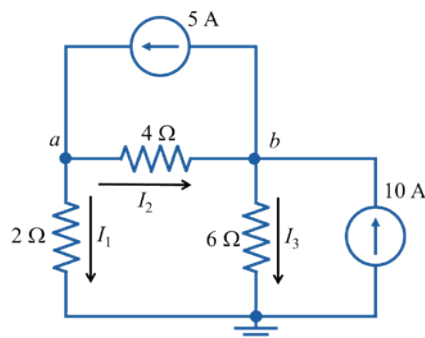


Figura 6.29.

Prob. 6.2. Figura 6.30.

(Sol. $v_b = 21$ V).

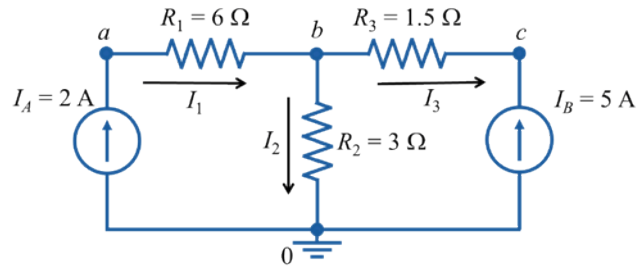


Figura 6.30.

Prob. 6.3. Figura 6.31

(Sol. $v_b = 5.52$ V).

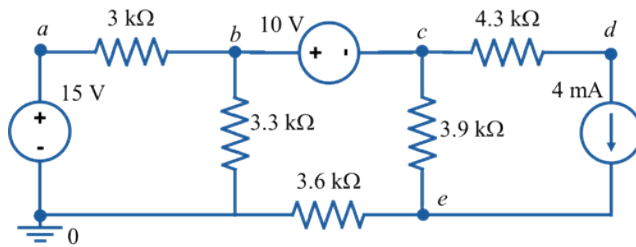


Figura 6.31.

Prob. 6.4. Figura 6.32.

(Sol. $v_{4\Omega} = 6$ V).

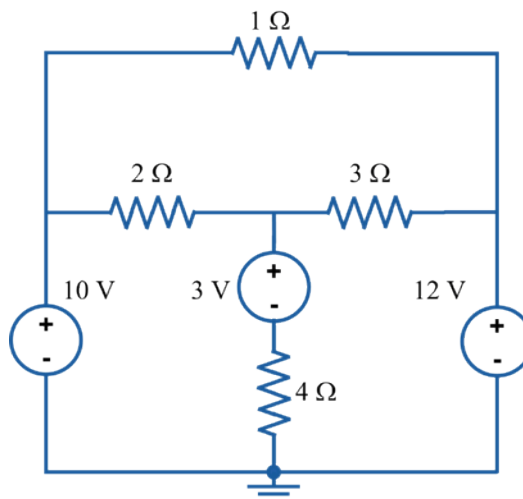


Figura 6.32.

Prob. 6.5. Figura 6.33.

(Sol. $v_b = 27.97 \text{ V}$).

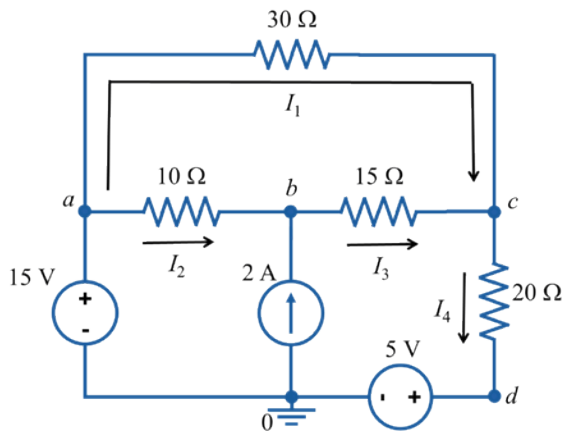


Figura 6.33.

Prob. 6.6. Figura 6.34.

(Sol. $v_y = 5 V_{CD} + 2 V_{CA}$).

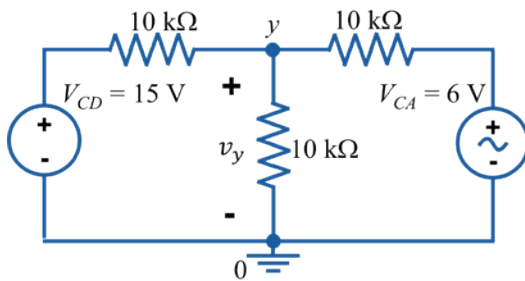


Figura 6.34.

Prob. 6.7. Figura 6.35.

(Sol. $I_x = 3 \text{ A}$).

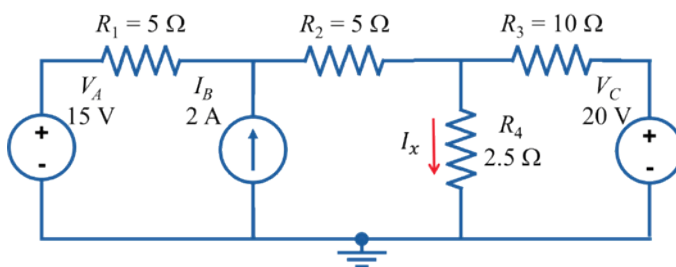


Figura 6.35.

Prob. 6.8. Figura 6.36.

(Sol. $I_y = 3 \text{ A}$).

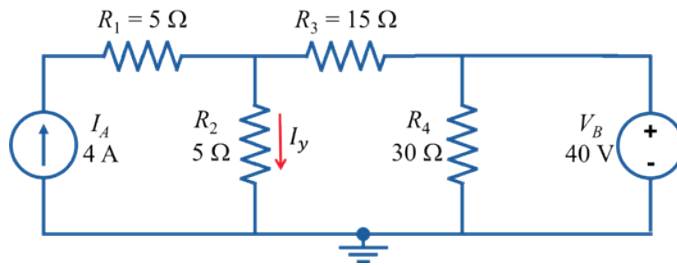


Figura 6.36.

REFERENCIAS DEL CAPÍTULO

- Analog Devices. (1999). *LTspice Software* (Versión LTspice XVII). Analog Devices. <https://www.analog.com/en/design-center/design-tools-and-calculators/ltspice-simulator.html>
- McAllister, W. (2008). Linealidad. *Khan Academy*. Recuperado el 26 de abril en <https://es.khanacademy.org/science/electrical-engineering/ee-circuit-analysis-topic/ee-dc-circuit-analysis/a/ee-linearity>



**TRANSFORMACIÓN
DE FUENTES**

7

INTRODUCCIÓN

La transformación de fuentes es una técnica que consiste en intercambiar una fuente de voltaje conectada en serie con una resistencia, por una fuente de corriente conectada en paralelo con una resistencia (Análisis de circuitos por teoremas, 2017). Si en el circuito se tiene conectada una carga con dos terminales, ésta recibirá el mismo voltaje de salida v_o y la misma corriente de salida i_o , independientemente del tipo de circuito que lo esté alimentando (Salazar Gómez, 2008). En la zona punteada de la Figura 7.1a y b se muestra cómo se pueden intercambiar estos dos circuitos manteniendo la resistencia R igual para ambos y la carga sigue manteniendo el mismo voltaje v_o y la misma corriente i_o .

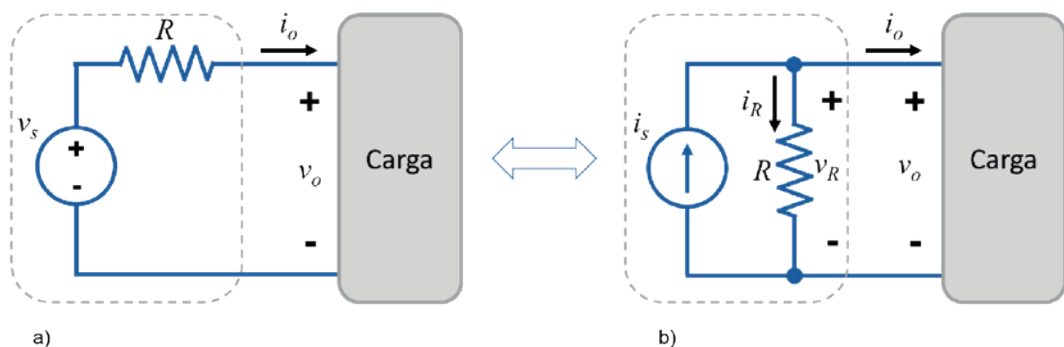


Figura 7.1. Circuitos equivalentes utilizando la transformación de fuentes.

Para conseguir esta transformación de fuentes, es necesario establecer una relación entre ambos circuitos a partir de los datos que se encuentran presentes en cada uno de ellos. La forma de garantizar que esta igualdad de condiciones eléctricas se cumple en ambos circuitos es igualando ambos voltajes de salida v_o o ambas corrientes i_o y obtener la relación entre los dos circuitos. En este caso, igualaremos los voltajes de salida de los dos circuitos para conseguir la relación entre ambos.

Aplicamos la ley de voltajes de Kirchhoff en la Figura 7.1a para obtener el primero de los voltajes v_o y resulta la ecuación (7.1).

$$-v_s + i_o R + v_o = 0 \text{ V}$$

Despejamos v_o y obtenemos:

$$v_o = v_s - i_o R \quad (7.1)$$

Ahora, para obtener el segundo voltaje v_o a partir de la Figura 7.1b es necesario calcular la corriente que circula a través de la resistencia R , ya que el voltaje de la resistencia v_R es el mismo que v_o por estar ambos en paralelo.

Aplicamos la ley de corrientes de Kirchhoff en el nodo superior de la resistencia R en el circuito de la Figura 7.1b, y resulta:

$$i_s = i_R + i_o$$

Despejamos la corriente i_R para tener la ecuación (7.2).

$$i_R = i_s - i_o \quad (7.2)$$

Con la corriente i_R y la resistencia R aplicamos la ley de Ohm para obtener el valor de v_R .

$$v_R = i_R R$$

Sustituimos el valor de la corriente i_R a partir de la ecuación (7.2) y nos queda:

$$v_R = (i_s - i_o) R$$

Simplificamos y nos resulta la ecuación (7.3).

$$v_R = i_s R - i_o R \quad (7.3)$$

Igualamos la ecuación (7.1) con la ecuación (7.3) y sustituimos sus respectivos valores.

$$v_o = v_R$$

$$v_s - i_o R = i_s R - i_o R$$

Simplificamos y obtenemos la ecuación (7.4) y por ende

$$v_s = i_s R \quad (7.4)$$

Y por consiguiente la ecuación (7.5) resulta para calcular la fuente de corriente.

$$i_s = \frac{v_s}{R} \quad (7.5)$$

Obsérvese que ambas fuentes se relacionan a través de la resistencia R mediante la ley de Ohm. Es decir, para calcular el valor de la fuente de voltaje v_s es suficiente con multiplicar el valor de la fuente corriente i_s por la resistencia R , y para calcular el valor de la fuente de corriente i_s es suficiente con dividir el valor de la fuente de voltaje v_s entre la resistencia R (Flores-Oropeza, 2020).

CONSIDERACIONES GENERALES PARA UTILIZAR CORRECTAMENTE LA TRANSFORMACIÓN DE FUENTES

Tomado y modificado de (Hayt *et al.*, 2007).

- a) Solo se pueden transformar fuentes de voltaje en serie con resistencias, o fuentes de corriente en paralelo con resistencias.
- b) Al transformar una fuente de voltaje en una fuente de corriente, la corriente apuntará en la dirección de la terminal positiva de la fuente de voltaje.
- c) Al transformar una fuente de corriente en una fuente de voltaje, la terminal positiva de la fuente de voltaje estará orientada en la dirección de la flecha de la fuente de corriente.
- d) Al transformar una fuente de corriente en una fuente de voltaje, la resistencia quedará conectada en serie, por lo tanto, se podrá colocar antes o después de la fuente de voltaje, siempre y cuando siga conectada en serie.
- e) En la transformación de fuentes lo que se mantiene constante es la corriente y el voltaje que se entregan a la “carga”.
- f) La fuente y la resistencia que se transforman pierden sus características eléctricas originales, esto significa que no se debe transformar aquella parte o partes del circuito en donde se necesita calcular el valor de lo que se pide.
- g) Si en el circuito se involucran fuentes dependientes, entonces tampoco se podrá modificar aquel o aquellos elementos de los que depende la corriente o el voltaje que controla a la fuente dependiente.

Pasos para aplicar la transformación de fuentes

A continuación, se proponen tres pasos para resolver un circuito eléctrico utilizando la transformación de fuentes.

Paso 1.

Identificar el elemento o grupo de elementos en donde se debe calcular la corriente o voltaje y verificar la conexión de las fuentes.

Es importante identificar la parte del circuito para la cual se debe calcular la corriente, el voltaje o la potencia, ya que esta parte del circuito se debe dejar sin modificar durante todo el análisis del circuito. Verificar las fuentes significa revisar que las fuentes de voltaje tengan al menos una resistencia conectada en serie, y que las fuentes de corriente tengan al menos una resistencia conectada en paralelo de lo contrario no se podrán transformar.

Paso 2.

Transformar las fuentes y simplificar el circuito.

Se transformarán todas las fuentes de corriente o voltaje que se puedan y que ayuden a simplificar el circuito. Una vez realizadas las transformaciones, se redibuja el circuito resultante y se simplifican las resistencias que quedan conectadas en serie o en paralelo. Lo mismo ocurrirá para las fuentes de voltaje y de corriente transformadas, de ser posible, también se deberán simplificar con otras fuentes.

Paso 3.

Calcular lo que se pide en el problema, si aún no se puede, entonces volver a transformar las fuentes hasta que sea posible.

En general con pocas transformaciones se puede reducir el circuito hasta un punto en el que se pueda calcular con facilidad la corriente o el voltaje que se pide. En algunos casos, es necesario continuar haciendo transformaciones hasta que quede reducido el circuito en un solo lazo o en dos nodos. Normalmente el circuito se podrá simplificar hasta un punto en el que se pueda aplicar un divisor de tensión o un divisor de corriente para calcular la corriente o voltaje que se busca. En casos especiales, a pesar de aplicar la transformación de fuentes, no será posible obtener con facilidad lo que se pide a menos que se haga uso de alguna de las otras técnicas ya estudiadas como el análisis de mallas, nodos o superposición.

ANÁLISIS DE CIRCUITOS UTILIZANDO LA TRANSFORMACIÓN DE FUENTES

A continuación, se presenta una serie de ejemplos para mostrar la manera en que se aplica la transformación de fuentes en los circuitos eléctricos.

Ejemplo 7-1. Utilizando la transformación de fuentes, en el circuito de la Figura 7.2, calcular el voltaje V_o y la corriente I_o .

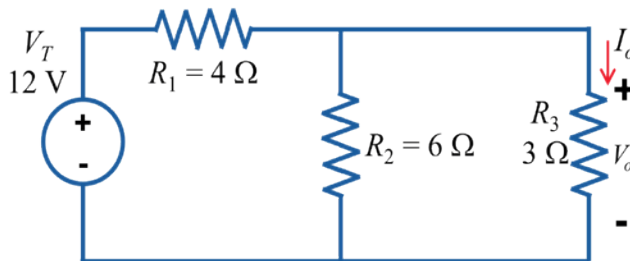


Figura 7.2. Ejemplo para aplicar la transformación de fuentes en un circuito sencillo.

Solución.

Primero, identificamos que la fuente de voltaje V_T se encuentra conectada en serie con la resistencia R_1 tal como se indica en la Figura 7.3. Recordemos que para transformar una fuente de voltaje la resistencia debe estar conectada en serie con la fuente. De igual manera, la resistencia R_3 no se modifica ya que es donde se necesita calcular la corriente y el voltaje.

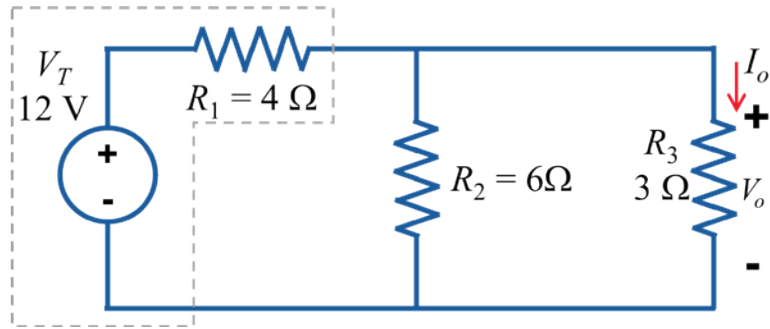


Figura 7.3. Fuente de voltaje en serie con una resistencia para poder aplicar la transformación de fuentes.

Como segundo paso, se utilizan las fórmulas para transformar la fuente y la resistencia. Aplicamos la ecuación (7.5) y la definimos para las variables que se utilizan en el circuito de la Figura 7.3.

$$I_T = \frac{V_T}{R_1} = \frac{12 \text{ V}}{4 \Omega}$$

De esta manera se puede calcular el valor de la fuente de corriente equivalente, resultando el valor de la ecuación (7.6).

$$I_T = 3 \text{ A} \quad (7.6)$$

Colocamos el valor de corriente calculada en paralelo con la resistencia R_1 tal como se muestra en la Figura 7.4. Observamos que la dirección de la corriente apunta hacia arriba, que es donde se encontraba la terminal positiva de la fuente de voltaje V_T .

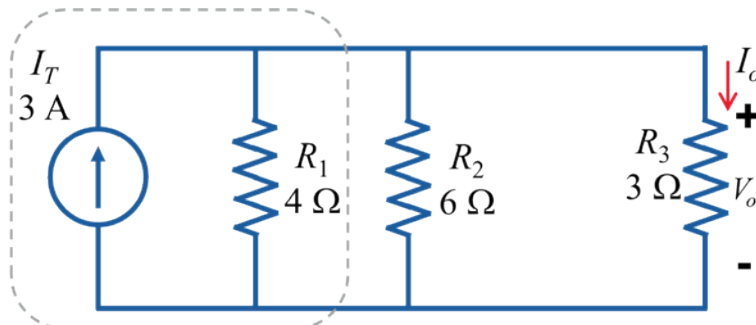


Figura 7.4. Fuente de corriente I_T y resistencia R_1 transformadas a partir de la fuente de voltaje V_T y de la resistencia R_1 .

Ya con el circuito de la Figura 7.4 se puede simplificar agrupando en paralelo las resistencias R_1 y R_2 para obtener una sola resistencia que se encuentre en paralelo con la fuente de corriente I_T . La resistencia equivalente se calcula con la ecuación (2.4), el resultado de este cálculo se muestra en la ecuación (7.7).

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{(4 \Omega)(6 \Omega)}{4 \Omega + 6 \Omega}$$

$$R_{12} = 2.4 \Omega \quad (7.7)$$

En la Figura 7.5 se muestra cómo queda el circuito simplificado con una resistencia en paralelo a la fuente de corriente. El circuito, al tener únicamente dos nodos, ya se encuentra lo suficientemente simplificado para poder aplicar un divisor de corriente y calcular con facilidad la corriente que circula a través de la resistencia R_3 . Sin embargo, y para seguir ejemplificando la transformación de fuentes, se continuará con otra transformación para representar el circuito en un solo lazo. En la Figura 7.5 se observa también que la fuente de corriente está en paralelo con la resistencia equivalente R_{12} . También está en paralelo con la resistencia R_3 pero es suficiente hacer la transformación de fuentes usando una sola de las resistencias conectada en paralelo. Además, debemos recordar que la resistencia R_3 no se debe modificar en el proceso de análisis del circuito.

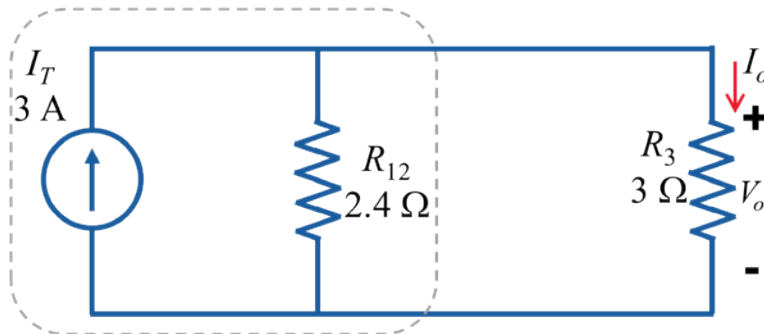


Figura 7.5. Fuente de corriente en paralelo con una resistencia para ser transformada a una fuente de voltaje en serie con la resistencia.

Reescribimos la ecuación (7.4) con las variables utilizadas en la Figura 7.5 para poder calcular el valor de la fuente de voltaje, resultando la ecuación (7.8).

$$V_T' = I_T R_{12}$$

$$V_T' = (3 \text{ A})(2.4 \Omega) = 7.2 \text{ V} \quad (7.8)$$

Se ha escrito el nuevo voltaje transformado como V_T' para distinguirlo del voltaje original V_T . En la Figura 7.6 se muestra cómo queda el circuito equivalente con la nueva fuente de voltaje y con la resistencia R_{12} conectada en serie. En la Figura 7.6 se aprecia también que todo el circuito quedó construido en un solo lazo. De igual manera se observa que el signo positivo de la fuente se ha colocado hacia donde apunta la flecha de la fuente de corriente.

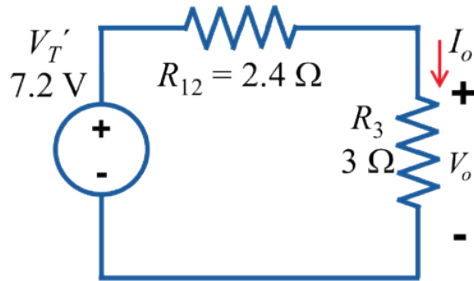


Figura 7.6. Circuito equivalente después de transformar la fuente de corriente por una fuente de voltaje.

A partir de la Figura 7.6 es posible observar que el voltaje V_o se puede calcular mediante un divisor de voltaje con la ecuación (3.1) y a partir de este voltaje con la ley de Ohm la corriente I_o .

$$V_o = V_T' \frac{R_3}{R_3 + R_{12}} = (7.2 \text{ V}) \frac{3 \Omega}{3 \Omega + 2.4 \Omega}$$

$$V_o = 4 \text{ V}$$

Aplicamos la ley de Ohm para calcular la corriente en la resistencia R_3 quedando.

$$I_o = \frac{V_o}{R_3} = \frac{4 \text{ V}}{3 \Omega}$$

$$I_o = 1.333 \text{ A}$$

Notas del ejercicio: Se trató de un ejemplo muy sencillo que además se puede resolver mucho más fácilmente analizándolo como un circuito de conexiones mixtas igual que los estudiados en el capítulo 2. Sin embargo, el ejemplo se utilizó para explicar paso a paso cómo se llevan a cabo las transformaciones de fuentes, y a partir de este ejercicio poder resolver otros de mayor dificultad.

Ejemplo 7-2. En el circuito de la Figura 7.7, y utilizando transformación de fuentes, calcular el voltaje V_x .

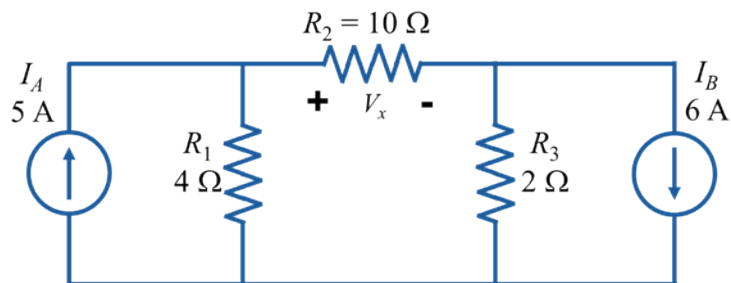


Figura 7.7. Circuito con dos fuentes de corriente para resolver con transformación de fuentes.

Solución.

Como primer paso, identificamos el elemento que no podemos modificar y en el que se calculará el voltaje V_x , en este caso se trata de la resistencia R_2 . De igual manera, en el circuito se tienen dos fuentes de corriente, cada una conectada en paralelo con una resistencia y las cuales se pueden transformar para simplificar el análisis del circuito, esto se aprecia en la Figura 7.8.

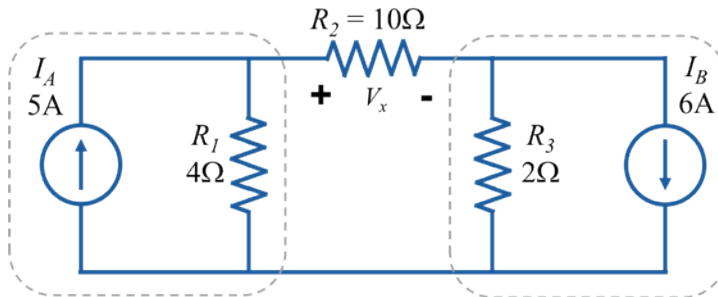


Figura 7.8. Fuente de corriente y su respectiva resistencia en paralelo.

Aplicamos la ecuación (7.4) para cada una de las fuentes de corriente con su resistencia y de esta manera obtener las respectivas fuentes de voltaje.

Para la fuente I_A tenemos:

$$V_A = I_A R_1 = (5 \text{ A})(4 \Omega) = 20 \text{ V}$$

Para la fuente I_B tenemos:

$$V_B = I_B R_3 = (6 \text{ A})(2 \Omega) = 12 \text{ V}$$

Redibujamos el circuito como aparece en la Figura 7.9 y colocamos las resistencias en serie con las fuentes de voltaje. Observemos que el signo positivo de la fuente V_A está en la parte superior tal como apunta la fuente de corriente I_A en la Figura 7.8, lo mismo ocurre con el signo positivo de la fuente V_B , está en la parte inferior de la fuente tal como apunta la fuente de corriente I_B .

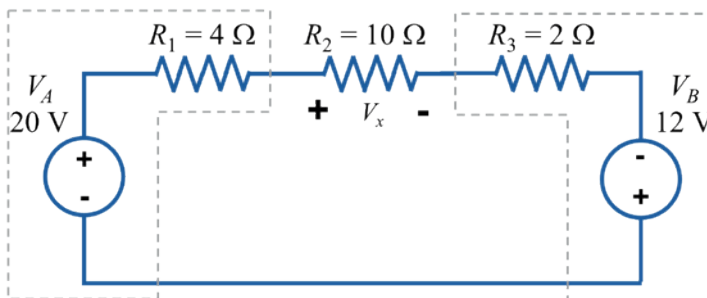


Figura 7.9. Circuito con las dos fuentes de corriente transformadas en fuentes de voltaje.

El circuito ha quedado reducido a un solo lazo en el que es posible calcular la corriente con facilidad y, por lo tanto, el voltaje V_x . En la Figura 7.10 proponemos la dirección de la corriente para que coincida con la polaridad del voltaje V_x en la resistencia R_2 , ade-

más se colocan el resto de los signos de acuerdo con la convención pasiva.

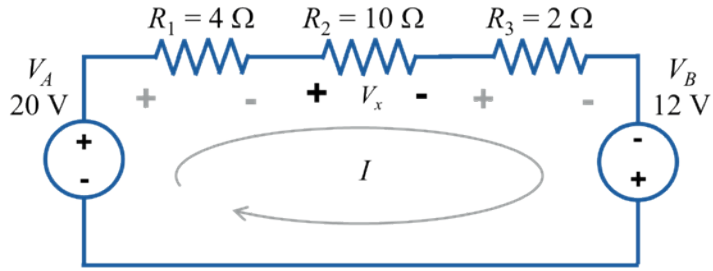


Figura 7.10. Establecimiento de la corriente en el circuito de un solo lazo al que se aplicó transformación de fuentes.

Aplicamos la ley de tensiones de Kirchhoff al circuito de la Figura 7.10 y nos resulta:

$$\sum V_{trayectoria} = 0 \text{ V}$$

$$-V_A + IR_1 + IR_2 + IR_3 - V_B = 0$$

Despejamos el valor de la corriente y resulta:

$$I(R_1 + R_2 + R_3) = V_A + V_B$$

$$I = \frac{V_A + V_B}{(R_1 + R_2 + R_3)}$$

Sustituimos los valores para tener:

$$I = \frac{20 \text{ V} + 12 \text{ V}}{(4 \Omega + 10 \Omega + 2 \Omega)}$$

$$I = \frac{32 \text{ V}}{16 \Omega} = 2 \text{ A}$$

Por lo tanto, el voltaje queda definido por:

$$V_x = IR_2$$

$$V_x = (2 \text{ A})(10 \Omega) = 20 \text{ V}$$

$$V_x = 20 \text{ V}$$

Notas del ejercicio: Utilizando la transformación de fuentes y con operaciones muy sencillas (básicamente con la ley de Ohm y la ley de voltajes de Kirchhoff), se pudo resolver el ejemplo sin la necesidad de plantear sistemas de ecuaciones simultáneas. Se tuvo la necesidad de redibujar el circuito varias veces para poder identificar y explicar las transformaciones de las fuentes, pero, con la práctica, en ocasiones no es necesario redibujar tantas veces, sólo las suficientes.

Ejemplo 7-3. En el circuito de la Figura 7.11 calcular la corriente I_x , utilizar la transformación de fuentes para obtener el resultado.

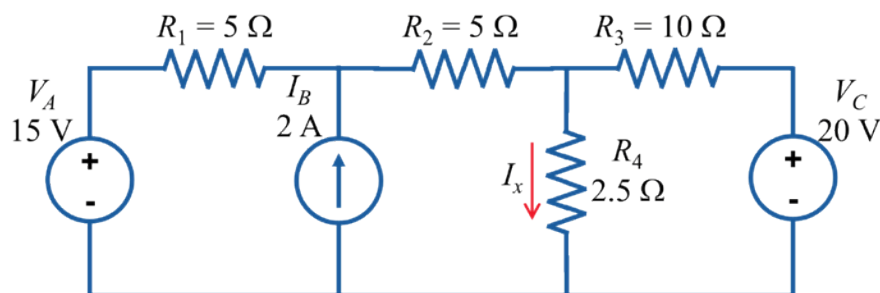


Figura 7.11. Circuito con dos fuentes de voltaje y una fuente de corriente para resolver con transformación de fuentes.

Primero, identificamos que la resistencia R_4 no se debe modificar en todo el análisis del circuito ya que es a través de ésta por la cual circula la corriente I_x y es la corriente que se pide en el problema.

Lo siguiente es identificar las fuentes de voltaje o corriente a las que se les puede aplicar la transformación de fuentes y que ayudan a la simplificación del circuito. En este caso, de la Figura 7.11 se observa que sólo las fuentes de voltaje V_A y V_C se pueden transformar ya que cada una cuenta con al menos una resistencia en serie. Para el caso de la fuente de corriente I_B , de momento no es posible aplicar la transformación de fuentes ya que no tiene conectada en paralelo ninguna resistencia.

En la Figura 7.12 se indican las fuentes de voltaje y la resistencias con que se transformarán.

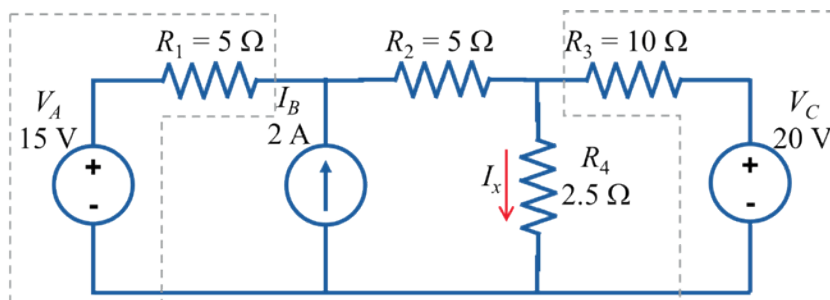


Figura 7.12. Fuentes de voltaje con sus respectivas resistencias para efectuar la transformación en fuentes de corriente.

Como segundo paso, aplicamos la ecuación (7.5) y la definimos para las variables que se utilizan en el circuito de la Figura 7.12.

Para la fuente V_A tenemos:

$$I_A = \frac{V_A}{R_1} = \frac{15 \text{ V}}{5 \Omega} = 3 \text{ A}$$

Para la fuente V_C tenemos:

$$I_C = \frac{V_C}{R_3} = \frac{20 \text{ V}}{10 \Omega} = 2 \text{ A}$$

Redibujamos el circuito como aparece en la Figura 7.13 y colocamos las resistencias en paralelo con las fuentes de corriente. Observemos que ambas flechas de las fuentes de corriente apuntan hacia arriba ya que los signos positivos de las fuentes de voltaje en la Figura 7.12 están en la parte superior de la fuente.

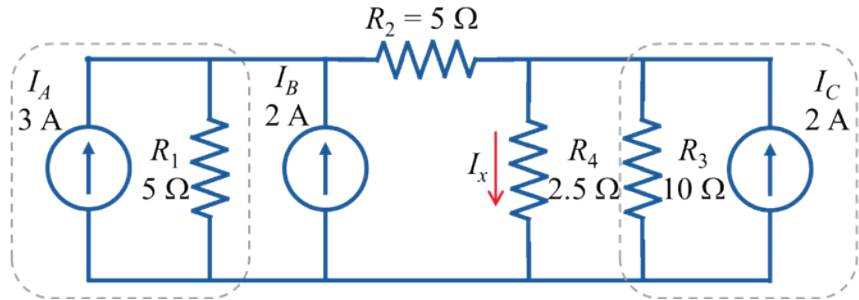


Figura 7.13. Circuito con las dos fuentes de voltaje transformadas en fuentes de corriente.

En esta parte del problema, es importante observar que todavía no es sencillo calcular la corriente I_x . Por lo tanto, se simplificará para ver si es posible seguir haciendo transformaciones de fuente o si es necesario utilizar algún otro método de análisis. En la Figura 7.13 se observa que las fuentes de corriente I_A e I_B se encuentran en paralelo, por lo tanto, se pueden simplificar en una sola. También se observa que las resistencias R_3 y R_4 se podrían simplificar en paralelo, pero si hacemos esta simplificación entonces perderemos la resistencia R_4 por la cual circula la corriente I_x , entonces no es posible hacer esta simplificación.

Para simplificar las fuentes de corriente en paralelo se suman algebraicamente utilizando la ecuación (3.1), resultando en una sola.

$$I_{AB} = I_A + I_B$$

$$I_{AB} = 3 \text{ A} + 2 \text{ A} = 5 \text{ A}$$

En la Figura 7.14 redibujamos el circuito equivalente con la simplificación de las fuentes de corriente en una sola.

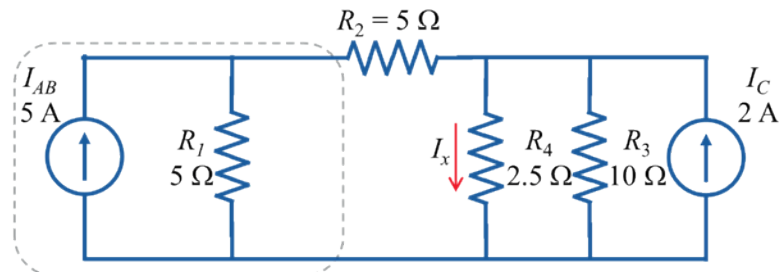


Figura 7.14. Identificación de las corrientes en circuito con fuentes de corriente.

De la Figura 7.14 observamos que se puede realizar otra transformación de fuentes, ahora de fuente de corriente a una de voltaje. Utilizamos la ecuación (7.4) para calcular el valor de la fuente de voltaje.

Para la fuente I_{AB} tenemos:

$$V_{AB} = I_{AB}R_1 = (5 \text{ A})(5 \Omega) = 25 \text{ V}$$

Redibujamos el circuito como aparece en la Figura 7.15 y colocamos la resistencia R_1 en serie con la fuente de voltaje. Observar que el signo positivo de la fuente V_{AB} está en la parte superior tal como apunta la fuente de corriente I_{AB} en la Figura 7.14.

Observamos que se pueden unir en serie las resistencias R_1 y R_2 para después volver a transformar la fuente de voltaje en una fuente de corriente en paralelo con la resistencia equivalente R_{12} .

La resistencia equivalente entre las resistencias R_1 y R_2 resulta:

$$R_{12} = R_1 + R_2$$

$$R_{12} = 5 \Omega + 5 \Omega = 10 \Omega$$

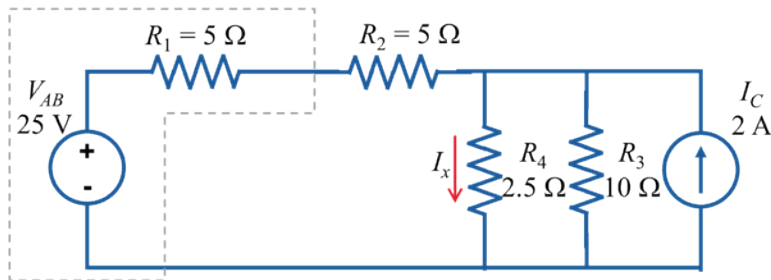


Figura 7.15. Circuito con fuente de voltaje transformada.

En la Figura 7.16 se muestra cómo queda conectada la resistencia R_{12} para poder ser transformada nuevamente en fuente de corriente.

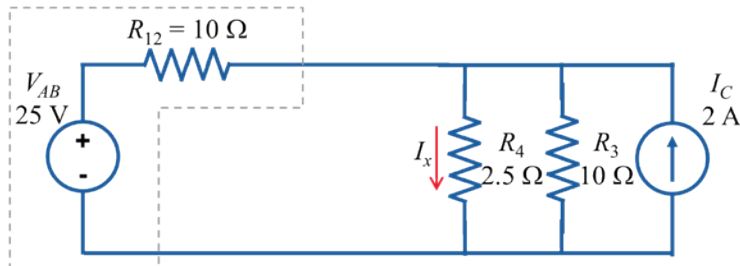


Figura 7.16. Resistencia equivalente R_{12} en serie con la fuente de voltaje V_{AB} .

Utilizamos nuevamente la ecuación (7.5) para calcular el valor de la fuente de corriente y resulta:

Para la fuente V_{AB} tenemos:

$$I_{AB}' = \frac{V_{AB}}{R_{12}} = \frac{25 \text{ V}}{10 \Omega} = 2.5 \text{ A}$$

Llamamos a la nueva fuente de corriente como I_{AB}' (prima) para evitar confundir con el nombre I_{AB} . Redibujamos el circuito como aparece en la Figura 7.17 y colocamos la resistencia R_{12} en paralelo con la fuente de corriente I_{AB}' .

Observamos que, al hacer esta última transformación, han quedado únicamente dos nodos para todo el circuito. Por lo tanto, las dos fuentes de corriente se encuentran en paralelo y las resistencias R_{12} y R_3 también han quedado conectadas en paralelo.

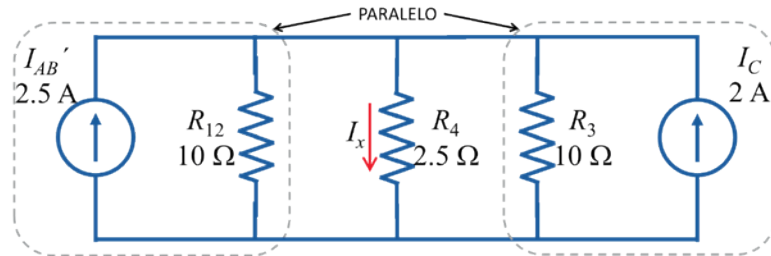


Figura 7.17. Arreglo de fuentes de corriente y resistencias en dos nodos.

El valor de la fuente de corriente es la suma algebraica de las dos fuentes de corriente (ecuación (3.1)) en paralelo dentro del circuito y la llamaremos I_s .

$$I_s = I_{AB'} + I_C$$

$$I_s = 2.5 \text{ A} + 2 \text{ A} = 4.5 \text{ A}$$

Para la resistencia equivalente utilizamos la ecuación (2.4) para dos resistencias en paralelo:

$$R_s = \frac{R_{12}R_3}{R_{12} + R_3} = \frac{(10 \Omega)(10 \Omega)}{10 \Omega + 10 \Omega}$$

$$R_s = 5 \Omega$$

En la Figura 7.18 se muestra el circuito equivalente que resulta después de realizar las reducciones en las fuentes de corriente y en las resistencias.

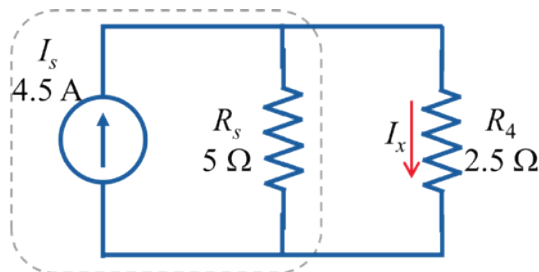


Figura 7.18. Circuito simplificado utilizando la transformación de fuentes.

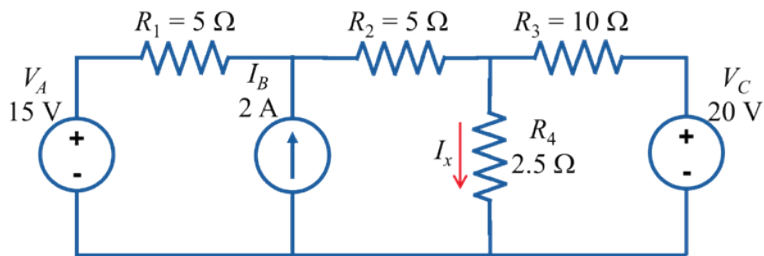
En el circuito de la Figura 7.18 ya se puede calcular el valor de la corriente I_x utilizando un simple divisor de corriente con la ecuación (3.5).

$$I_x = I_s \frac{R_s}{R_4 + R_s} = (4.5 \text{ A}) \frac{5 \Omega}{2.5 \Omega + 5 \Omega}$$

$$I_x = 3 \text{ A}$$

Se podría decir que el problema que se acaba de resolver es un problema muy complicado. Sin embargo, a pesar de haber realizado varias transformaciones de fuentes, en todo momento el circuito se fue simplificando cada vez más hasta quedar únicamente dos nodos.

Notas del ejercicio: El proceso fue iterativo y tal vez para más de alguno parecería engorroso, pero en la práctica es un procedimiento muy sencillo que, llevándolo con orden, puede ser muy claro y rápido.



Por otro lado, si el estudiante evalúa el circuito original para resolverlo con alguno de los métodos ya estudiados se dará cuenta que:

- Es un circuito de 3 mallas con tres incógnitas y además con una supermalla.
- Es un circuito de 4 nodos y nodo de referencia; dos voltajes ya están definidos, por lo tanto, solo resulta un sistema de 2 ecuaciones con dos incógnitas.
- Utilizando el principio de superposición, se resuelve mucho más rápido que cualquiera de los métodos estudiados hasta el momento, incluso que el método de transformación de fuentes.
- El ejercicio también se puede resolver utilizando el Teorema de Thévenin o Norton que se estudiarán en el siguiente capítulo.

Ejemplo 7-4. En el circuito de la Figura 7.19 calcular el voltaje V_o entre las terminales indicadas del circuito, utilizar la transformación de fuentes para obtener el resultado.

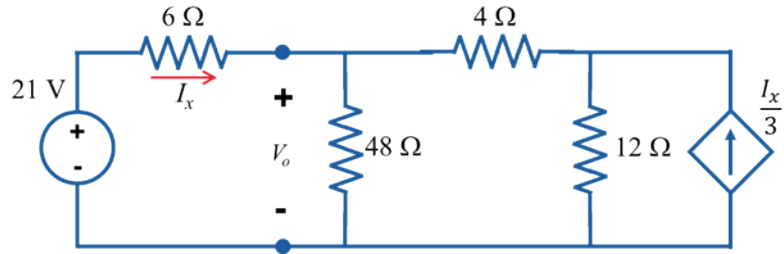


Figura 7.19. Circuito con fuente dependiente para reducir utilizando transformación de fuentes.

Solución.

Observamos primero que en el circuito se encuentra presente una fuente dependiente, por lo tanto, no se debe modificar el elemento que la controla, que en este caso es la resistencia de $6\ \Omega$, ya que es a través de ésta por la que circula la corriente de control I_x . También hay que identificar el o los elementos que no se deben modificar durante el análisis del circuito, es decir, las terminales donde se calculará el voltaje V_o . De acuerdo con la Figura 7.20, y con los ejemplos que se han resuelto hasta el momento, la respuesta obvia podría decirse que es la resistencia de $48\ \Omega$ (Zona I), ya que el voltaje V_o se encuentra en paralelo con esta resistencia y, por lo tanto, ésta no debería modificarse. Sin embargo, esta respuesta no es la única, ya que si se combinan otros elementos del circuito se pueden tener otras opciones. Por ejemplo, se podría decir que la resistencia de $6\ \Omega$ en serie con la fuente de $21\ \text{V}$ también se encuentran conectados en paralelo con el voltaje V_o (Zona II). Existen dos opciones más que se pueden considerar en paralelo con el voltaje V_o , estas opciones son, la Zona III, que contempla las resistencias de $4\ \Omega$, $12\ \Omega$ y la fuente dependiente, así como la Zona IV, que es la combinación de la Zona I y la Zona III. Todas estas zonas se encuentran conectadas en paralelo con el voltaje V_o , y si cualquiera de estas zonas se mantiene sin modificar, entonces tampoco se modificará el voltaje V_o .

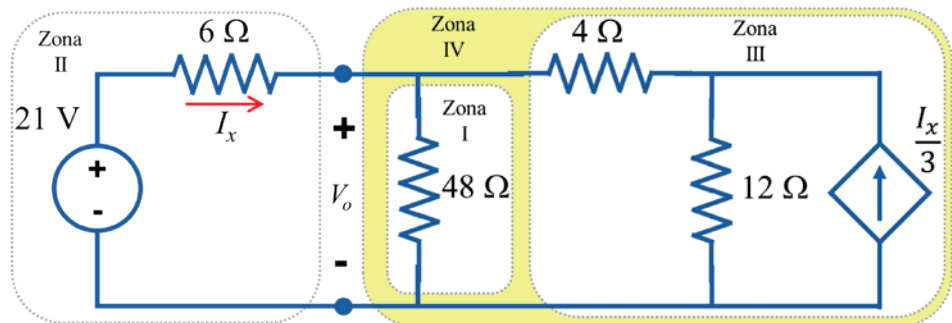


Figura 7.20. Zonas del circuito que se encuentran conectadas al mismo voltaje V_o .

En la Figura 7.20 se muestra el circuito original separado en las zonas que se encuentran conectadas en paralelo con el voltaje

V_o . Mantener cualesquiera de estas zonas sin modificar, hacen que el voltaje V_o se conserve sin cambio hasta el final del análisis.

Entonces, para aplicar la transformación de fuentes, se debe dejar sin modificar la resistencia de $6\ \Omega$ para no alterar el valor de la fuente dependiente y cualquiera de las cuatro zonas que hacen que el voltaje V_o se mantenga constante hasta el final del análisis. En este caso, la Zona II es la que satisface ambas condiciones y por lo tanto es la que se mantendrá sin modificar para calcular el voltaje V_o .

A partir de lo anterior, lo que resta es identificar qué partes del circuito se pueden transformar para simplificarlo. En la Figura 7.21 observamos que se puede transformar la fuente dependiente de corriente en paralelo con la resistencia de $12\ \Omega$.

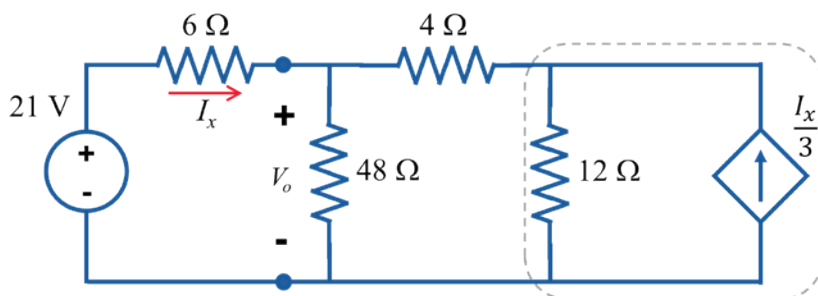


Figura 7.21. Transformación de la fuente dependiente de corriente en paralelo con la resistencia de $12\ \Omega$.

Para realizar la transformación de fuente de corriente a fuente de voltaje, utilizamos la ecuación (7.4), multiplicamos la resistencia de $12\ \Omega$ por la fuente de corriente dependiente y resulta:

$$\left(\frac{I_x}{3}\text{ A}\right)(12\ \Omega) = 4I_x\text{ V}$$

El circuito equivalente que resulta de la transformación se muestra en la Figura 7.22.

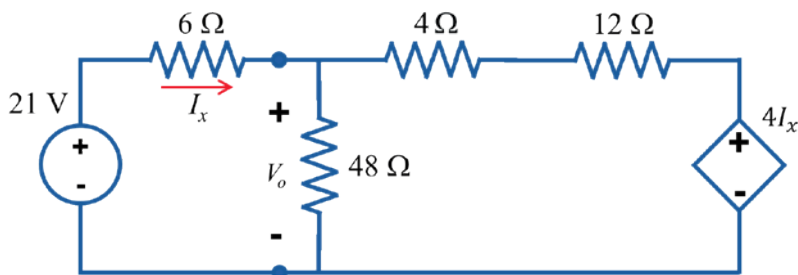


Figura 7.22. Fuente de voltaje dependiente obtenida a partir de una fuente de corriente dependiente.

Sumamos la resistencia de $4\ \Omega$ y de $12\ \Omega$ que están conectadas en serie con la fuente dependiente de voltaje para transformarlas ahora en una fuente de corriente tal como se indica en la Figura 7.23.

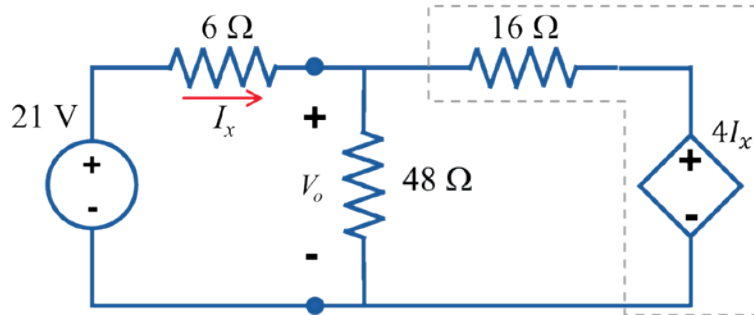


Figura 7.23. Simplificación de resistencias en serie con fuente de voltaje dependiente para transformar en fuente de corriente dependiente.

Para realizar la transformación de fuente de voltaje a fuente de corriente, utilizamos la ecuación (7.5), dividimos el valor de la fuente de voltaje entre la resistencia de 16Ω y resulta:

$$\frac{(4I_x \text{ V})}{(16 \Omega)} = 0.25I_x \text{ A}$$

El circuito equivalente que resulta de la transformación se muestra en la Figura 7.24.

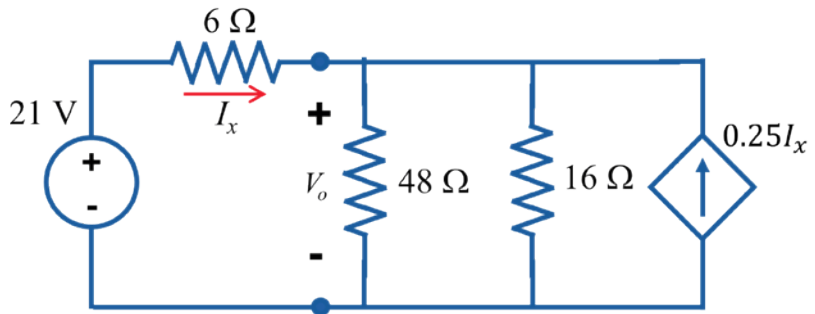


Figura 7.24. Circuito que resulta de transformar la fuente de voltaje dependiente en fuente de corriente dependiente.

Simplificamos la resistencia de 48Ω y de 16Ω que están conectadas en paralelo con la fuente dependiente de corriente para transformarlas ahora en una fuente de voltaje tal como se indica en la Figura 7.25.

$$\frac{(48 \Omega)(16 \Omega)}{48 \Omega + 16 \Omega} = 12 \Omega$$

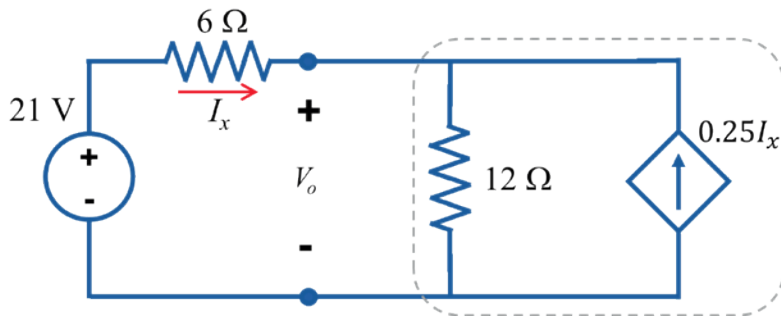


Figura 7.25. Circuito simplificado para transformar la fuente de corriente dependiente en fuente de voltaje dependiente.

Para realizar la transformación de fuente de corriente dependiente a fuente de voltaje dependiente, utilizamos la ecuación (7.4), multiplicamos la resistencia de 12Ω por la fuente de corriente dependiente y resulta:

$$(0.25I_x \text{ A})(12 \Omega) = 3I_x \text{ V}$$

El circuito equivalente que resulta de la transformación se muestra en la Figura 7.26.

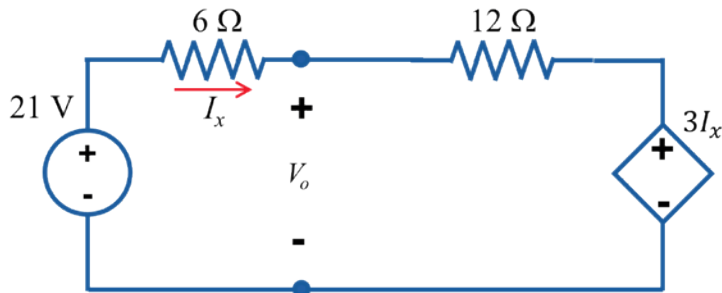


Figura 7.26. Última transformación de fuente de corriente dependiente a fuente de voltaje dependiente.

El circuito ha quedado reducido a un solo lazo, en el que es posible calcular la corriente I_x con facilidad y, por lo tanto, el voltaje V_o . En la Figura 7.27 proponemos la dirección de la corriente igual que I_x para facilitar los cálculos, además, se coloca el resto de los signos de acuerdo con la convención pasiva de signos.

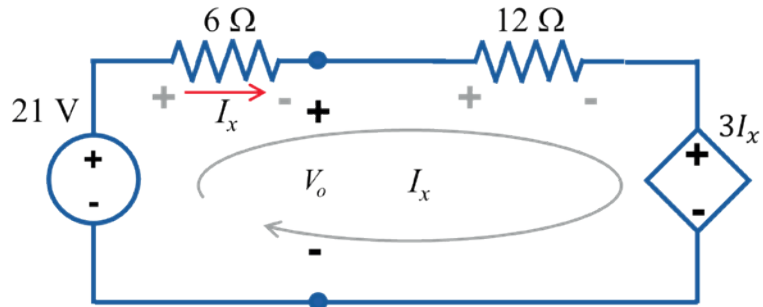


Figura 7.27. Circuito con fuente dependiente reducido a un solo lazo para su análisis y solución.

Aplicamos la ley de tensiones de Kirchhoff al circuito de la Figura 7.27. Por facilidad, para los cálculos omitimos las unidades y nos resulta:

$$\sum V_{trayectoria} = 0$$

$$-21 + (6)I_x + (12)I_x + 3I_x = 0$$

Despejamos el valor de la corriente I_x y resulta:

$$I_x(6 + 12 + 3) = 21$$

$$I_x(21) = 21$$

$$I_x = 1 \text{ A}$$

Entonces, el cálculo del voltaje V_o lo obtenemos a través de la trayectoria que involucra a la resistencia de 6Ω y la fuente de 21 V .

Aplicamos la ley de tensiones de Kirchhoff en la Figura 7.27, utilizando el voltaje V_o , y nos resulta:

$$\sum V_{trayectoria} = 0 \text{ V}$$

$$-21 \text{ V} + I_x(6 \Omega) + V_o = 0$$

Despejamos el valor de V_o y resulta:

$$V_o = 21 \text{ V} - I_x(6 \Omega)$$

Sustituimos el valor de la corriente I_x en la ecuación.

$$V_o = 21 \text{ V} - (1 \text{ A})(6 \Omega)$$

$$V_o = 15 \text{ V}$$

Observar que si calculamos el voltaje V_o a través de la trayectoria que involucra a la resistencia de 12Ω y la fuente de corriente dependiente obtenemos el mismo resultado.

Aplicamos la ley de tensiones de Kirchhoff en la Figura 7.27 utilizando el voltaje V_o y por facilidad para los cálculos omitimos las unidades, resultando:

$$\sum V_{trayectoria} = 0$$

$$-V_o + I_x(12) + 3I_x = 0$$

Despejamos el valor de V_o y resulta:

$$V_o = 15I_x$$

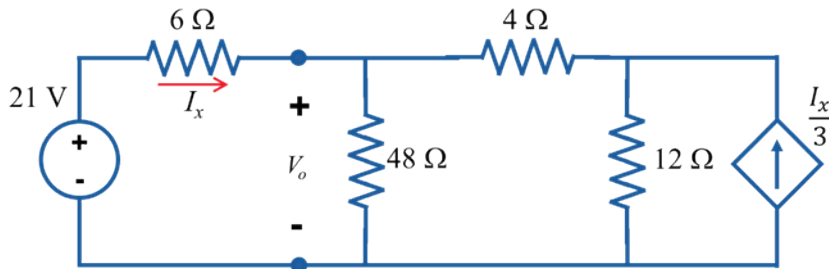
Sustituimos el valor de la corriente I_x en la ecuación.

$$V_o = 15(1)$$

$$V_o = 15 \text{ V}$$

Notas del ejercicio: Resolver el problema de forma correcta con la transformación de fuentes requirió de mucho cuidado para identificar qué partes del circuito se podían manipular y transformar, y qué partes deberían mantenerse sin cambios.

Pudimos notar que se pueden hacer transformaciones de fuentes utilizando fuentes dependientes siempre y cuando se sigan respetando las consideraciones generales para el uso correcto de esta modificación y los pasos para su implementación.



Si evalúas el circuito original para resolverlo con alguno de los métodos ya estudiado te darás cuenta que:

- A pesar de que sólo se tiene una fuente independiente, no se puede hacer ninguna reducción simple de resistencias en serie y paralelo.
- No aporta nada hacer una transformación de delta a estrella, el circuito seguiría estando sin poderse simplificar y, por lo tanto, sin resolver.
- Es un circuito de 3 mallas con tres incógnitas, aunque la tercera malla está parcialmente definida con $I_x/3$.
- Es un circuito de 3 nodos y el nodo de referencia, un voltaje ya se encuentra definido, por lo tanto, solo resulta un sistema de 2 ecuaciones con dos incógnitas.
- El ejercicio también se puede resolver utilizando el Teorema de Thévenin o Norton, que se estudiarán en el siguiente capítulo.

¿CUÁNDO NO ES POSIBLE APLICAR LA TRANSFORMACIÓN DE FUENTES?

De manera general en la Figura 7.28 se muestran los dos casos en los que no se puede aplicar la transformación de fuentes. Estos casos se presentan cuando se tiene una resistencia en paralelo con una fuente de voltaje o cuando se tiene una resistencia en serie con una fuente de corriente.

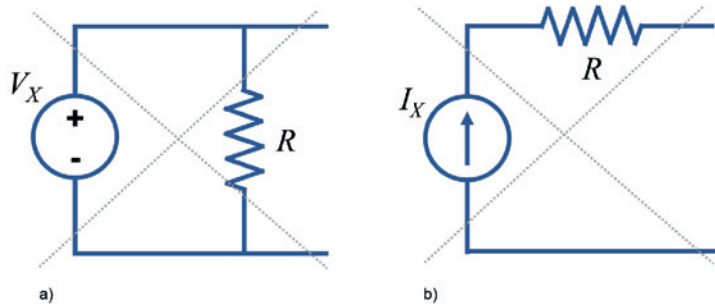


Figura 7.28. Casos en los que no se puede aplicar la transformación de fuentes.

En estos casos no es posible aplicar la transformación de fuentes. No significa que no se puedan resolver los circuitos, lo único es que no será posible utilizando la transformación de fuentes.

Para los circuitos que tienen incluida alguna de estas conexiones, no se podrá reducir esta parte del circuito, pero al resto se le podrá aplicar la transformación de fuentes en caso de que se tengan otras incluidas.

Si en el circuito sólo se presentan estos dos tipos de conexiones, como en el circuito de la Figura 7.29, entonces se tendrá que resolver utilizando alguna de las otras técnicas ya estudiadas (mallas, nodos, superposición) o utilizando el Teorema de Thévenin o Norton, que se estudiarán en el siguiente capítulo.

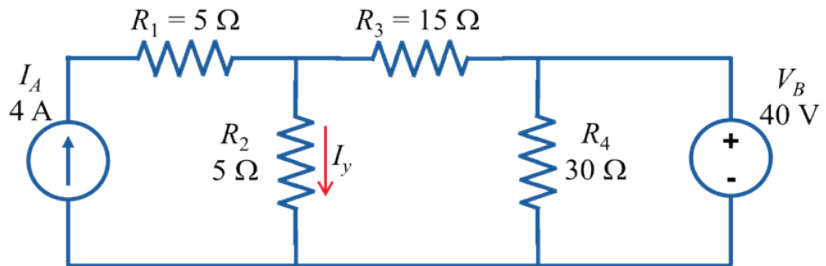


Figura 7.29. Circuito con fuente de voltaje y fuente de corriente donde no se puede aplicar transformación de fuentes.

RESUMEN Y CONCLUSIÓN

La transformación de fuentes es una técnica de análisis de circuitos eléctricos muy útil cuando se presentan fuentes de voltaje en serie con resistencias o fuentes de corriente en paralelo con resistencias. Se obtuvo una expresión con la que se relacionan la fuente de voltaje con la fuente de corriente utilizando una resistencia común entre ambas expresiones. Se presentaron las consideraciones generales para poder aplicar la transformación de fuentes en los circuitos

eléctricos, y se propusieron tres pasos para resolver circuitos eléctricos utilizando el análisis mediante la transformación de fuentes.

En este capítulo se resolvieron cuatro ejemplos, en los cuales se trató de incluir la mayor cantidad de casos posibles para aplicar la transformación de fuentes. En los ejemplos también se incluyó uno utilizando una fuente dependiente, para mostrar que este principio también aplica para tales situaciones.

En todos los ejemplos se fue explicando paso a paso cada una de las transformaciones y la forma de cómo reducir el circuito hasta llegar a uno de dos nodos o de un solo lazo. En cada ejemplo se fueron redibujando los circuitos para apoyar las explicaciones. Al final de cada ejemplo se incluyeron “Notas del ejercicio” donde se explicó la relevancia de utilizar el análisis por medio de la transformación de fuentes. En especial, en los ejemplos 3 y 4 se presentan notas con un análisis cualitativo sobre las ventajas de utilizar la transformación de fuentes frente a las técnicas de análisis de mallas, nodos y superposición.

PROBLEMAS PROPUESTOS

A continuación, se proponen una serie de problemas para resolver utilizando la transformación de fuentes.

Prob. 7.1. Utilizando la transformación de fuentes reducir el circuito de la Figura 7.30 para calcular el voltaje V_o .

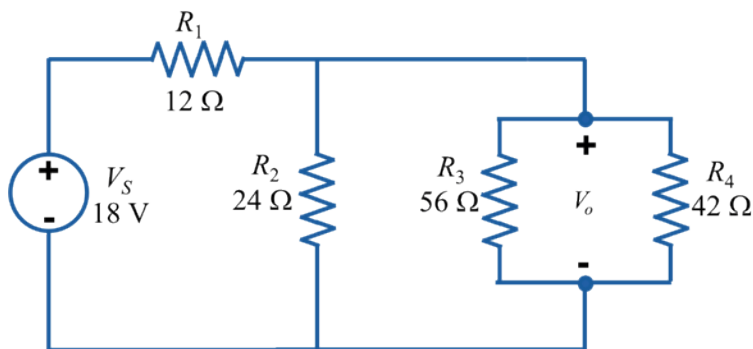


Figura 7.30.

(Sol. $V_o = 9$ V).

Prob. 7.2. Utilizando la transformación de fuentes calcular el voltaje para cada una de las resistencias del circuito de la Figura 7.31. (Nota: calcular cada voltaje por separado).

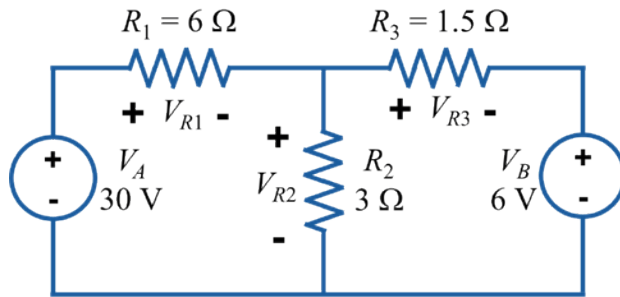


Figura 7.31.

(Sol. $V_{R1} = 22.28 \text{ V}$, $V_{R2} = 7.71 \text{ V}$ y $V_{R3} = 1.71 \text{ V}$).

Prob. 7.3. Utilizando la transformación de fuentes reducir el circuito de la Figura 7.32 para calcular el voltaje V_o .

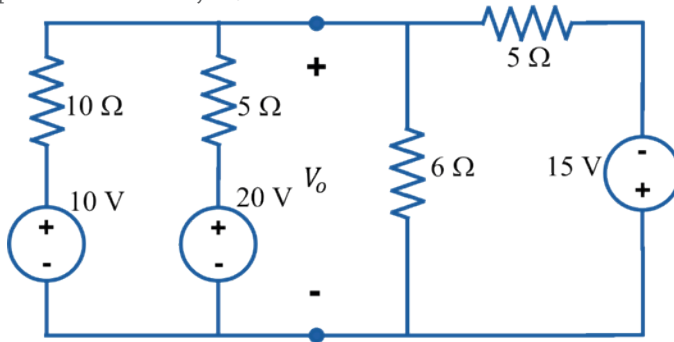


Figura 7.32.

(Sol. $V_o = 3 \text{ V}$).

Prob. 7.4. Utilizando la transformación de fuentes reducir el circuito de la Figura 7.33 en un solo lazo para calcular el voltaje V_{R3} .

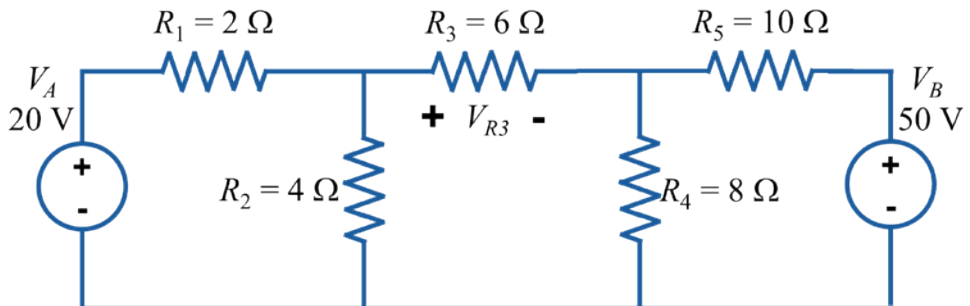


Figura 7.33.

(Sol. $V_{R3} = -4.528 \text{ V}$).

Prob. 7.5. Utilizando transformación de fuentes en el circuito de la Figura 7.34, calcular la corriente I_o .

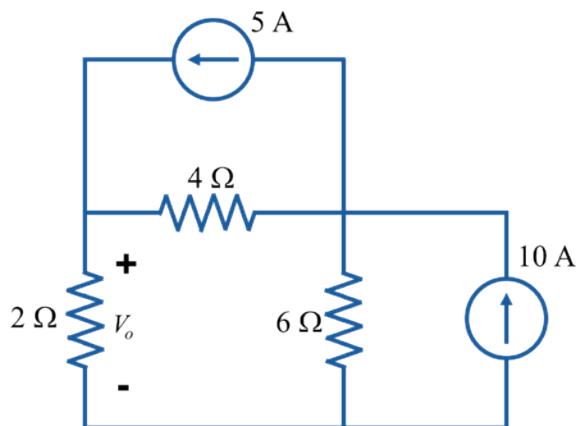


Figura 7.34.

(Sol. $I_o = 6.666 \text{ A}$).

Prob. 7.6. Calcular el voltaje V_ϕ de la Figura 7.35 utilizando transformación de fuentes.

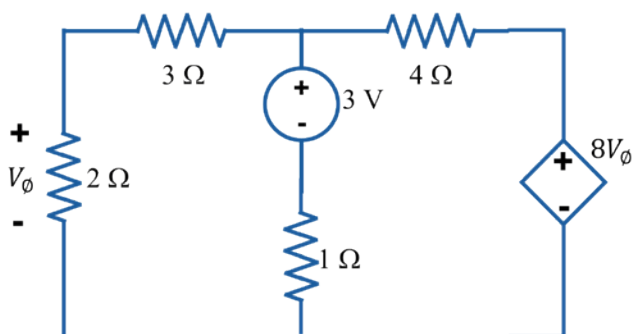


Figura 7.35.

(Sol. $V_\phi = 1.846 \text{ V}$).

Prob. 7.7. Utilizando la transformación de fuentes reducir el circuito de la Figura 7.36 para calcular el voltaje V_o .

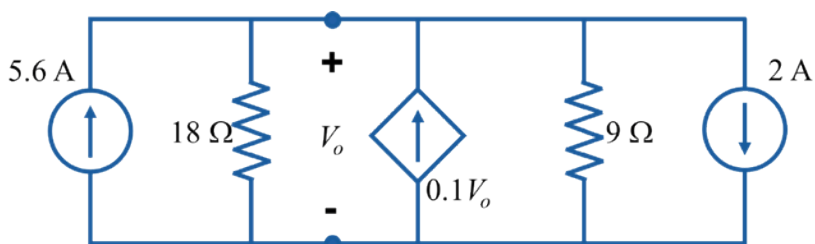


Figura 7.36.

(Sol. $V_o = 54 \text{ V}$).

Prob. 7.8. Calcular las corrientes de malla de la Figura 7.37.

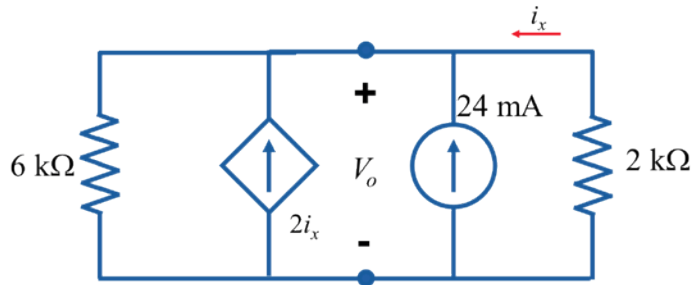


Figura 7.37.

(Sol. $V_o = 14.4$ V).

REFERENCIAS DEL CAPÍTULO

- Análisis de circuitos por teoremas. (2017, marzo 23). Transformación de fuentes (entrada de blog). Recuperado de https:// analisisdecircuitosporteoremas.blogspot.com/2017/03/22-transformacion-de-fuentes_23.html
- Flores-Oropeza, L. A. [Luis Flores Circuitos]. (2020, marzo 18). 16 Transformación De Fuentes en CD [archivo de video]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=KQT-rh8qJOs&ab_channel=LuisFloresCircuitos
- Hayt, W. H. Jr., Kemmerly, J. E., Durbin, S. M. (2018). *Análisis de circuitos en ingeniería* (7.^a edición). México: McGraw-Hill.
- Salazar Gómez, A. J. (2008). *Fundamentos de circuitos*. Bogotá: Universidad de los Andes. Ediciones unidades.



**TEOREMA DE THÉVENIN
Y TEOREMA DE NORTON**

8

INTRODUCCIÓN

En muchas ocasiones es necesario resolver un problema varias veces cambiando únicamente uno solo de los elementos que lo integran o una porción de estos. Si el circuito es pequeño o no es muy complicado en sus conexiones, hacer estos cálculos puede ser un trabajo sencillo, pero si el circuito es muy grande o complejo, realizar esta tarea puede resultar una tarea dura y difícil de efectuar. En esos casos, resultaría conveniente contar con un circuito equivalente sencillo en el que se pudieran hacer estos cambios y obtener los resultados de manera fácil y rápida.

Uno de los conceptos más sorprendentes que surgen de la teoría de circuitos lineales es el circuito equivalente: no importa cuán complejo sea el circuito, ni qué cantidad de resistencias y tipos de fuentes tenga, así como su tipo de conexiones, desde el punto de vista de cualquier par de terminales (a y b), el circuito se comporta como si sólo constara de una fuente y una resistencia.

En términos más generales, la noción de circuito equivalente significa que podría existir una forma más simple, pero funcionalmente equivalente, para resolver sistemas complicados.

Predominan dos estructuras de circuito equivalentes: el circuito equivalente de Thévenin y el circuito equivalente de Norton. Estos circuitos sólo difieren en el tipo de fuente que utilizan y en cómo tienen la resistencia conectada: para el equivalente de Thévenin es una fuente de voltaje en serie con la resistencia, y para el equivalente de Norton es una fuente de corriente en paralelo con la resistencia. En la Figura 8.1a y b se muestran ambos tipos de circuito equivalente.

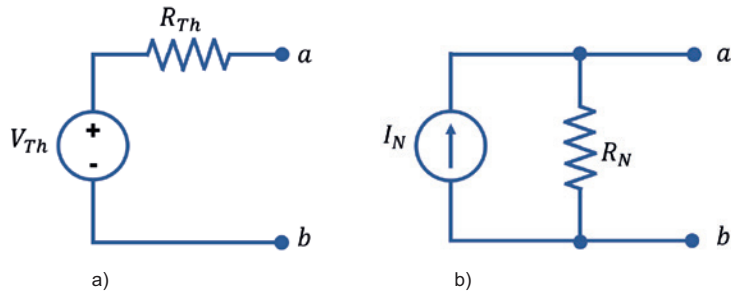


Figura 8.1. Circuito equivalente a) de Thévenin y b) de Norton.

TEOREMA DE THÉVENIN

El teorema de Thévenin fue postulado por el francés Léon Charles Thévenin en 1883, aunque existen publicaciones mencionando que el teorema fue presentado 30 años antes por H. Helmholtz, cuatro años antes de que naciera Thévenin (Johnson, 2003b).

El teorema de Thévenin establece que cualquier circuito eléctrico lineal se puede sustituir por un circuito equivalente, a partir de dos terminales a y b cualesquiera, únicamente por una fuente de voltaje en serie con una resistencia.

Para obtener el circuito equivalente de Thévenin básicamente se deben calcular dos valores del circuito, el voltaje de Thévenin V_{Th} y la resistencia de Thévenin R_{Th} . A continuación, se explican en detalle cuatro pasos para calcular estos valores y poder construir el circuito equivalente de Thévenin.

Pasos para implementar el Teorema de Thévenin

Paso 1.

Retirar el elemento o la parte del circuito que se desea analizar

Se retira el elemento o los elementos que se desean analizar y las terminales que quedaron abiertas se identifican con las letras a y b . Si en el circuito están presentes fuentes dependientes, se debe tener cuidado de no separar la fuente dependiente de la corriente o el voltaje que la controla, de lo contrario no se podrá obtener el circuito equivalente de Thévenin.

Paso 2.

Calcular el Voltaje de Thévenin V_{Th}

Con las terminales a y b del circuito abierto se resuelve y se calcula el voltaje que aparece entre ellas, considerando la terminal a más positiva que la terminal b ; a este voltaje lo llamaremos voltaje de Thévenin V_{Th} .

Para resolver el circuito y poder calcular el voltaje de Thévenin V_{Th} , se utilizará cualquiera de los métodos ya estudiados, es decir, análisis de circuitos en serie, paralelo, mixtos, estrella, delta, análisis de mallas, nodos, superposición, transformación de fuentes e, incluso, se podrá aplicar nuevamente el teorema de Thévenin.

Paso 3.

Calcular la resistencia de Thévenin R_{Th}

La resistencia de Thévenin R_{Th} se calcula entre las terminales a y b ; para medirla, primero se hacen cero todas las fuentes independientes del circuito. Las fuentes de voltaje son sustituidas por un corto circuito, mientras que las fuentes de corriente se sustituyen por un circuito abierto tal como se indica en la Figura 8.2a y b. Entonces entre las terminales a y b , con las fuentes anuladas, se calcula la resistencia equivalente de Thévenin R_{Th} .

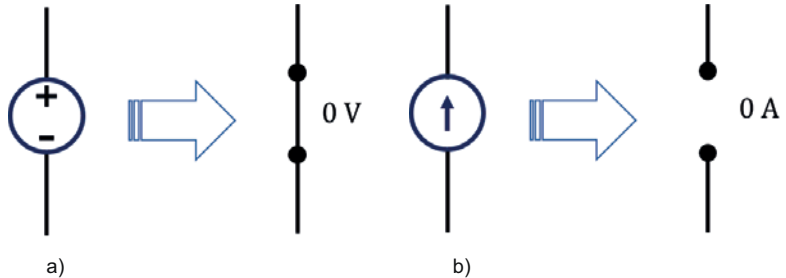


Figura 8.2. Forma de sustituir las fuentes para el cálculo de la resistencia de Thévenin R_{Th} . a) La fuente de voltaje se sustituye por un corto circuito y b) la fuente de corriente se sustituye por un circuito abierto.

Cuando en el circuito existen fuentes dependientes, la resistencia de Thévenin R_{Th} se podrá calcular de dos formas distintas:

- a) La primera forma consiste en regresar las fuentes a su estado original y colocar en corto circuito las terminales a y b para calcular la corriente de corto circuito I_{cc} que fluye a través de esa trayectoria, tal como se indica en la Figura 8.3. Con ese valor de corriente y con el voltaje de Thévenin V_{Th} se podrá calcular la resistencia de Thévenin R_{Th} tal como se indica en la ecuación (8.1).



Figura 8.3. Forma de cortocircuitar las terminales a y b para calcular la corriente de corto circuito I_{cc} . Este cálculo se realiza con todas las fuentes en su estado original.

$$R_{Th} = \frac{V_{Th}}{I_{cc}} \quad (8.1)$$

- b) La segunda forma para calcular la resistencia de Thévenin R_{Th} cuando hay fuentes dependientes en el circuito consiste en hacer cero todas las fuentes independientes y utilizar una fuente auxiliar que se conectará en las terminales a y b

b del circuito. La fuente será una de corriente de valor unitario ($I_u = 1 \text{ A}$) conectada a las terminales a y b , tal como se indica en la Figura 8.4.

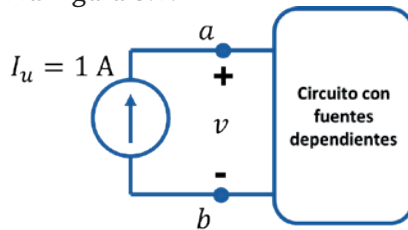


Figura 8.4. Forma de conectar la fuente de corriente de valor unitario I_u para calcular R_{Th} .

Calculamos el voltaje v y éste será directamente el valor de la resistencia de Thévenin R_{Th} . Esto se debe a que lo dividimos entre el valor de la fuente de corriente unitaria I_u , y con esto los voltios se transforman en ohms, tal como se indica en la ecuación (8.2).

$$R_{Th} = \frac{v}{I_u} = \frac{v}{1 \text{ A}}$$

$$\therefore R_{Th} = v \Omega \quad (8.2)$$

Paso 4.

Construir el circuito equivalente de Thévenin

Con los valores de resistencia y voltaje de Thévenin (R_{Th} , V_{Th}) se construye el circuito equivalente tal como se muestra en la Figura 8.1a. Se regresa el o los elementos que se retiraron en el primer paso y se continúa con el análisis original del problema. Es decir, se calcula la corriente, el voltaje o la potencia que se pide en el elemento o la porción del problema que se había retirado desde el principio.

ANÁLISIS DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS UTILIZANDO EL TEOREMA DE THEVENIN

A continuación, se presentan una serie de ejemplos resueltos en los que se obtendrá el circuito equivalente de Thévenin y con los que se apreciará la utilidad de contar con esta herramienta de simplificación y análisis.

Ejemplo 8-1. En el circuito de la Figura 8.5, calcular la potencia que se consume en la resistencia R_5 para los valores de 0.1Ω , 5Ω , 10Ω y 15Ω .

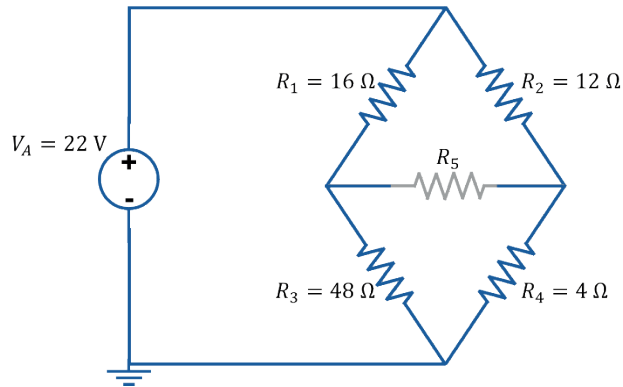


Figura 8.5. Circuito para aplicar el teorema de Thévenin y calcular la potencia que se disipa en R_5 .

Solución.

Se pide calcular la potencia que se consume en la resistencia R_5 ; el problema radica en que esta resistencia cambiará su valor cuatro veces, lo cual significa que el circuito se tendrá que reducir o resolver también cuatro veces. Para solucionarlo se puede aplicar alguno de los métodos de análisis ya estudiados, como el análisis de mallas o nodos, y después, para cada uno de los circuitos, se debe calcular el voltaje o la corriente en la resistencia R_5 para luego calcular la potencia.

Parece mucho trabajo el que se tiene que realizar, y efectivamente lo es, pero si se obtiene el circuito equivalente de Thévenin, entonces todo este trabajo sólo se tendrá que realizar una sola vez. A partir del circuito equivalente, sólo se tendrán que sustituir los distintos valores de la resistencia R_5 en un circuito mucho más sencillo y con este circuito se podrá calcular la potencia de la resistencia de una forma más rápida.

A continuación, aplicamos los pasos para obtener el circuito equivalente de Thévenin.

Paso 1. De la Figura 8.5 retiramos la resistencia R_5 y marcamos las terminales con las letras a y b , tal como se muestra en la Figura 8.6. La forma de colocar las letras a y b es indistinta, sólo recordar que la terminal a será donde se coloque el signo positivo del voltaje de Thévenin V_{Th} .

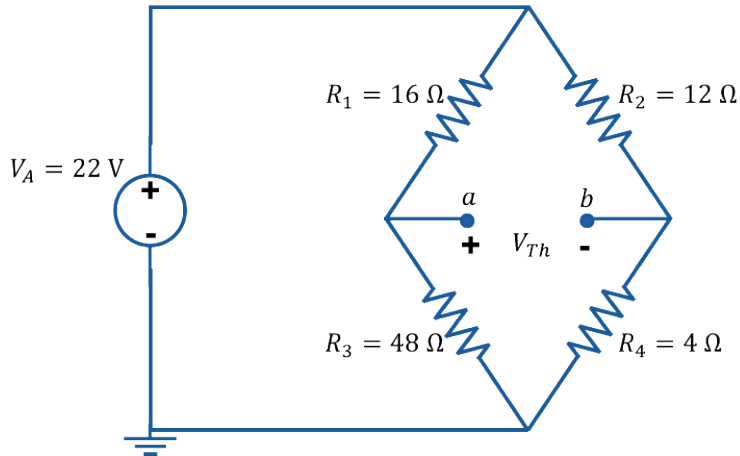


Figura 8.6. Circuito con la resistencia R_5 y marcado de las terminales.

Paso 2. Puede calcularse el voltaje de Thévenin R_{Th} con base en el voltaje de dos resistencias, ya sea el de las resistencias R_1 y R_2 , o con el voltaje de R_3 y R_4 ; en ambos casos, se aplica una ley de voltajes de Kirchhoff en la que se incluya V_{Th} .

Otra forma de calcular el voltaje es calculando la diferencia de voltaje entre las terminales a y b ($R_{Th} = V_a - V_b$), como se indica en la ecuación (8.3).

$$V_{Th} = V_a - V_b \quad (8.3)$$

En este caso, calcularemos los voltajes de las resistencias R_3 y R_4 y obtendremos el voltaje de Thévenin de las dos formas mencionadas. En la Figura 8.7 se indica la polaridad de los voltajes en las resistencias.

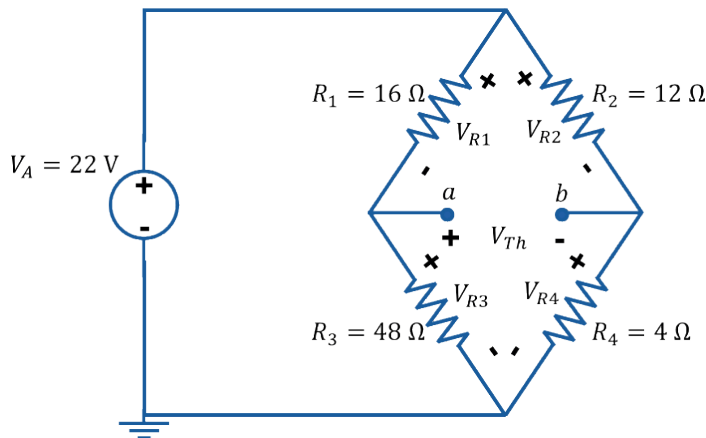


Figura 8.7. Signos para las resistencias y para el voltaje de Thévenin V_{Th} .

Con un divisor de voltaje entre R_1 y R_3 obtenemos la ecuación (8.4) para calcular el voltaje para la resistencia R_3 .

$$V_{R3} = V_A \frac{R_3}{R_1 + R_3} \quad (8.4)$$

$$V_{R3} = (22 \text{ V}) \frac{48 \Omega}{16 \Omega + 48 \Omega}$$

$$V_{R3} = 16.5 \text{ V}$$

Con un divisor de voltaje entre R_2 y R_4 obtenemos la ecuación (8.5) para calcular el voltaje para la resistencia R_4 .

$$V_{R4} = V_A \frac{R_4}{R_2 + R_4} \quad (8.5)$$

$$V_{R4} = (22 \text{ V}) \frac{4 \Omega}{12 \Omega + 4 \Omega}$$

$$V_{R4} = 5.5 \text{ V}$$

Calculamos el voltaje de Thévenin con la ecuación (8.3), usando los voltajes obtenidos.

$$V_{Th} = V_a - V_b$$

Cambiamos los voltajes por los de las resistencias y nos queda:

$$V_{Th} = V_{R3} - V_{R4}$$

$$V_{Th} = 16.5 \text{ V} - 5.5 \text{ V}$$

$$V_{Th} = 11 \text{ V}$$

En la Figura 8.8 este mismo resultado se obtiene si se plantea la ley de voltajes de Kirchoff en la trayectoria cerrada marcada con gris, y en la que se incluya V_{Th} .

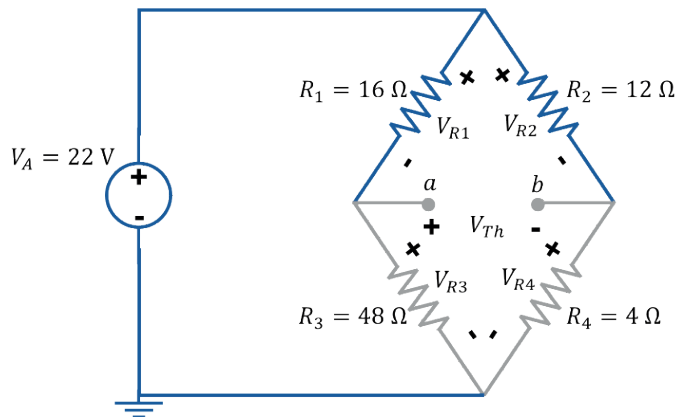


Figura 8.8. Trayectoria cerrada donde se incluye V_{Th} .

$$\sum V_{trayectoria} = 0 \text{ V}$$

Construimos la ecuación siguiendo el sentido de las manecillas del reloj (\odot) y resulta:

$$V_{Th} + V_{R4} - V_{R3} = 0 \text{ V}$$

$$\therefore V_{Th} = V_{R3} - V_{R4}$$

$$V_{Th} = 16.5 \text{ V} - 5.5 \text{ V}$$

$$V_{Th} = 11 \text{ V} \quad (8.6)$$

Paso 3. Para calcular la resistencia de Thévenin R_{Th} se hacen cero todas las fuentes de voltaje y corriente del circuito (en este caso sólo hay una fuente de voltaje V_A). En la Figura 8.9 se muestra cómo queda el circuito para poder calcular la resistencia R_{Th} .

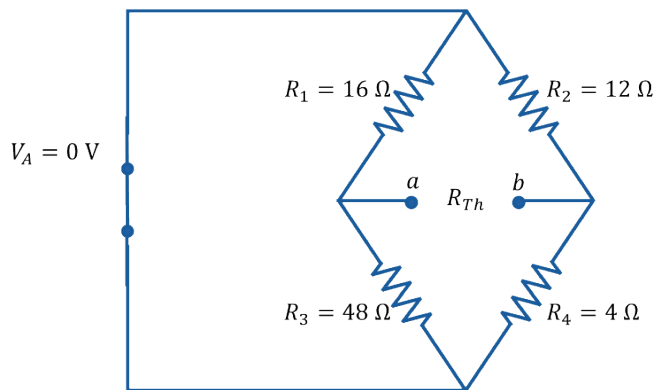


Figura 8.9. Fuente de voltaje en corto circuito y arreglo de resistencias para calcular la resistencia R_{Th} .

Observamos que las resistencias R_1 y R_3 se encuentran en paralelo por haber quedado conectadas a través de la fuente de voltaje en corto circuito. Lo mismo ocurre con las resistencias R_2 y R_4 . Con las ecuaciones (8.7) y (8.8) se calcula la resistencia equivalente en paralelo para cada par de resistencias.

$$R_{13} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}$$

$$R_{13} = \frac{(16 \Omega)(48 \Omega)}{16 \Omega + 48 \Omega}$$

$$R_{13} = 12 \Omega \quad (8.7)$$

$$R_{24} = \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}$$

$$R_{24} = \frac{(12 \Omega)(4 \Omega)}{12 \Omega + 4 \Omega}$$

$$R_{24} = 3 \Omega \quad (8.8)$$

En la Figura 8.10 se muestra cómo quedan simplificadas cada par de resistencias en paralelo para poder calcular la resistencia de Thévenin R_{Th} . A partir de esta representación se puede observar que las resistencias han quedado conectadas en serie y la suma de éstas será la resistencia R_{Th} , tal como se expresa en la ecuación (8.9).

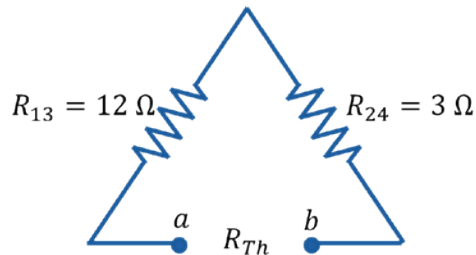


Figura 8.10. Simplificación de resistencias en paralelo para el cálculo de R_{Th} .

$$R_{Th} = R_{13} + R_{24}$$

$$R_{Th} = 12 \Omega + 3 \Omega$$

$$R_{Th} = 15 \Omega \quad (8.9)$$

Paso 4. Con el voltaje y la resistencia calculados se construye el circuito equivalente de Thévenin de la Figura 8.11. El circuito que se tenía en la Figura 8.5 ha quedado reducido simplemente a una fuente de voltaje en serie con una resistencia, y con él se puede variar el valor de la resistencia R_5 y hacer los cálculos mucho más rápido. Observar que en color gris se ha regresado la resistencia R_5 .

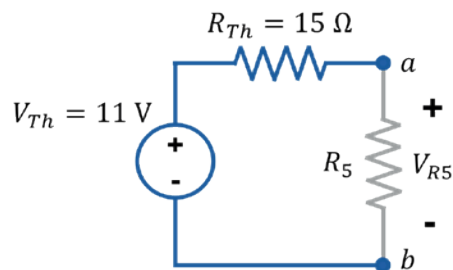


Figura 8.11. Circuito equivalente de Thévenin calculado.

Es a partir de este circuito equivalente, que tiene únicamente dos resistencias en serie, donde se varía el valor de la resistencia R_5 y en el que se podrá calcular la potencia para cada uno de los valores indicados de R_5 (0.1Ω , 5Ω , 10Ω y 15Ω).

A partir de la Figura 8.11 utilizamos un divisor de voltaje con la ecuación (8.10) para así poder calcular el voltaje de la resistencia R_5 .

$$V_{R5} = V_{Th} \frac{R_5}{R_{Th} + R_5} \quad (8.10)$$

Utilizando la ecuación (2.8) y la ecuación (8.10) calculamos la potencia en la resistencia R_5 , resultando la ecuación (8.11).

$$P_{R5} = \frac{(V_{R5})^2}{R_5} \quad (8.11)$$

Los resultados de la Tabla 8.1 se obtienen con los valores del circuito en la Figura 8.11 y con el uso de las ecuaciones (8.10) y (8.11) para cada uno de los valores de la resistencia R_5 .

Tabla 8.1. Valores de voltaje y potencia para cada valor de la resistencia R_5

| R_5 | V_{R5} | P_{R5} |
|--------------|----------|----------|
| 0.1 Ω | 72.8 mV | 52.9 mW |
| 5 Ω | 2.75 V | 1.513 W |
| 10 Ω | 4.40 V | 1.936 W |
| 15 Ω | 5.50 V | 2.017 W |

Una vez que se obtuvo el circuito equivalente de Thévenin, calcular el voltaje y la potencia de la resistencia R_5 se vuelve una tarea muy sencilla ya que el circuito que se tiene que analizar es simplemente un circuito en serie de dos resistencias con una fuente de voltaje.

Si no se hubiera obtenido el circuito equivalente de Thévenin se tendría que haber resuelto cada uno de los circuitos originales, cambiando para estos el valor de la resistencia R_5 , y hacer simplificaciones de estrella, delta o resolverlo utilizando análisis de mallas o nodos.

En los resultados de la Tabla 8.1 se observa que, mientras más aumenta el valor de la resistencia R_5 hasta llegar al valor de 15 Ω , el valor del voltaje y la potencia también va aumentando, haciendo parecer que hay una correlación ascendente entre estos valores. Sin embargo, a partir de los 5 Ω la resistencia aumenta en múltiplos de cinco, mientras que la salida de potencia no crece de esa forma lineal.

Ejemplo 8-2. En el circuito de la Figura 8.12, obtener el circuito equivalente de Thévenin visto por la resistencia R_L . Calcular la potencia de la resistencia R_L cuando toma los valores de $R_{Th}/2$, R_{Th} y $2R_{Th}$, y comparar cómo son los resultados obtenidos entre sí.

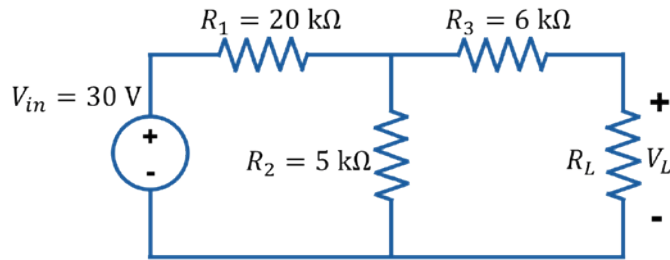


Figura 8.12. Circuito para obtener el circuito equivalente de Thévenin y para distintos valores de R_L .

Solución. Aplicamos los 4 pasos para obtener el circuito equivalente de Thévenin.

Paso 1. Retiramos la resistencia R_L del circuito y marcamos las terminales tal como se muestra en la Figura 8.13.

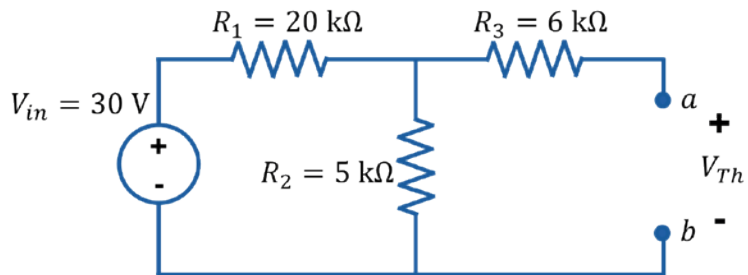


Figura 8.13. Marcado de las terminales después de retirar la resistencia R_L .

Paso 2. Se resuelve el circuito de la Figura 8.13 para calcular el voltaje de Thévenin V_{Th} . Ya que el circuito se encuentra abierto entre las terminales a y b , entonces no circula corriente a través de la resistencia R_3 (Figura 8.14) y por lo tanto el voltaje en la resistencia es de 0 V. Lo anterior significa que la resistencia R_3 sólo se debe considerar como si se tratase de un conductor ocasionando que el voltaje de Thévenin V_{Th} sea igual al voltaje de la resistencia R_2 tal como se expresa en la Figura 8.15.

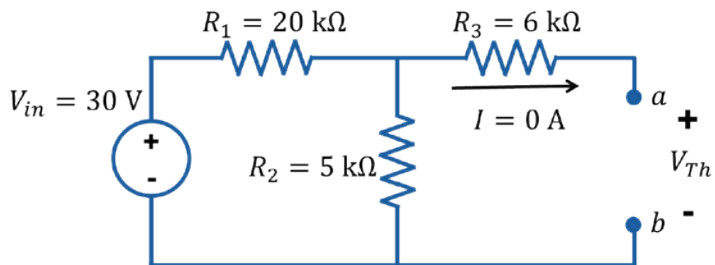


Figura 8.14. Corriente de 0 A a través de la resistencia R_3 .

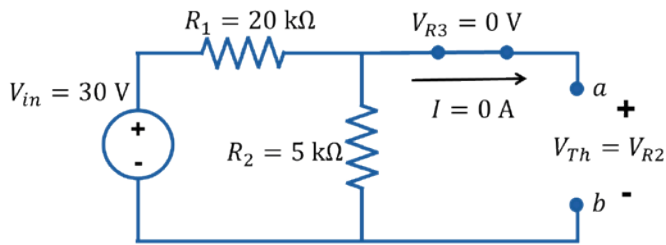


Figura 8.15. $V_{R3} = 0 \text{ V}$, por lo tanto se le considera como un simple conductor haciendo que $V_{R2} = V_{Th}$.

De acuerdo con lo explicado, entonces el voltaje de Thévenin se puede calcular con un divisor de voltaje entre R_1 y R_2 resultando.

$$V_{Th} = V_{in} \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) = (30 \text{ V}) \left(\frac{5 \text{ k}\Omega}{20 \text{ k}\Omega + 5 \text{ k}\Omega} \right)$$

$$V_{Th} = 6 \text{ V}$$

Paso 3. Se coloca en corto circuito la fuente de voltaje para calcular la resistencia equivalente de Thévenin R_{Th} entre las terminales a y b . En la Figura 8.16 se muestra cómo queda el arreglo de resistencias sin fuente para poder calcular la resistencia R_{Th} .

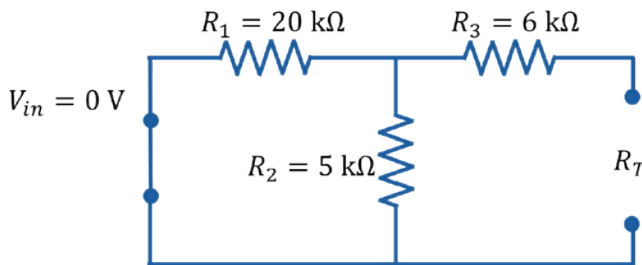


Figura 8.16. Circuito sin fuente de alimentación para poder calcular la resistencia de Thévenin R_{Th} .

Entonces, la resistencia equivalente de Thévenin resulta:

$$R_{Th} = R_3 + (R_1 \parallel R_2)$$

$$R_{Th} = 6 \text{ k}\Omega + \frac{(20 \text{ k}\Omega)(5 \text{ k}\Omega)}{20 \text{ k}\Omega + 5 \text{ k}\Omega}$$

$$R_{Th} = 10 \text{ k}\Omega$$

Paso 4. Con el voltaje y la resistencia de Thévenin se construye el circuito de la Figura 8.17 en donde se regresa la resistencia R_L y ya se pueden calcular los valores de la potencia indicados en el problema para los distintos valores de R_L .

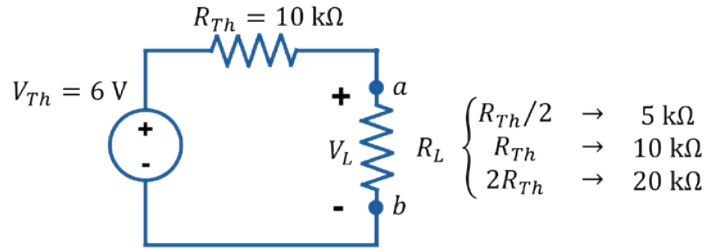


Figura 8.17. Circuito equivalente de Thévenin calculado.

Para calcular la potencia, primero se mide el voltaje de la resistencia con un divisor de voltaje a partir de la Figura 8.17, y después la potencia para una resistencia con un voltaje en sus terminales.

$$V_L = V_{in} \left(\frac{R_L}{R_{Th} + R_L} \right)$$

$$P_{R_L} = \frac{V_L^2}{R_L}$$

Cálculos para $R_L = R_{Th}/2 = 5 \text{ k}\Omega$

$$V_L = (6 \text{ V}) \left(\frac{5 \text{ k}\Omega}{10 \text{ k}\Omega + 5 \text{ k}\Omega} \right) = 2 \text{ V}$$

$$P_{R_L} = \frac{(2 \text{ V})^2}{5,000 \Omega} = 800 \mu\text{W}$$

Cálculos para $R_L = R_{Th} = 10 \text{ k}\Omega$

$$V_L = (6 \text{ V}) \left(\frac{10 \text{ k}\Omega}{10 \text{ k}\Omega + 10 \text{ k}\Omega} \right) = 3 \text{ V}$$

$$P_{R_L} = \frac{(3 \text{ V})^2}{10,000 \Omega} = 900 \mu\text{W}$$

Cálculos para $R_L = 2R_{Th} = 20 \text{ k}\Omega$

$$V_L = (6 \text{ V}) \left(\frac{20 \text{ k}\Omega}{10 \text{ k}\Omega + 20 \text{ k}\Omega} \right) = 4 \text{ V}$$

$$P_{R_L} = \frac{(4 \text{ V})^2}{20,000 \Omega} = 800 \mu\text{W}$$

Después de obtener el circuito equivalente de Thévenin se han calculado los tres valores de potencia para cada uno de los distintos valores de la resistencia R_L .

Observamos que, mientras más aumenta el valor de R_L también aumenta el valor del voltaje V_L . Sin embargo, para la mitad del valor de R_{Th} en la resistencia R_L la potencia es de $800 \mu\text{W}$, mientras que para el mismo valor de R_{Th} resultó de $900 \mu\text{W}$, pero para el doble del valor de R_{Th} la potencia volvió a valer $800 \mu\text{W}$. Esto significa que el voltaje V_L va aumentando conforme aumenta la resistencia R_L , pero la potencia no aumenta para todos los valores de la resistencia de carga R_L . Existe un rango de valores para los cuales la potencia en la resistencia R_L va en aumento y otro rango de valores para los cuales la potencia va en decremento pasando por un valor máximo que en este caso se presenta, cuando $R_L = R_{Th}$.

Este comportamiento no se presentó en el **Ejemplo 8-1** debido a que el valor máximo de la resistencia de salida fue el mismo valor que el de la resistencia de Thévenin, por lo tanto, todos los valores calculados de potencia siempre fueron en aumento.

Ejemplo 8-3. En el circuito de la Figura 8.18, obtener el circuito equivalente de Thévenin que se obtiene al quitar la resistencia R_O .

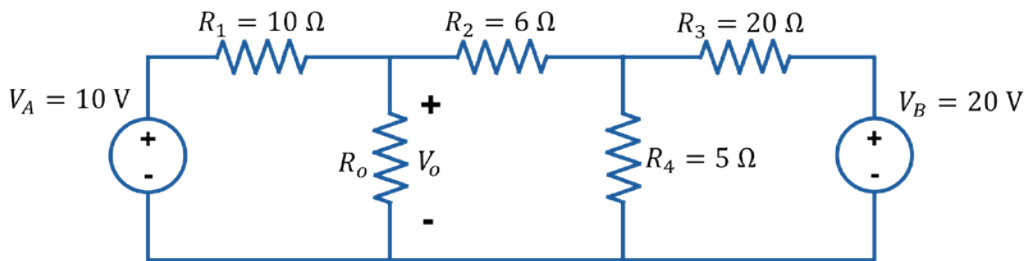


Figura 8.18. Circuito para obtener el circuito equivalente de Thévenin.

Solución. Aplicamos los 4 pasos para obtener el circuito equivalente de Thévenin.

Paso 1. Retiramos la resistencia R_O del circuito y marcamos las terminales tal como se muestra en la Figura 8.19.

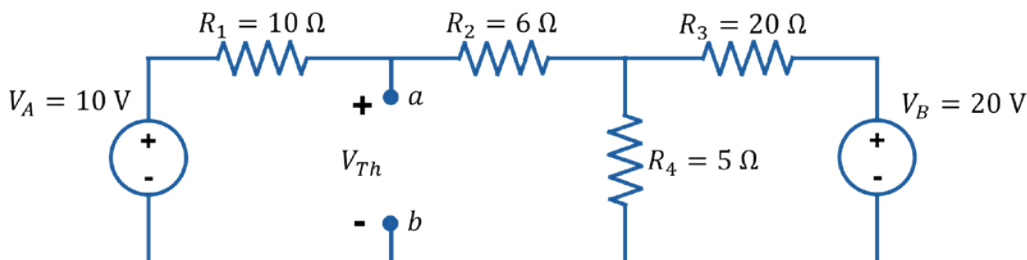


Figura 8.19. Retiro de la resistencia R_O y marcado de las terminales a y b del circuito.

Paso 2. Se resuelve el circuito de la Figura 8.19 para calcular el voltaje de Thévenin V_{Th} . El circuito se puede resolver prácticamente con cualquiera de los métodos ya explicados en los capítulos anteriores. A continuación, se presenta un resumen de cómo queda calculado el voltaje V_{Th} con cada uno de los métodos estudiados.

Análisis de mallas

Se dibujan las corrientes de malla en el circuito de la Figura 8.20, y aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff, se obtienen y simplifican para ser resueltas en un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

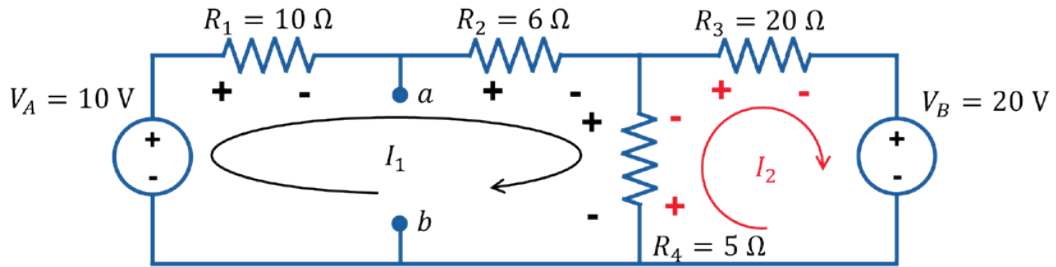


Figura 8.20. Se plantean las mallas en el circuito para poder calcular V_{Th} .

$$\left. \begin{aligned} 21I_1 - 5I_2 &= 10 \\ -5I_1 + 25I_2 &= -20 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} Ec(I) \\ Ec(II) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Dos ecuaciones} \\ \text{con dos incógnitas} \end{array}$$

Se resuelve el sistema con cualquiera de los métodos estudiados en el capítulo 4 y resulta:

$$\begin{aligned} I_1 &= 0.3 \text{ A} \\ I_2 &= -0.74 \text{ A} \end{aligned}$$

El voltaje de Thévenin se puede calcular con los valores de las corrientes y cualquiera de las tres trayectorias válidas de la Figura 8.20.

$$V_{Th} = -I_1 R_1 + V_A \quad (8.12)$$

$$V_{Th} = I_1 R_2 + R_4 (I_1 - I_2) \quad (8.13)$$

$$V_{Th} = I_1 R_2 + I_2 R_3 + V_B \quad (8.14)$$

Sustituyendo los valores de corrientes y resistencias en la ecuación (8.13) resulta:

$$\begin{aligned} V_{Th} &= I_1 R_2 + R_4 (I_1 - I_2) \\ V_{Th} &= (0.3 \text{ A})(6 \Omega) + (5 \Omega)[0.3 \text{ A} - (-0.74 \text{ A})] \\ V_{Th} &= 7 \text{ V} \end{aligned}$$

Análisis de nodos

Para simplificar el análisis del circuito y calcular sólo un voltaje de nodo se suman las resistencias R_1 y R_2 . En la Figura 8.21 se muestra cómo quedan marcadas las corrientes y los voltajes de nodo; dos de los tres voltajes ya se conocen (V_A y V_B) sólo resta calcular V_x .

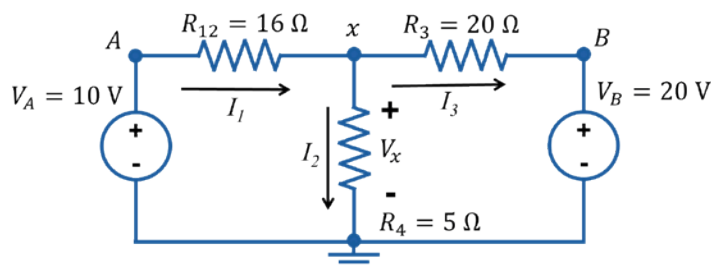


Figura 8.21. Circuito para aplicar el análisis de nodos y poder calcular V_{Th} .

En la Figura 8.21 aplicamos la ley de corrientes de Kirchoff para el nodo x , tal como se aplicó en los problemas del capítulo 5, y resulta una ecuación con una incógnita (8.19).

$$I_1 = I_2 + I_3 \quad (8.15)$$

$$I_1 = \frac{V_A - V_x}{R_{12}} \quad (8.16)$$

$$I_2 = \frac{V_x}{R_4} \quad (8.17)$$

$$I_3 = \frac{V_x - V_B}{R_3} \quad (8.18)$$

$$\frac{V_A - V_x}{R_{12}} = \frac{V_x}{R_4} + \frac{V_x - V_B}{R_3} \quad (8.19)$$

Al sustituir los valores de la Figura 8.21 en la ecuación (8.19) y despejar el valor de V_x resulta.

$$V_x = 5.2 \text{ V}$$

Se calcula el valor de la corriente I_1 con la ecuación (8.16) para, después, calcular el voltaje V_{Th} con la ecuación (8.12).

$$I_1 = \frac{V_A - V_x}{R_{12}} = \frac{10 \text{ V} - 5.2 \text{ V}}{16 \Omega}$$

$$I_1 = 0.3 \text{ A}$$

$$V_{Th} = -I_1 R_1 + V_A$$

$$V_{Th} = -(0.3 \text{ A})(10 \Omega) + 10 \text{ V}$$

$$V_{Th} = 7 \text{ V}$$

Utilizando el teorema de superposición

Se sumarán las resistencias R_1 y R_2 para simplificar el análisis del circuito y para aplicar el teorema de superposición, se debe definir qué valor es el que se calculará. En este caso podría ser el voltaje V_x o la corriente I_1 marcadas en la Figura 8.22 –ambos valores facilitan el cálculo del voltaje de Thévenin–. En este caso, resulta más fácil poder calcular el voltaje V_x , por lo tanto, será éste el valor que se calcule.

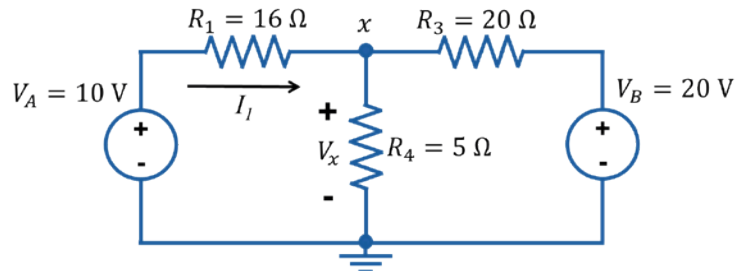


Figura 8.22. Circuito para aplicar el análisis de superposición y poder calcular V_{Th} .

A partir de la Figura 8.22, y utilizando un divisor de voltaje para calcular V_x con cada fuente, se calculan las ecuaciones siguientes.

$$V_x' = V_A \left[\frac{(R_3 \parallel R_4)}{R_1 + (R_3 \parallel R_4)} \right] \quad (8.20)$$

$$V_x'' = V_B \left[\frac{(R_1 \parallel R_4)}{R_3 + (R_1 \parallel R_4)} \right] \quad (8.21)$$

$$V_x = V_x' + V_x'' \quad (8.22)$$

Al sustituir los valores de la Figura 8.22 en las ecuaciones (8.20) y (8.21) para sumar los valores y obtener V_x resulta:

$$V_x = (10 \text{ V}) \left[\frac{(4 \Omega)}{16 \Omega + (4 \Omega)} \right] + (20 \text{ V}) \left[\frac{(3.809 \Omega)}{20 \Omega + (3.809 \Omega)} \right]$$

$$V_x = 2 \text{ V} + 3.2 \text{ V}$$

$$V_x = 5.2 \text{ V}$$

Se calcula el valor de la corriente I_1 con la ecuación (8.16) para después calcular el voltaje V_{Th} con la ecuación (8.12).

$$I_1 = \frac{V_A - V_x}{R_{12}} = \frac{10 \text{ V} - 5.2 \text{ V}}{16 \Omega}$$

$$I_1 = 0.3 \text{ A}$$

$$V_{Th} = -I_1 R_1 + V_A$$

$$V_{Th} = -(0.3 \text{ A})(10 \Omega) + 10 \text{ V}$$

$$V_{Th} = 7 \text{ V}$$

Utilizando la transformación de fuentes

Para aplicar la transformación de fuentes, se utiliza el circuito de la Figura 8.23. En este ejemplo, se puede reducir el circuito hasta que queda una fuente de voltaje y una resistencia conectadas a las terminales a y b .

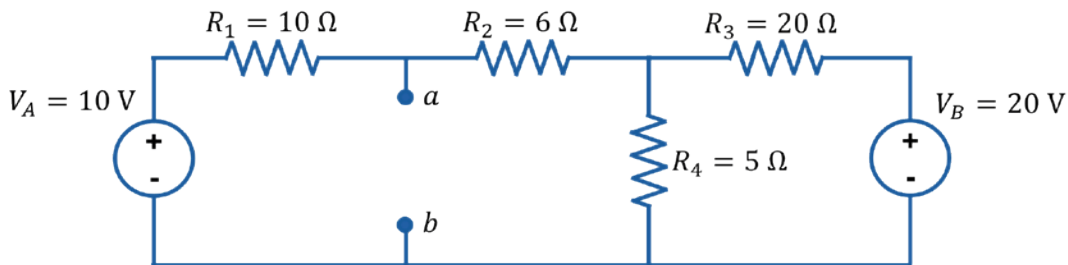


Figura 8.23. Circuito para aplicar la transformación de fuentes y poder calcular V_{Th} .

Se utilizan las ecuaciones (7.4) y (7.5) para transformar las fuentes y las ecuaciones (2.1) y (2.3) para reducir las resistencias en serie y en paralelo, y simplificar así el circuito hasta dejar únicamente una fuente de voltaje y una resistencia conectadas a las terminales a y b .

A continuación, se muestra la secuencia de transformaciones hasta obtener el voltaje de Thévenin. A partir de la Figura 8.23 se obtiene la Figura 8.24, después de transformar la fuente de V_A y la resistencia R_1 y con la fuente V_B y la resistencia R_3 .

$$I_A = \frac{V_A}{R_1} = \frac{10 \Omega}{10 \Omega} = 1 \text{ A}$$

$$I_B = \frac{V_B}{R_3} = \frac{20 \text{ V}}{20 \Omega} = 1 \text{ A}$$

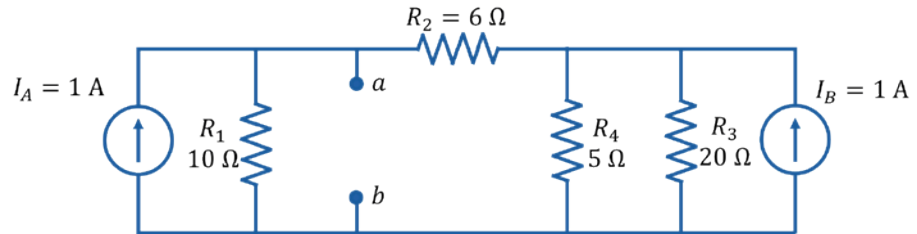


Figura 8.24. Fuentes de voltaje transformadas en fuentes de corriente.

$$R_3 \parallel R_4 = 4 \Omega$$

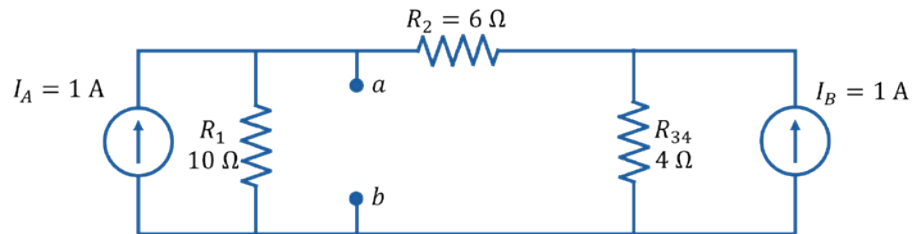


Figura 8.25. Reducción de las resistencias R_3 y R_4 en paralelo.

$$V_B' = I_B R_{34} = (1 \text{ A})(4 \Omega) = 4 \text{ V}$$

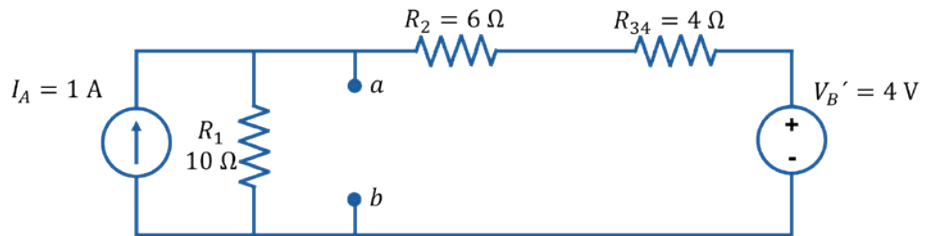


Figura 8.26. Transformación de fuente de corriente a fuente de voltaje.

$$R_{234} = R_2 + R_{34} = 10 \Omega$$

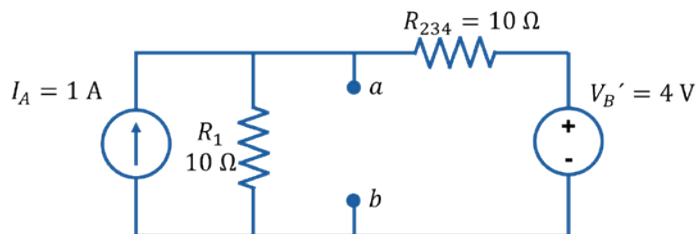


Figura 8.27. Reducción de las resistencia R_2 y R_{34} en serie.

$$I_B' = \frac{V_B'}{R_{234}} = \frac{4 \text{ V}}{10 \Omega} = 0.4 \text{ A}$$

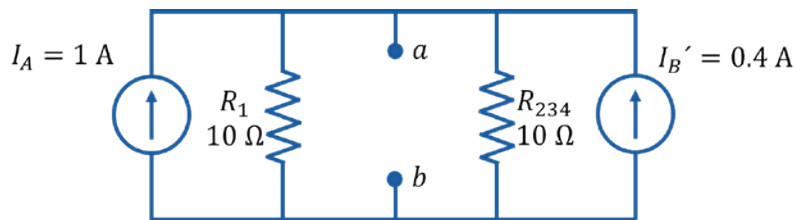


Figura 8.28. Transformación de fuente de voltaje a fuente de corriente.

$$I_T = I_A + I_B' = 1.4 \text{ A}$$

$$R_T = (R_1 \parallel R_{234}) = 5 \Omega$$

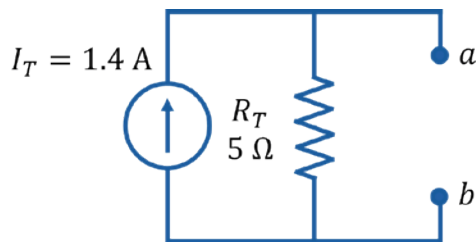


Figura 8.29. Reducción de fuentes de corriente en paralelo y resistencias en paralelo.

$$V_T = I_T R_T = (1.4 \text{ A})(5 \Omega) = 7 \text{ V}$$

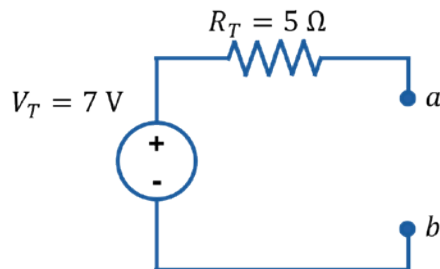


Figura 8.30. Transformación de fuente de corriente a fuente de voltaje.

Si se observa con detenimiento lo que se acaba de obtener es ya directamente el “Circuito equivalente de Thévenin” es decir, acabamos de obtener el voltaje V_{Th} y la resistencia R_{Th} . Por lo tanto, el circuito se debe representar como aparece en la Figura 8.31.

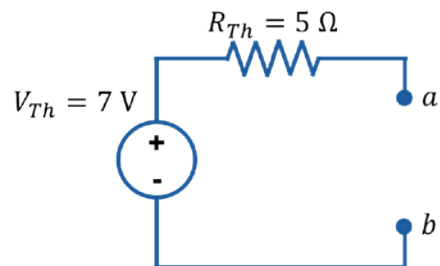


Figura 8.31. Transformación de fuente de corriente a fuente de voltaje.

Paso 3. A pesar de que con el último de los métodos ya se obtuvo el circuito equivalente de Thévenin, falta calcular la resistencia de Thévenin R_{Th} para los otros casos en los que no se sabe aún su resultado. Se deben eliminar las fuentes y calcular la resistencia equivalente de Thévenin R_{Th} en las terminales a y b . En la Figura 8.32 se muestra cómo queda el arreglo de resistencias sin fuentes para poder calcular la resistencia R_{Th} .

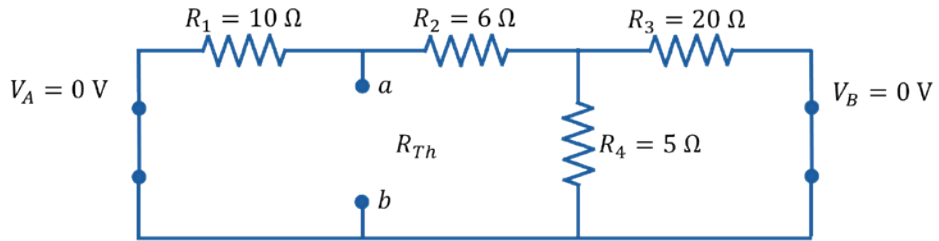


Figura 8.32. Circuito sin fuentes de alimentación para poder calcular la resistencia de Thévenin R_{Th} .

$$R_{Th} = R_1 \parallel \left[R_2 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} \right]$$

$$R_{Th} = (10\ \Omega) \parallel \left[6\ \Omega + \frac{(20\ \Omega)(5\ \Omega)}{20\ \Omega + 5\ \Omega} \right]$$

$$R_{Th} = 5\ \Omega$$

Paso 4. Con el voltaje y la resistencia calculados se construye el circuito equivalente de Thévenin de la Figura 8.33. El circuito que se tenía en la Figura 8.18 ha quedado reducido simplemente a una fuente de voltaje en serie con una resistencia.

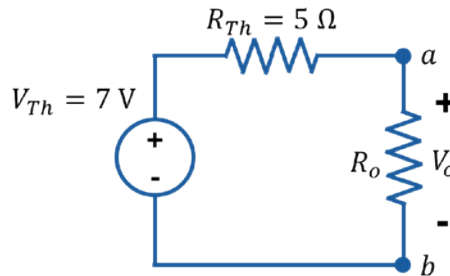


Figura 8.33. Circuito equivalente de Thévenin calculado.

En el ejemplo se pudieron aplicar todos los tipos de análisis para calcular el voltaje V_{Th} . En términos de trabajo y complejidad, la forma más fácil de obtener el voltaje de Thévenin fue con el método de superposición y aunque con varias transformaciones, también con la transformación de fuentes, en la que además se obtuvo la resistencia de Thévenin al mismo tiempo que se calculó el voltaje.

Ejemplo 8-4. Utilizando el circuito equivalente de Thévenin, calcular la corriente y el voltaje de la resistencia R_7 , en el circuito de la Figura 8.34 tomado de Flores-Oropeza (2017b).

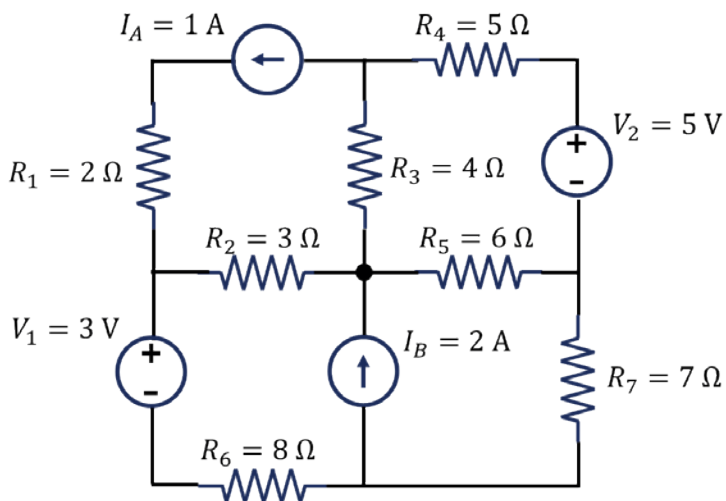


Figura 8.34. Circuito para obtener el circuito equivalente de Thévenin y para la resistencia R_7 .

Solución.

Aplicamos los 4 pasos para obtener el circuito equivalente de Thévenin.

Paso 1. Retiramos la resistencia R_7 del circuito y marcamos las terminales tal como se muestra en la Figura 8.35.

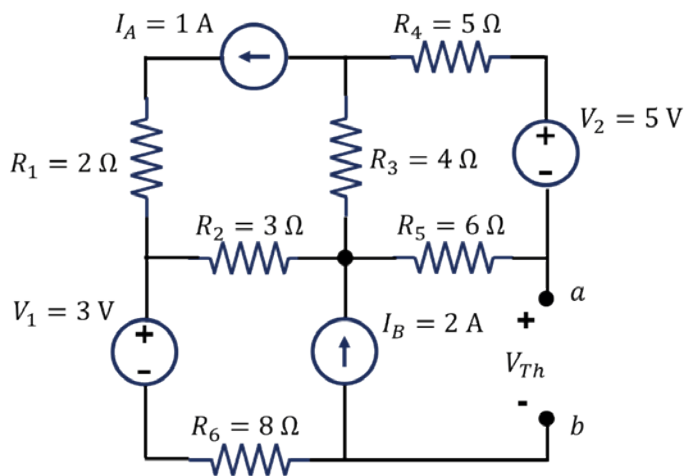


Figura 8.35. Marcado de las terminales después de retirar la resistencia R_7 .

Paso 2. Se resuelve el circuito de la Figura 8.35 para calcular el voltaje de Thévenin V_{Th} . A partir de la Figura 8.35 se hace un breve análisis en la Tabla 8.2 de las ventajas y desventajas de utilizar un análisis u otro para el cálculo de V_{Th} .

Tabla 8.2. Ventajas y desventajas para seleccionar el tipo de análisis y calcular V_{Th} en el circuito

| Método de análisis | Ventajas | Desventajas |
|---------------------------|---|--|
| Mallas | Se tienen 3 mallas y 2 de ellas ya están definidas, por lo tanto, sólo falta calcular una de las corrientes. | Con las corrientes, todavía se debe calcular el voltaje de Thévenin a partir de alguna trayectoria válida. |
| Nodos | Nos podría dar directamente el valor del voltaje de Thévenin, dependiendo de dónde se seleccione el nodo de referencia. | Se tienen 7 nodos y el nodo de referencia, por lo tanto, resultaría un sistema de 7 ecuaciones con 7 incógnitas. |
| Superposición | Se resolverían circuitos con una sola fuente de alimentación. Proporciona el valor del voltaje directamente. | Se resuelven 4 circuitos, algunos con conexiones confusas. |
| Transformación de fuentes | Ninguna. | No se puede aplicar la transformación de fuentes en el circuito para todas las fuentes. |

De la Tabla 8.2 se observa que el análisis de mallas o el principio de superposición son los dos métodos factibles para calcular el voltaje de Thévenin V_{Th} . En este caso, se resolverá el ejemplo utilizando el análisis con mallas y se dejará al estudiante practicar el principio de superposición para comprobar el resultado que se compartirá más adelante.

En la Figura 8.36 se proponen las direcciones de las corrientes, se colocan los signos de los voltajes y se aplica la ley de tensiones de Kirchhoff para obtener la ecuación y poder calcular la corriente que falta del circuito (I_2).

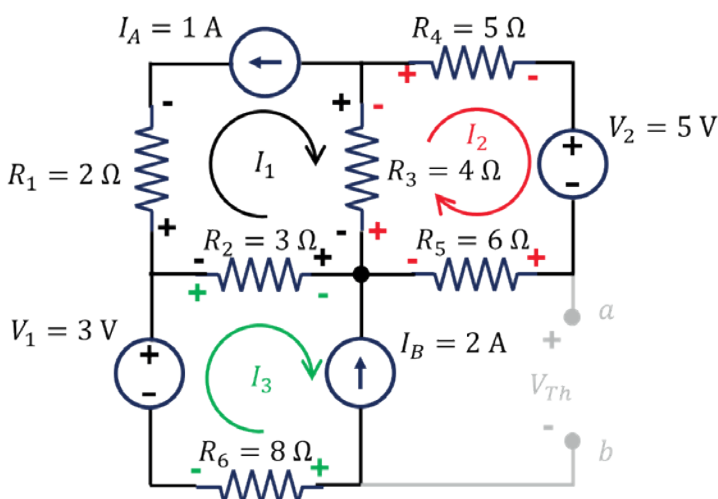


Figura 8.36. Asignación de las corrientes y colocación de signos en las mallas del circuito para calcular V_{Th} .

A partir de la Figura 8.36 se observa que los valores de las corrientes I_1 e I_3 ya se encuentran definidos porque en el circuito aparecen fuentes de corriente que así las establecen.

Para la corriente I_1 se tiene:

$$I_1 = -I_A = -(1 \text{ A})$$

$$\therefore I_1 = -1 \text{ A}$$

Para la corriente I_2 se tiene:

$$I_3 = -I_B = -(2 \text{ A})$$

$$\therefore I_3 = -2 \text{ A}$$

En la Figura 8.36 aplicamos la ley de voltajes de Kirchhoff para la malla de I_2 en favor de las manecillas del reloj (\odot) y nos resulta:

$$\sum V_{trayectoria} = 0 \text{ V}$$

$$V_2 + R_5 I_2 + R_3(I_2 - I_1) + R_4 I_2 = 0 \text{ V}$$

Sustituimos los valores y despejamos el valor de I_2 para tener

$$5 \text{ V} + (6 \Omega)I_2 + (4 \Omega)(I_2 - (-1 \text{ A})) + (5 \Omega)I_2 = 0 \text{ V}$$

$$5 \text{ V} + (6 \Omega)I_2 + (4 \Omega)(I_2) + 4 \text{ V} + (5 \Omega)I_2 = 0 \text{ V}$$

$$I_2 = \frac{-9 \text{ V}}{15 \Omega}$$

$$\therefore I_2 = -0.6 \text{ A}$$

Ya con los valores de las corrientes se pueden plantear trayectorias con la ley de voltajes de Kirchhoff en las que se involucre al voltaje de Thévenin V_{Th} para poderlo calcular.

A partir de la Figura 8.36 se muestran las trayectorias de voltaje para poder calcular el voltaje de Thévenin.

$$V_{Th} = R_5 I_2 + R_2(I_1 - I_3) + V_1 - R_6 I_3 \quad (8.23)$$

$$V_{Th} = -V_2 - R_4 I_2 + R_3(I_1 - I_2) + R_2(I_1 - I_3) + V_1 - R_6 I_3 \quad (8.24)$$

Sustituyendo los valores de corrientes y resistencias en la ecuación (8.23) resulta:

$$V_{Th} = R_5 I_2 + R_2(I_1 - I_3) + V_1 - R_6 I_3$$

$$V_{Th} = (6 \Omega)(-0.6 \text{ A}) + (3 \Omega)(-1 \text{ A} - (-2 \text{ A})) + 3 \text{ V} - (8 \Omega)(-2 \text{ A})$$

$$V_{Th} = 18.4 \text{ V}$$

Este mismo resultado se debe obtener si se decide calcular con el principio de superposición. El voltaje V_{Th} estará integrado por la contribución de cada una de las fuentes de voltaje y de corriente en el circuito. La ecuación y los valores con los que contribuye cada una de las fuentes se muestran a continuación. Se deja al estudiante comprobar estos resultados.

$$V_{Th} = V_{Th}^I + V_{Th}^{II} + V_{Th}^{III} + V_{Th}^{IV}$$

$$V_{Th} = 3 \text{ V} - 2 \text{ V} - 4.6 \text{ V} + 22 \text{ V}$$

$$V_{Th} = 18.4 \text{ V}$$

Paso 3. Para calcular la resistencia de Thévenin R_{Th} se deben eliminar las fuentes y calcular la resistencia en las terminales a y b . En la Figura 8.37 se muestra cómo queda el arreglo de resistencias sin fuentes para poder calcular la resistencia R_{Th} . Obsérvese que la resistencia R_1 queda conectada sólo de un extremo, por lo tanto, no está en serie ni en paralelo con ninguna otra resistencia y es por esta razón que no se incluye en el cálculo de la resistencia R_{Th} .

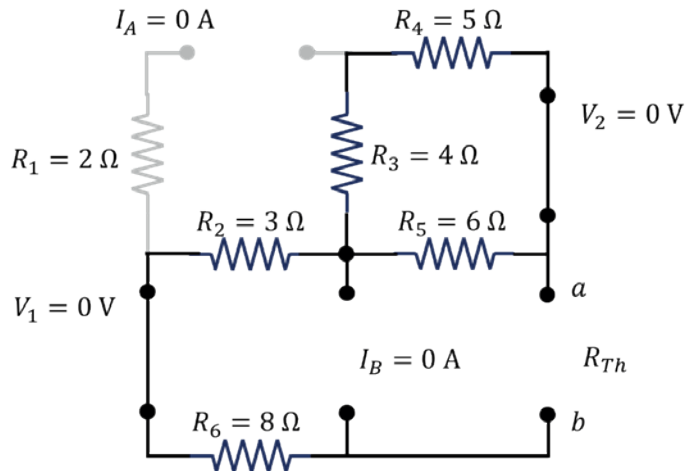


Figura 8.37. Circuito sin fuentes de alimentación para poder calcular la resistencia de Thévenin R_{Th} .

La resistencia de Thévenin resulta entonces.

$$R_{Th} = R_2 + R_6 + [(R_3 + R_4) \parallel R_5]$$

$$R_{Th} = 3 \Omega + 8 \Omega + \left[\frac{(4 \Omega + 5 \Omega)(6 \Omega)}{(4 \Omega + 5 \Omega) + 6 \Omega} \right]$$

$$R_{Th} = 14.6 \Omega$$

Paso 4. Con el voltaje y la resistencia calculados se construye el circuito equivalente de Thévenin de la Figura 8.38. El circuito que se tenía en la Figura 8.34 ha quedado reducido simplemente a una fuente de voltaje V_{Th} en serie con una resistencia R_{Th} y con la resistencia R_7 .

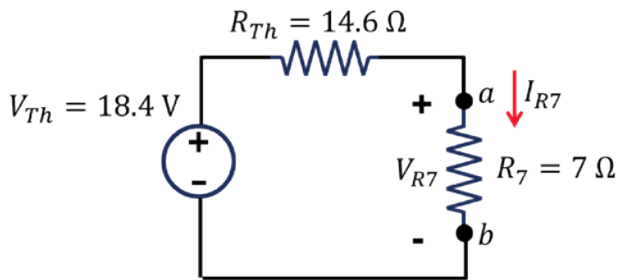


Figura 8.38. Circuito equivalente de Thévenin junto con la resistencia R_7 que se había retirado desde el principio del análisis.

La corriente y el voltaje de la resistencia R_7 se calculan con facilidad de la siguiente manera.

$$I_{R7} = \frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_7} = \frac{18.4 \text{ V}}{14.6 \Omega + 7 \Omega}$$

$$I_{R7} = 851.85 \text{ mA}$$

$$V_{R7} = (I_{R7})(R_7) = (0.85185 \text{ A})(7 \Omega)$$

$$V_{R7} = 5.96 \text{ V}$$

Ejemplo 8-5. Obtener el circuito equivalente de Thévenin visto desde las terminales de la resistencia R_3 . Utilizando el circuito equivalente de Thévenin calcular la corriente y el voltaje de la resistencia R_3 en el circuito de la Figura 8.39.

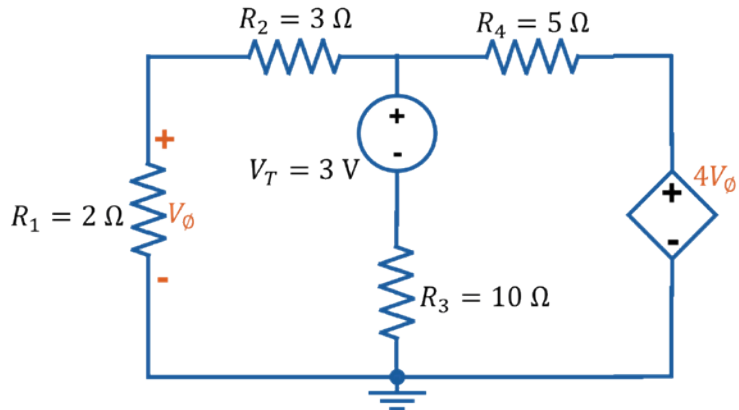


Figura 8.39. Circuito para obtener el circuito equivalente de Thévenin y para la resistencia R_3 .

Solución.

Se trata de un circuito en el que aparece una fuente de voltaje dependiente de voltaje. Se debe tener cuidado en no separar la fuente dependiente del elemento que la controla, en este caso el voltaje de R_1 con la polaridad indicada por V_ϕ .

Aplicamos los 4 pasos para obtener el circuito equivalente de Thévenin.

Paso 1. Retiramos la resistencia R_3 del circuito y marcamos las terminales tal como se muestra en la Figura 8.40.

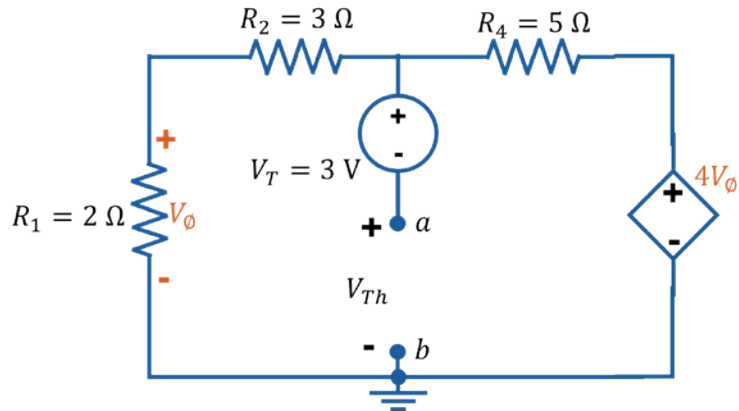


Figura 8.40. Marcado de las terminales después de retirar la resistencia R_3 .

Paso 2. Se resuelve el circuito de la Figura 8.40 para calcular el voltaje de Thévenin $R V_{Th}$. Ya que el circuito se encuentra abierto entre las terminales a y b , entonces la fuente de voltaje V_T sólo está conectada al circuito a través de la terminal positiva. Esto ocasiona que la fuente no esté conectada con ninguno de los elementos, ni en serie ni en paralelo y, por consiguiente, no fluye corriente a través de las resistencias. Al no haber corriente a través de las resistencias entonces tampoco existe caída de voltaje en ninguna de ellas, incluida la resistencia R_1 , y dado que la fuente dependiente necesita de ese voltaje, entonces la fuente dependiente también se encuentra con un valor nulo. En la Figura 8.41 y en la Figura 8.42 se muestran las ideas de corriente y voltaje nulos que tienen todos los elementos que integran el circuito y por lo tanto que se comporten como simples conductores.

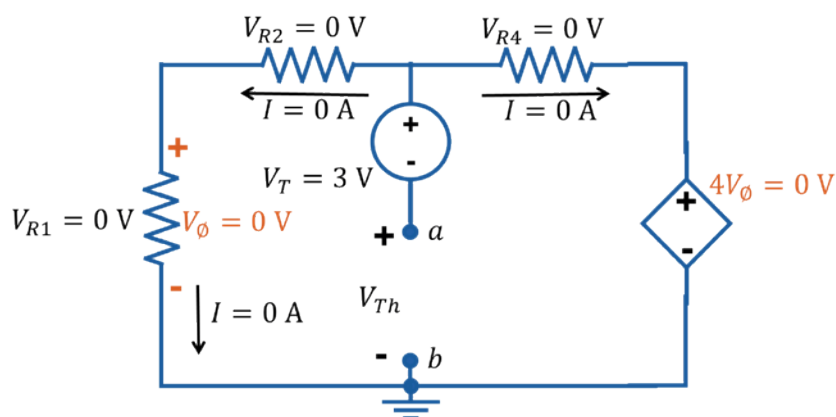


Figura 8.41. Corriente nula a través de todas las resistencias.

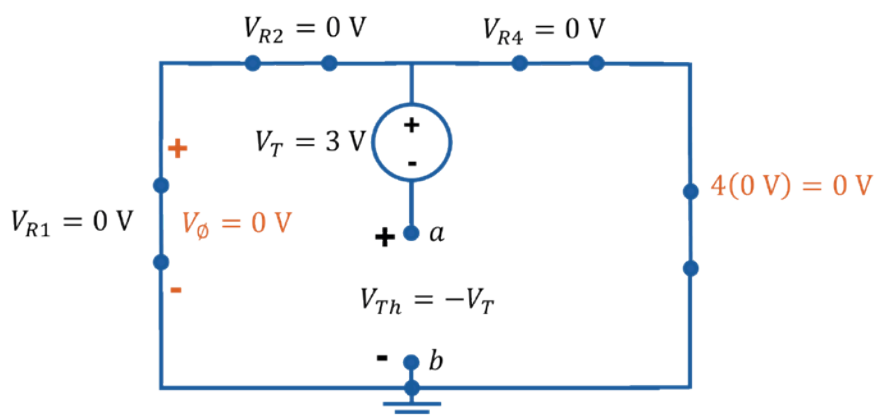


Figura 8.42. Voltajes nulos en todas las resistencias ocasiona que se comporten como simples conductores, incluida la fuente dependiente.

Ya que no existen caídas de tensión en ninguno de los elementos del circuito de la Figura 8.42, entonces al momento de medir el voltaje entre las terminales a y b el único voltaje que aparece es el voltaje V_T pero con polaridad invertida, tal como se observa en la ecuación (8.25).

$$V_{Th} = -V_T$$

$$V_{Th} = -3 \text{ V} \quad (8.25)$$

Paso 3. Ahora se debe calcular la resistencia de Thévenin R_{Th} , pero al tratarse de un circuito en el que está incluida una fuente dependiente, entonces se puede calcular de dos formas distintas, una es calculando la corriente de corto circuito (I_{cc}) entre las terminales a y b y otra es con una fuente de corriente unitaria ($I_u = 1 \text{ A}$).

Cálculo de R_{Th} utilizando la corriente de corto circuito (I_{cc})

Se colocan en corto circuito las terminales a y b para quedar como se aprecia en la Figura 8.43. A partir de este circuito, se calcula el valor de la corriente I_{cc} y, junto con el voltaje de Thévenin V_{Th} , se calcula la resistencia R_{Th} .

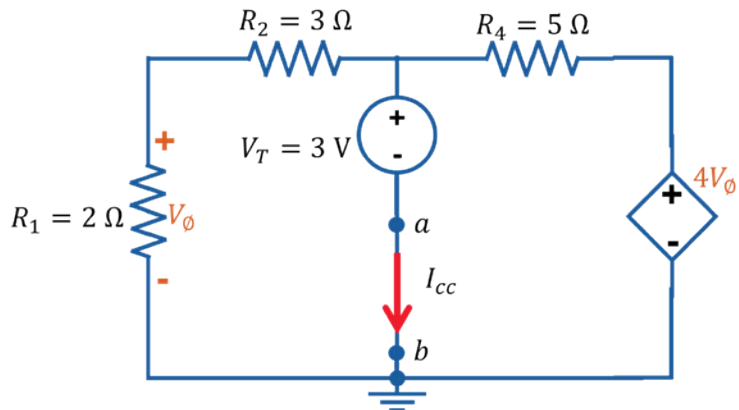


Figura 8.43. Corto circuito en las terminales a y b para calcular la corriente I_{cc} .

Para calcular la corriente I_{cc} se plantean las direcciones de las corrientes I_1 e I_2 , tal como se indica en la Figura 8.44.

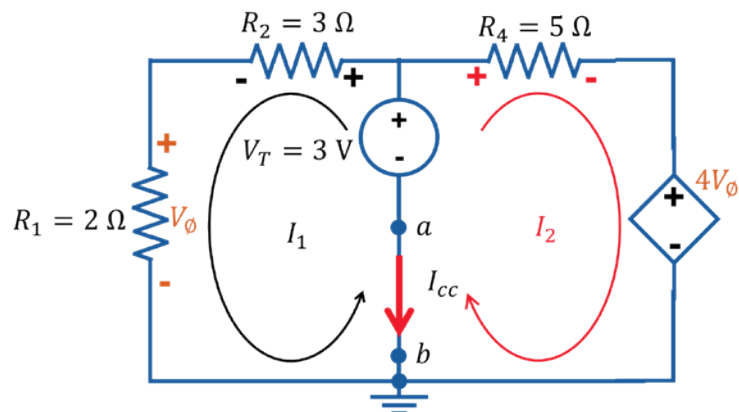


Figura 8.44. Planteamiento de las direcciones en las corrientes.

La dirección de la corriente I_1 se propuso en contra de las manecillas del reloj para que los signos del voltaje V_ϕ coincidan con los que esta corriente determina. Por lo tanto, para este circuito, y con las direcciones de las corrientes establecidas, la corriente I_{cc} queda definida con la ecuación (8.26).

$$I_{cc} = -(I_1 + I_2) \quad (8.26)$$

Se observa que las resistencias R_1 y R_2 están en serie y quedan conectadas en paralelo con la fuente V_T , por lo tanto, la corriente I_1 se calcula con la ley de Ohm. Con el valor de la corriente I_1 se calcula el voltaje V_ϕ y, por ende, se determina el valor de la fuente dependiente ($4V_\phi$) y la corriente I_2 .

Entonces, a partir de la Figura 8.44, la corriente I_1 queda definida de la siguiente manera.

$$I_1 = \frac{V_T}{R_1 + R_2} = \frac{3 \text{ V}}{2 \Omega + 3 \Omega}$$

$$I_1 = 0.6 \text{ A}$$

El voltaje V_ϕ queda entonces de la siguiente manera.

$$V_\phi = I_1 R_1 = (0.6 \text{ A})(2 \Omega)$$

$$V_\phi = 1.2 \text{ V}$$

La corriente I_2 queda definida de la siguiente manera.

$$I_2 = \frac{V_T - 4V_\phi}{R_4} = \frac{3 \text{ V} - 4(1.2 \text{ V})}{5 \Omega}$$

$$I_2 = -0.36 \text{ A}$$

Ya con los dos valores de las corrientes se sustituyen en la ecuación (8.26) resultando.

$$I_{cc} = -(I_1 + I_2) = -(0.6 \text{ A} + (-0.36 \text{ A}))$$

$$I_{cc} = -0.24 \text{ A}$$

Entonces para calcular la resistencia de Thévenin, se sustituye el voltaje de Thévenin V_{Th} y la corriente I_{cc} en la ecuación (8.1), resultando.

$$R_{Th} = \frac{V_{Th}}{I_{cc}} = \frac{-3 \text{ V}}{-0.24 \text{ A}}$$

$$R_{Th} = 12.5 \Omega$$

Cálculo de R_{Th} utilizando una fuente de corriente unitaria ($I_u = 1 \text{ A}$)

Se eliminan todas las fuentes independientes del circuito (las fuentes de voltaje se colocan en corto circuito y las fuentes de corriente se dejan en circuito abierto) como ocurre en el principio de superposición; sólo se dejan en el circuito las fuentes dependientes. Para calcular el valor de la resistencia de Thévenin R_{Th} con este procedimiento, se debe calcular el voltaje v que aparece entre las terminales a y b después de colocar una fuente de corriente unitaria ($I_u = 1 \text{ A}$), tal como se aprecia en la Figura 8.45.

La dirección de la corriente I_1 se propone igual que en el procedimiento anterior, es decir, en contra de las manecillas del reloj, para que los signos del voltaje V_ϕ coincidan también con los que esta corriente establece. En el circuito también aparecen las polaridades de los voltajes en las resistencias.

Para resolver el circuito y poder calcular el voltaje v se aplicará el análisis de mallas. Obsérvese que se produce una supermalla por la fuente de corriente entre las dos mallas.

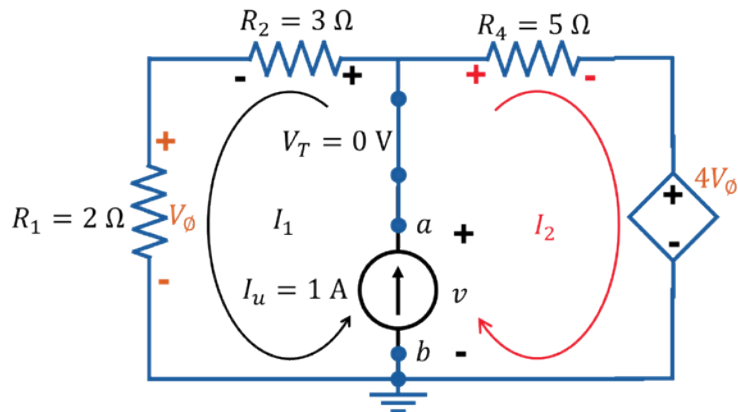


Figura 8.45. Circuito con fuente dependiente y con fuente unitaria de corriente para el cálculo de R_{Th} .

A partir de la Figura 8.45 se obtienen las ecuaciones del sistema resultando.

Para la fuente de corriente unitaria (condición de supermalla).

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= I_{cc} \\ I_1 + I_2 &= 1 \end{aligned} \quad (8.27)$$

El voltaje V_ϕ en términos de la corriente, resulta:

$$\begin{aligned} V_\phi &= I_1 R_1 \\ V_\phi &= 2I_1 \end{aligned}$$

Para la supermalla que se obtiene en el perímetro de todo el circuito resulta:

$$\begin{aligned}
 -I_1R_1 - I_1R_2 + I_2R_4 + 4V_\phi &= 0 \text{ V} \\
 -2I_1 - 3I_1 + 5I_2 + 4(2I_1) &= 0 \\
 3I_1 + 5I_2 &= 0
 \end{aligned} \tag{8.28}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones simultaneas que se forman con las ecuaciones (8.27) y (8.28) resulta:

$$I_1 = 2.5 \text{ A}$$

$$I_2 = -1.5 \text{ A}$$

El voltaje v se calcula utilizando la rama de las resistencias R_1 y R_2 , quedando:

$$v = I_1(R_1 + R_2)$$

$$v = (2.5 \text{ A})(2 \Omega + 3 \Omega)$$

$$v = 12.5 \text{ V}$$

De acuerdo entonces con la ecuación (8.2), la resistencia de Thévenin es igual al voltaje v , resultando:

$$R_{Th} = v = 12.5 \Omega$$

Paso 4. Con el voltaje y la resistencia de Thévenin se construye el circuito equivalente de Thévenin de la Figura 8.46. En este circuito ya se pueden calcular los valores de corriente y voltaje para R_3 .

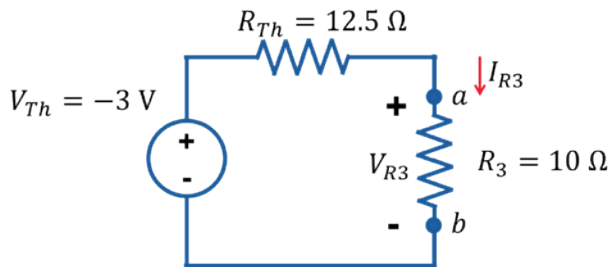


Figura 8.46. Circuito equivalente de Thévenin calculado a partir de un circuito con fuente dependiente.

A partir de la Figura 8.46, para calcular el voltaje de la resistencia R_3 utilizamos un divisor de voltaje y para calcular la corriente se utiliza la ley de Ohm.

$$V_{R3} = V_{Th} \left(\frac{R_3}{R_{Th} + R_3} \right) = (-3 \text{ V}) \left(\frac{10 \Omega}{12.5 \Omega + 10 \Omega} \right)$$

$$V_{R3} = -1.33 \text{ V}$$

$$I_{R3} = \frac{V_{R3}}{R_3} = \frac{-1.33 \text{ V}}{10 \Omega}$$

$$I_{R3} = -133.33 \text{ mA}$$

Se ha obtenido el circuito equivalente de Thévenin de un circuito en el que estaba incluida una fuente de voltaje dependiente de voltaje.

Para calcular la resistencia de Thévenin se utilizaron las dos formas posibles, la primera calculando la corriente de corto circuito I_{cc} , y la segunda utilizando una fuente de corriente unitaria $I_u = 1 \text{ A}$ (resuelto con mallas); para ambos procedimientos la resistencia resultó la misma.

Al utilizar la fuente de corriente unitaria ($I_u = 1 \text{ A}$) también se pudo haber calculado el voltaje v –y resuelto el problema– empleando el análisis de nodos; el resultado debe ser el mismo. Se deja al estudiante la tarea de comprobar estos resultados aplicando el análisis con nodos en el circuito de la Figura 8.47.

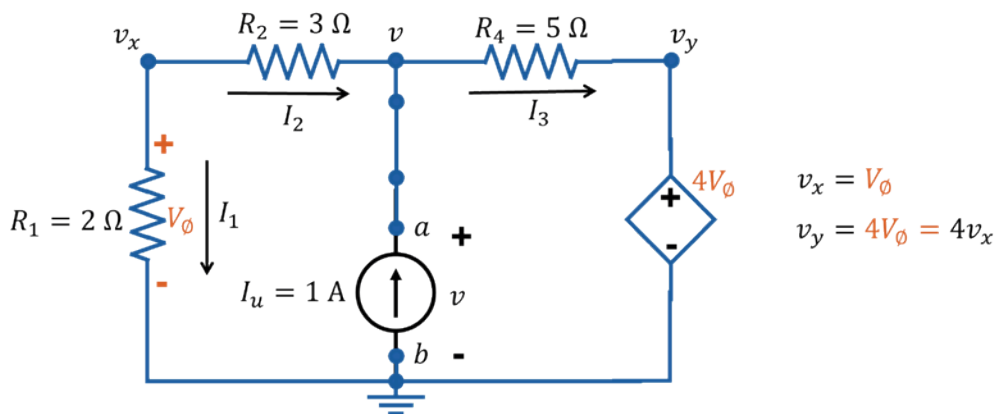


Figura 8.47. Circuito para calcular los voltajes de nodo v , con ello, la resistencia de Thévenin.

TEOREMA DE NORTON

En 1926 Edward Lawry Norton presentó un informe técnico en los Laboratorios Bell donde mencionaba la utilidad que tenía emplear un circuito equivalente con una fuente de corriente equivalente. En ese mismo año, Hans Ferdinand Mayer publicó el mismo resultado que Norton y lo detalló completamente, sin embargo, es a Edward Norton a quien se le atribuye este teorema (Johnson, 2003a).

El teorema de Norton establece que cualquier circuito eléctrico lineal se puede sustituir por un circuito equivalente, a partir de dos terminales a y b cualesquiera, y por una fuente de corriente en paralelo con una resistencia. Para obtener el circuito equivalente de Norton básicamente se deben calcular dos valores, la corriente de Norton I_N y la resistencia de Norton R_N .

Por lo tanto, los pasos para obtener el circuito equivalente de Norton son semejantes que para obtener el circuito equivalente de Thévenin, sólo que en lugar de calcular el voltaje de Thévenin V_{Th} se calcula la corriente de Norton I_N .

A continuación, se resumen los cuatro pasos para calcular estos valores y poder construir el circuito equivalente de Norton.

Pasos para implementar el Teorema de Norton

Paso 1.

Retirar el elemento o la parte del circuito que se desea analizar

Se retira el elemento o los elementos que se desean analizar y las terminales que quedaron abiertas se identifican con las letras a y b .

Si en el circuito están presentes fuentes dependientes, se debe tener cuidado de no separar la fuente dependiente de la corriente o el voltaje que la controla, de lo contrario, no se podrá obtener el circuito equivalente de Norton.

Paso 2.

Calcular la corriente de Norton I_N

Se colocan en corto circuito las terminales a y b para calcular la corriente que circula a través de ellas y a la cual llamaremos corriente de Norton I_N , tal como se muestra en la Figura 8.48.

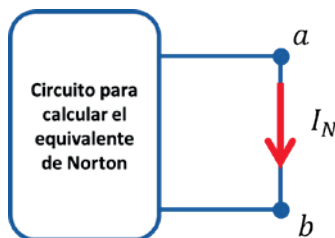


Figura 8.48. Forma de colocar en corto circuito las terminales para calcular la corriente de Norton I_N .

Para resolver el circuito y poder calcular la corriente de Norton I_N , se utilizará cualquiera de los métodos ya estudiados, es decir, análisis de circuitos en serie, paralelo, mixtos, estrella, delta, análisis de mallas, nodos, superposición, transformación de fuentes, incluso se podrá aplicar nuevamente el teorema de Thévenin o Norton.

Paso 3.

Calcular la resistencia de Norton R_N

La resistencia de Norton R_N se calcula entre las terminales a y b . Para ello, primero se hacen cero todas las fuentes independientes del circuito. Las fuentes de voltaje son sustituidas por un corto circuito, mientras que las fuentes de corriente se sustituyen por un circuito abierto, tal como se indica en la Figura 8.49a y b. Entonces,

entre las terminales a y b , con las fuentes anuladas, se calcula la resistencia equivalente de Norton R_N .

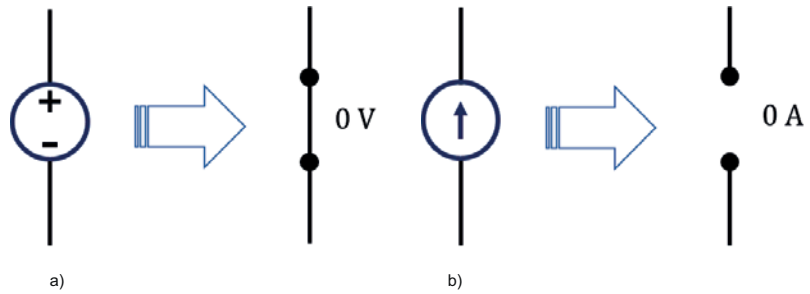


Figura 8.49. Forma de sustituir las fuentes para el cálculo de la resistencia de Norton R_N . a) La fuente de voltaje se sustituye por un corto circuito y b) la fuente de corriente se sustituye por un circuito abierto.

Cuando en el circuito existen fuentes dependientes, la resistencia de Norton R_N se podrá calcular de dos formas distintas:

- La primera forma consiste en regresar las fuentes a su estado original y dejar abiertas las terminales a y b para calcular el voltaje de circuito abierto V_{ab} que aparece entre las terminales, tal como se indica en la Figura 8.50. Con ese valor de voltaje y con la corriente de Norton I_N se podrá calcular la resistencia de Norton R_N , tal como se indica en la ecuación (8.29).

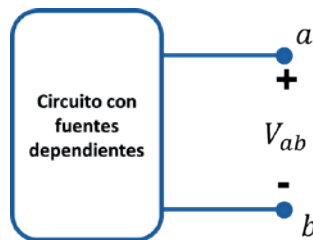


Figura 8.50. Forma de medir el voltaje en las terminales a y b para calcular el voltaje en el circuito V_{ab} . Este cálculo se realiza con todas las fuentes en su estado original.

$$R_N = \frac{V_{ab}}{I_N} \quad (8.29)$$

- La segunda forma para calcular la resistencia de Norton R_N cuando hay fuentes dependientes en el circuito consiste en hacer cero todas las fuentes independientes y utilizar una fuente auxiliar que se conectará en las terminales a y b del circuito. La fuente será una fuente de corriente de valor unitario ($I_u = 1 A$) conectada a las terminales a y b , tal como se indica en la Figura 8.51.

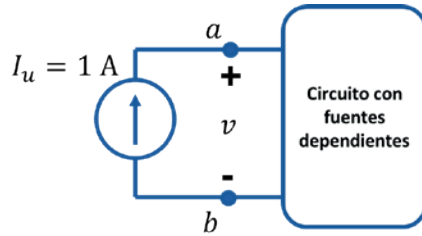


Figura 8.51. Forma de conectar la fuente de corriente de valor unitario I_u para calcular R_N .

Se calcula el voltaje v y éste será directamente el valor de la resistencia de Norton R_N . Esto se debe a que se divide entre el valor de la fuente de corriente unitaria I_u , y con esto los volts se transforman en ohms tal como se indica en la ecuación (8.2).

$$R_N = \frac{v}{I_u} = \frac{v}{1 \text{ A}}$$

$$\therefore R_{Th} = v \ \Omega \quad (8.30)$$

Paso 4.

Construir el circuito equivalente de Norton

Con los valores de resistencia y corriente de Norton (R_N, I_N) construir el circuito equivalente tal como se muestra en la Figura 8.1b. Se regresa el elemento o los elementos que se retiraron en el primer paso y se continúa con el análisis original del problema. Es decir, se calcula la corriente, el voltaje o la potencia que se pide en el elemento o la porción del problema que se había retirado desde el principio.

ANÁLISIS DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS UTILIZANDO EL TEOREMA DE NORTON

Se resolverán nuevamente los ejemplos ya resueltos con el teorema de Thévenin, pero únicamente para calcular la corriente de Norton (Paso 2.º) y para construir el circuito equivalente de Norton (Paso 4.º) ya que los otros dos pasos son iguales para el cálculo del circuito equivalente de Thévenin.

Ejemplo 8-6. Resolver el circuito del **Ejemplo 8-1** para obtener el circuito equivalente de Norton visto desde las terminales de la resistencia R_5 .

Los valores que se obtuvieron del circuito equivalente de Thévenin fueron $V_{Th} = 11 \text{ V}$ y $R_{Th} = 15 \Omega$; por consiguiente, la corriente de Norton deberá ser.

$$I_N = \frac{V_{Th}}{R_{Th}} = \frac{11 \text{ V}}{15 \Omega} = 733.33 \text{ mA}$$

Solución.

Paso 2. En la Figura 8.52 se muestra el circuito con las terminales a y b en corto circuito para comenzar con la obtención del circuito equivalente de Norton.

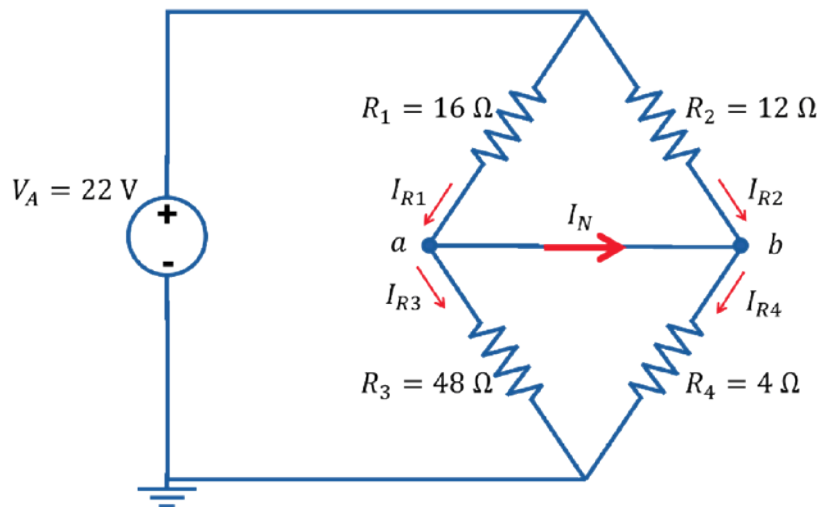


Figura 8.52. Circuito para obtener la corriente de Norton retirando la resistencia R_5 .

La corriente de Norton I_N se puede calcular con facilidad aplicando la ley de corrientes de Kichhoff en cualquiera de los nodos de las terminales a o b con las ecuaciones (8.31) o (8.32).

$$I_N = I_{R1} - I_{R3} \quad (8.31)$$

$$I_N = I_{R4} - I_{R2} \quad (8.32)$$

Para conseguirlo, primero observamos en la Figura 8.52 que las resistencias R_1 y R_2 , así como las resistencias R_3 y R_4 , quedaron conectadas en paralelo al colocar el corto circuito entre las terminales a y b . Por lo tanto, se pueden reducir a una sola resistencia cada par de ellas resultando el circuito de la Figura 8.53.

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{(16 \Omega)(12 \Omega)}{16 \Omega + 12 \Omega} = 6.857 \Omega$$

$$R_{34} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = \frac{(48 \Omega)(4 \Omega)}{48 \Omega + 4 \Omega} = 3.692 \Omega$$

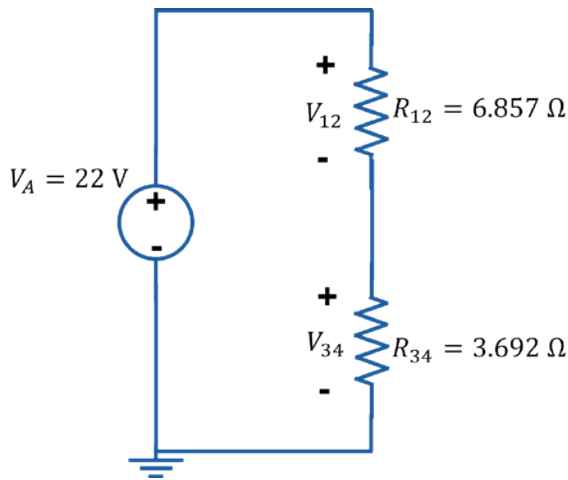


Figura 8.53. Simplificación de resistencias para calcular los voltajes y después las corrientes.

Se calcula el voltaje de cada resistencia equivalente, y cada voltaje será el mismo para las dos resistencias que se encuentran en paralelo.

$$V_{12} = V_A \left(\frac{R_{12}}{R_{12} + R_{34}} \right) = (22 \text{ V}) \left(\frac{6.857 \Omega}{6.857 \Omega + 3.692 \Omega} \right)$$

$$V_{12} = 14.3 \text{ V}$$

$$V_{34} = V_A \left(\frac{R_{34}}{R_{12} + R_{34}} \right) = (22 \text{ V}) \left(\frac{3.692 \Omega}{6.857 \Omega + 3.692 \Omega} \right)$$

$$V_{34} = 7.7 \text{ V}$$

La corriente en las resistencias R_1 y R_3 resultan:

$$I_{R1} = \frac{V_{12}}{R_1} = 893.75 \text{ mA}$$

$$I_{R3} = \frac{V_{34}}{R_3} = 160.41 \text{ mA}$$

Aplicando la ecuación (8.31) se tiene:

$$I_N = I_{R1} - I_{R3} = 893.75 \text{ mA} - 160.41 \text{ mA}$$

$$I_N = 733.33 \text{ mA}$$

Paso 4. La corriente de Norton I_N coincide con el valor que se calculó con el voltaje y la resistencia de Thévenin, por lo tanto, el circuito equivalente de Norton es el que se muestra en la Figura 8.54.

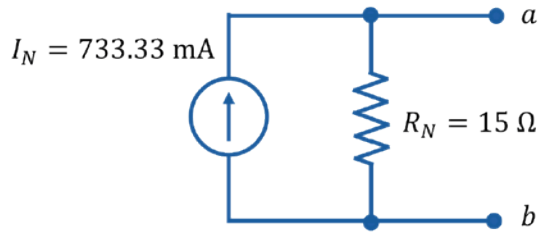


Figura 8.54. Circuito equivalente de Norton del **Ejemplo 8-1**.

Ejemplo 8-7. Resolver el circuito del **Ejemplo 8-2** para obtener el circuito equivalente de Norton visto desde las terminales de la resistencia R_L .

Los valores que se obtuvieron del circuito equivalente de Thévenin fueron $V_{Th} = 6\text{ V}$ y $R_{Th} = 10\text{ k}\Omega$, por consiguiente, la corriente de Norton deberá ser:

$$I_N = \frac{V_{Th}}{R_{Th}} = \frac{6\text{ V}}{10\text{ k}\Omega} = 600\text{ }\mu\text{A}$$

Solución.

Paso 2. En la Figura 8.55 se muestra el circuito con las terminales a y b en corto circuito para comenzar con la obtención del circuito equivalente de Norton.

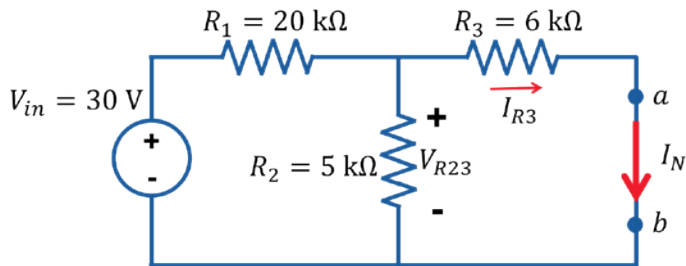


Figura 8.55. Circuito para obtener la corriente de Norton retirando la resistencia R_5 .

La corriente de Norton I_N es la que circula a través de la resistencia R_3 y se puede calcular con facilidad determinando primero el voltaje V_{R23} .

$$I_N = I_{R3} \quad (8.33)$$

Para conseguirlo, primero observamos en la Figura 8.55 que las resistencias R_2 y R_3 quedaron conectadas en paralelo al colocar el corto circuito entre las terminales a y b . Por lo tanto, se pueden reducir a una sola resistencia, resultando el circuito de la Figura 8.56.

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{(5\text{ k}\Omega)(6\text{ k}\Omega)}{5\text{ k}\Omega + 6\text{ k}\Omega} = 2.72\text{ k}\Omega$$

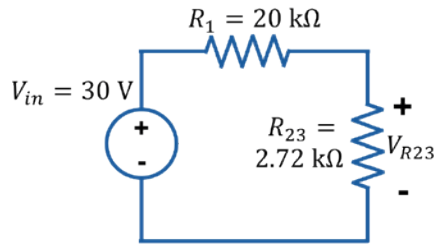


Figura 8.56. Simplificación de resistencias para calcular el voltaje y después la corriente I_N .

Se calcula el voltaje de la resistencia equivalente y el voltaje será el mismo para las dos resistencias que se encuentran en paralelo.

$$V_{R23} = V_{in} \left(\frac{R_{23}}{R_1 + R_{23}} \right) = (30 \text{ V}) \left(\frac{2.72 \text{ k}\Omega}{20 \text{ k}\Omega + 2.72 \text{ k}\Omega} \right)$$

$$V_{R23} = 3.6 \text{ V}$$

La corriente en las resistencias R_3 resulta:

$$I_{R3} = \frac{V_{R23}}{R_3} = 600 \mu\text{A}$$

Paso 4. La corriente de Norton I_N coincide con el valor que se calculó con el voltaje y la resistencia de Thévenin, por lo tanto, el circuito equivalente de Norton es el que se muestra en la Figura 8.57.

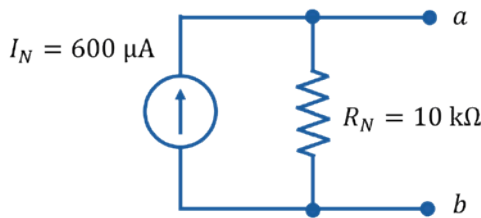


Figura 8.57. Circuito equivalente de Norton del **Ejemplo 8-2**.

Ejemplo 8-8. Resolver el circuito del **Ejemplo 8-3** para obtener el circuito equivalente de Norton visto desde las terminales de la resistencia R_L .

Los valores que se obtuvieron del circuito equivalente de Thévenin fueron $V_{Th} = 7 \text{ V}$ y $R_{Th} = 5 \Omega$, por consiguiente, la corriente de Norton deberá ser:

$$I_N = \frac{V_{Th}}{R_{Th}} = \frac{7 \text{ V}}{5 \Omega} = 1.4 \text{ A}$$

Solución.

Paso 2. En la Figura 8.58 se muestra el circuito con las terminales a y b en corto circuito para comenzar con la obtención del circuito equivalente de Norton.

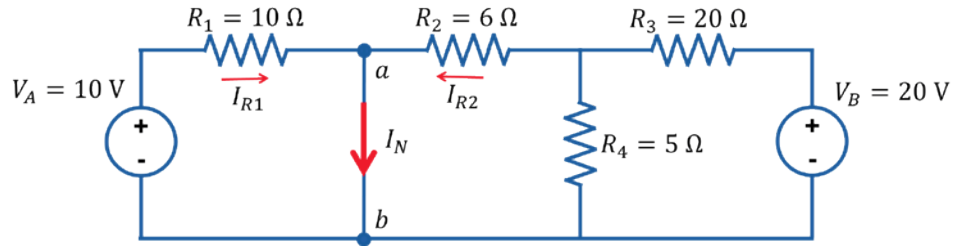


Figura 8.58. Circuito para obtener la corriente de Norton retirando la resistencia R_5 .

La corriente de Norton I_N se puede calcular con facilidad aplicando la ley de corrientes de Kichhoff en la terminal a con la ecuación (8.34).

$$I_N = I_{R1} + I_{R2} \quad (8.34)$$

Observamos de la Figura 8.58 que la corriente I_{R1} se puede calcular simplemente aplicando la ley de Ohm, resultando:

$$I_{R1} = \frac{V_A}{R_1} = \frac{10 \text{ V}}{10 \Omega} = 1 \text{ A}$$

La forma más rápida para calcular la corriente I_{R2} es aplicando la transformación de fuentes a la fuente V_B hasta dejar una fuente de voltaje con una resistencia conectadas en serie con la resistencia R_2 . A continuación, se muestra este proceso de transformaciones de fuente de la Figura 8.59 a la Figura 8.61.

A partir de la Figura 8.58 se calcula la fuente de corriente I_B con la resistencia R_3 en paralelo para quedar como se aprecia en la Figura 8.59.

$$I_B = \frac{V_B}{R_3} = \frac{20 \text{ V}}{20 \Omega} = 1 \text{ A}$$

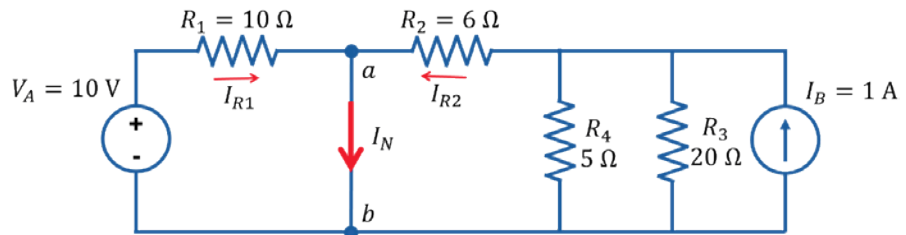


Figura 8.59. Fuente de voltaje transformada en fuente de corriente.

Se simplifican las resistencias R_3 y R_4 en paralelo para dejar una sola resistencia equivalente como se muestra en la Figura 8.60.

$$R_{34} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = \frac{(20 \Omega)(5 \Omega)}{20 \Omega + 5 \Omega} = 4 \Omega$$

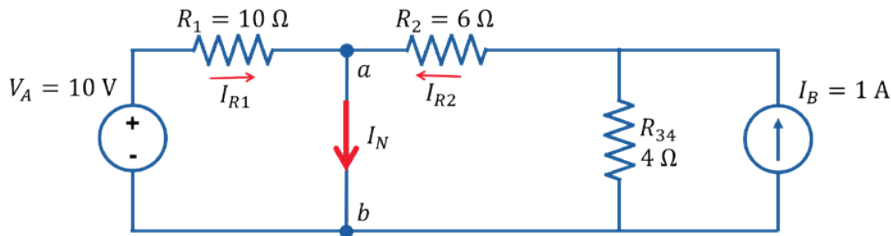


Figura 8.60. Simplificación de las resistencias R_3 y R_4 en paralelo.

Ahora se vuelve a transformar la fuente de corriente y la resistencia equivalente en una fuente de voltaje con una resistencia en serie resultando el circuito de la Figura 8.61.

$$V_{B'} = I_B R_{34} = (1 \text{ A})(4 \Omega) = 4 \text{ V}$$

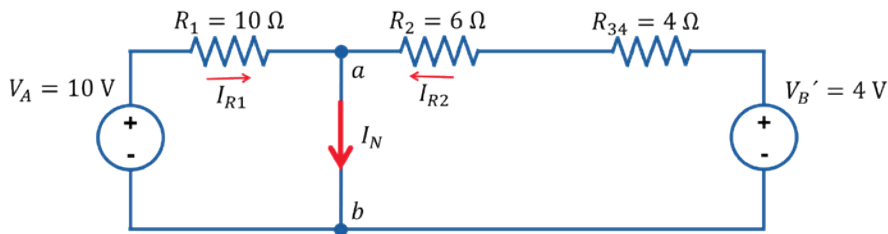


Figura 8.61. Fuente de corriente transformada en fuente de voltaje.

Observamos de la Figura 8.61 que la corriente I_{R2} se puede calcular simplemente aplicando la ley de Ohm, resultando:

$$I_{R2} = \frac{V_{B'}}{R_1 + R_{34}} = \frac{4 \text{ V}}{10 \Omega} = 0.4 \text{ A}$$

Aplicando la ecuación (8.34) la corriente de Norton resulta:

$$I_N = I_{R1} + I_{R2} = 1 \text{ A} + 0.4 \text{ A}$$

$$I_N = 1.4 \text{ A}$$

Paso 4. La corriente de Norton I_N coincide con el valor que se calculó con el voltaje y la resistencia de Thévenin, por lo tanto, el circuito equivalente de Norton es el que se muestra en la Figura 8.62.

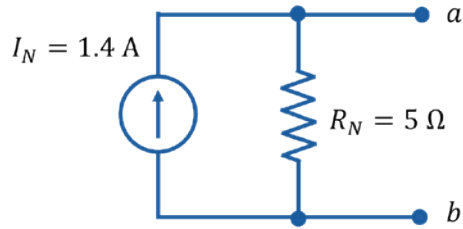


Figura 8.62. Circuito equivalente de Norton del **Ejemplo 8-3**.

Ejemplo 8-9. Resolver el circuito del **Ejemplo 8-4** para obtener el circuito equivalente de Norton visto desde las terminales de la resistencia R_7 (Flores-Oropeza, 2017a).

Los valores que se obtuvieron del circuito equivalente de Thévenin fueron $V_{Th} = 18.4V$ y $R_{Th} = 14.6\Omega$ por consiguiente, la corriente de Norton deberá ser:

$$I_N = \frac{V_{Th}}{R_{Th}} = \frac{18.4 V}{14.6 \Omega} = 1.26 A$$

Solución.

Paso 2. En la Figura 8.63 se muestra el circuito con las terminales a y b en corto circuito para comenzar con la obtención de la corriente de Norton.

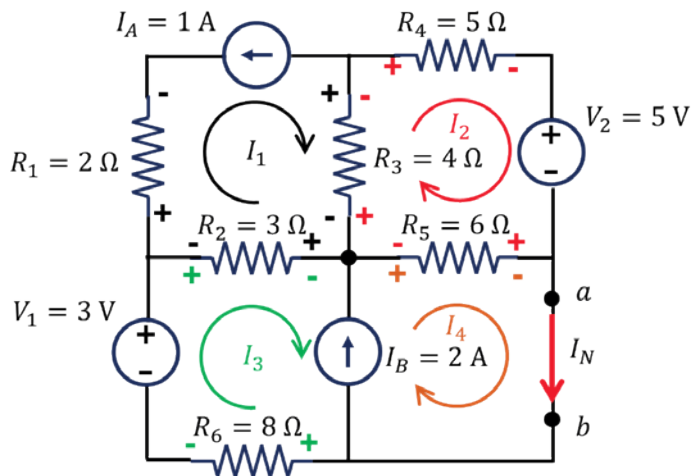


Figura 8.63. Circuito para obtener la corriente de Norton entre las terminales a y b .

Observar en el circuito de la Figura 8.63 que, si se resuelve utilizando el análisis con mallas, se pueden establecer las siguientes afirmaciones:

- La corriente de Norton I_N es igual que la corriente de malla I_4 ; así queda expresado en la ecuación (8.35).

$$I_N = I_4 \quad (8.35)$$

- Se trata de un circuito que tiene cuatro mallas, pero sólo resultará un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas porque en la malla de (I_1) la corriente ya está definida.
- La corriente I_1 es el negativo de la fuente de corriente I_A .

$$I_1 = -I_A = -1 \text{ A}$$

- Se tiene la fuente de corriente I_B entre dos mallas (I_3 e I_4), por lo tanto, se produce una supermalla cuya condición se establece en la ecuación (8.36) y se debe incluir en el sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} I_B &= I_4 - I_3 \\ -I_3 + I_4 &= 2 \text{ A} \end{aligned} \quad (8.36)$$

- En el circuito se pueden construir dos supermallas ($R_2 R_5 R_6 V_1$ y $R_2 R_3 R_4 V_2 R_6 V_1$) de las cuales al menos una se debe incluir para resolver el sistema de ecuaciones.

Una vez analizadas las características del circuito, a continuación se obtienen las ecuaciones de las mallas, aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff.

Para la malla de I_2 se tiene:

$$-(4 \Omega)I_1 + (15 \Omega)I_2 - (6 \Omega)I_4 = -5 \text{ V}$$

Pero $I_1 = -1 \text{ A}$, entonces resulta.

$$(15 \Omega)I_2 - (6 \Omega)I_4 = -9 \text{ V} \quad (8.37)$$

Para la supermalla $R_2 R_5 R_6 V_1$ se tiene:

$$-(3 \Omega)I_1 - (6 \Omega)I_2 + (11 \Omega)I_3 + (6 \Omega)I_4 = 3 \text{ V}$$

Pero $I_1 = -1 \text{ A}$, entonces resulta.

$$-(6 \Omega)I_2 + (11 \Omega)I_3 + (6 \Omega)I_4 = 0 \text{ V} \quad (8.38)$$

Se agrupan las ecuaciones (8.36), (8.37) y (8.38) para formar un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas para resolverlo y obtener la corriente de Norton (I_4). Por facilidad en los cálculos, se omiten las unidades en las ecuaciones.

$$\begin{aligned}
 -I_3 + I_4 &= 2 & Ec(I) \\
 15I_2 - 6I_4 &= -9 & Ec(II) \\
 -6I_2 + 11I_3 + 6I_4 &= 0 & Ec(III)
 \end{aligned}$$

En la Figura 8.64 se muestra cómo se resuelve el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas con la *app System of Linear Equations Solver*.

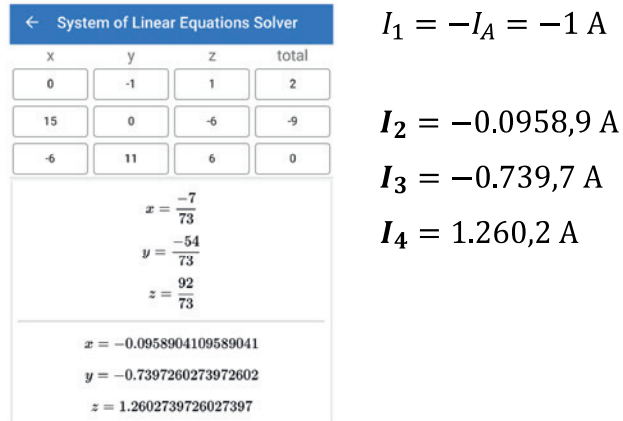


Figura 8.64. *App System of Linear Equations Solver* para resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

Aplicando la ecuación (8.35) la corriente de Norton resulta:

$$\begin{aligned}
 I_N &= I_4 \\
 I_N &= 1.260,2 \text{ A}
 \end{aligned}$$

Paso 4. La corriente de Norton I_N coincide con el valor que se calculó con el voltaje y la resistencia de Thévenin, por lo tanto, el circuito equivalente de Norton es el que se muestra en la Figura 8.65.

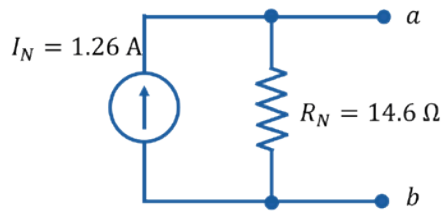


Figura 8.65. Circuito equivalente de Norton del **Ejemplo 8-4**.

Ejemplo 8-10. Resolver el circuito del **Ejemplo 8-5** para obtener el circuito equivalente de Norton visto desde las terminales de la resistencia R_3 .

Los valores que se obtuvieron del circuito equivalente de Thévenin fueron $V_{Th} = -3 \text{ V}$ y $R_{Th} = 12.5 \Omega$ por consiguiente la corriente de Norton deberá ser:

$$I_N = \frac{V_{Th}}{R_{Th}} = \frac{-3 \text{ V}}{12.5 \Omega} = -0.24 \text{ A}$$

Solución.

Paso 2. En la Figura 8.66 se muestra el circuito con las terminales a y b en corto circuito para comenzar con la obtención de la corriente de Norton. Sin embargo, cuando este ejemplo se resolvió para calcular la resistencia de Thévenin, en uno de los métodos utilizados se calculó la corriente de corto circuito I_{cc} entre las terminales a y b (que, en esencia, es la corriente de Norton I_N). Por lo tanto, la corriente de Norton I_N ya fue calculada también, sólo que bajo otro concepto dentro del análisis con el teorema de Thévenin, resultando $I_{cc} = -0.24 \text{ A}$.

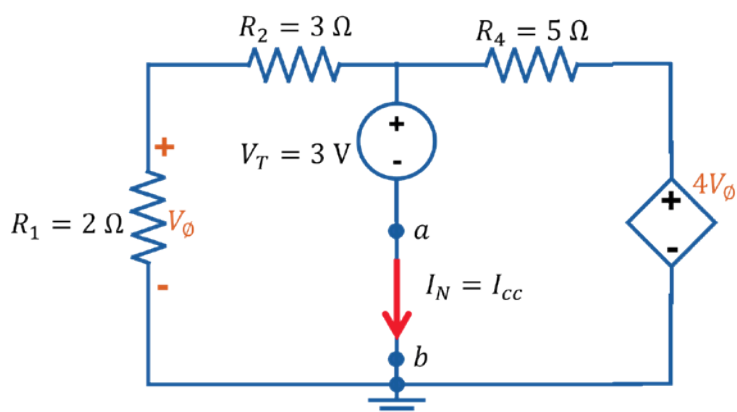


Figura 8.66. Circuito en el que se observa que la corriente de Norton I_N y la corriente de corto circuito I_{cc} para el teorema de Thévenin son iguales.

Paso 4. Por lo tanto, se puede construir directamente el circuito equivalente de Norton, ya que los parámetros necesarios están calculados.

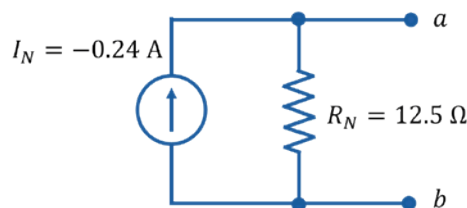


Figura 8.67. Circuito equivalente de Norton del **Ejemplo 8-5**.

TEOREMA DE THÉVENIN VS TEOREMA DE NORTON

Para efectos de análisis de circuitos eléctricos, aplicar el teorema de Thévenin o el teorema de Norton es prácticamente lo mismo. Existirán, por supuesto, problemas en los que el uso de un teorema u otro resultará mucho más sencillo y rápido. Sin embargo, en esencia, si se obtiene uno de ellos, el otro podrá lograrse de forma inmediata, debido a la gran similitud de cálculos que tienen entre sí.

Las semejanzas que se pueden encontrar entre ambos teoremas se enlistan a continuación:

- La resistencia de Norton R_N es la misma que la resistencia de Thévenin R_{Th} y se calculan exactamente de la misma manera.
- La corriente de Norton I_N es la misma que la corriente de corto circuito I_{cc} en el teorema de Thévenin cuando se tienen fuentes dependientes.
- El voltaje de Thévenin V_{Th} es el mismo que el voltaje de circuito abierto V_{ab} en el teorema de Norton cuando se tienen fuentes dependientes.
- Si se tiene el circuito equivalente de Thévenin, mediante una transformación de fuentes se puede obtener directamente el circuito equivalente de Norton y viceversa (Figura 8.68).

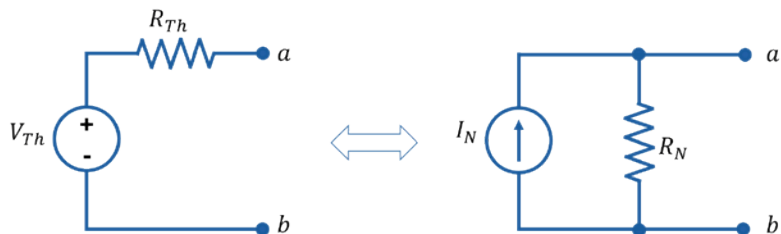


Figura 8.68. Equivalencia entre circuito equivalente de Thévenin y circuito equivalente de Norton.

$$R_{Th} = R_N \quad (8.39)$$

$$V_{Th} = I_N R_N \quad (8.40)$$

$$I_N = \frac{V_{Th}}{R_{Th}} \quad (8.41)$$

RESUMEN Y CONCLUSIÓN

Se ha presentado el teorema de Thévenin y el teorema de Norton para el análisis de circuitos eléctricos. Ambos teoremas se pueden aplicar para analizar cualquier tipo de circuito eléctrico; sin importar la forma de conexión y cantidad de componentes, siempre se podrá reducir a una fuente de voltaje con una resistencia en serie (teorema de Thévenin) o a una fuente de corriente en paralelo con una resistencia (teorema de Norton).

Para obtener los circuitos equivalentes se propusieron cuatro pasos con los que sistemáticamente se pueden obtener los paráme-

tros necesarios para su construcción. Se han resuelto y explicado 5 ejemplos para obtener el circuito equivalente de Thévenin y los mismos 5 ejemplos se han complementado para obtener el circuito equivalente de Norton. En los ejemplos se incluyeron fuentes de voltaje, de corriente, fuentes dependientes y resistencias en distintos tipos de conexiones para tratar de abarcar la mayor cantidad posible de casos.

Se pudo apreciar que, para aplicar tanto el teorema de Thévenin como el teorema de Norton, es necesario tener los conocimientos del resto de métodos para resolver circuitos eléctricos, ya que son parte de las herramientas para poder simplificar los circuitos y obtener los circuitos equivalentes. En especial, en el **Ejemplo 8-3** y en el **Ejemplo 8-4** se hacen análisis de cuál procedimiento utilizar para resolver el circuito y poder calcular con mayor efectividad el voltaje de Thévenin. En particular, en el **Ejemplo 8-3** se utilizan todos los métodos estudiados hasta el momento para poder calcular el voltaje de Thévenin y mostrar al estudiante la ventaja de utilizar uno u otro. Además, en cada uno de los ejemplos se fue explicando cada uno de los pasos para reducir el circuito hasta llegar a un circuito de una resistencia y una fuente. En cada ejemplo se fueron redibujando los circuitos para apoyar las explicaciones. Al final de cada ejemplo se incluyeron algunos comentarios donde se explicó la relevancia de utilizar el teorema de Thévenin o el teorema de Norton.

PROBLEMAS PROPUESTOS

A continuación, se proponen una serie de problemas para resolver utilizando el teorema de Thévenin o el teorema de Norton en el elemento o grupo de elementos indicados en el circuito.

Prob. 8.1. Obtener el circuito equivalente de Thévenin o Norton visto por las terminales de la resistencia R_3 en el circuito de la Figura 8.69.

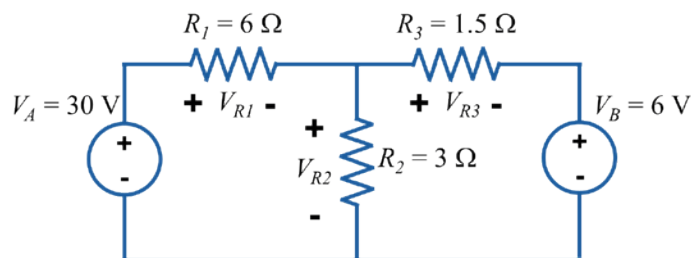


Figura 8.69.

(Sol. $V_{th} = 4 \text{ V}$, $R_{th} = 2 \text{ } \Omega$ y $I_N = 2 \text{ A}$).

Prob. 8.2. Obtener el circuito equivalente de Thévenin o Norton visto por las terminales de la resistencia de $6\ \Omega$ en el circuito de la Figura 8.70.

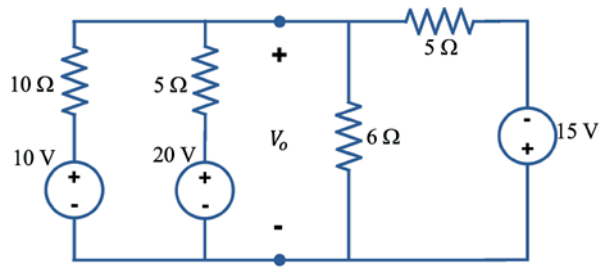


Figura 8.70.

(Sol. $V_{Th} = 4\text{ V}$, $R_{Th} = 2\ \Omega$ y $I_N = 2\text{ A}$).

Prob. 8.3. Obtener el circuito equivalente de Thévenin o Norton visto por las terminales de la resistencia R_3 en el circuito de la Figura 8.71.

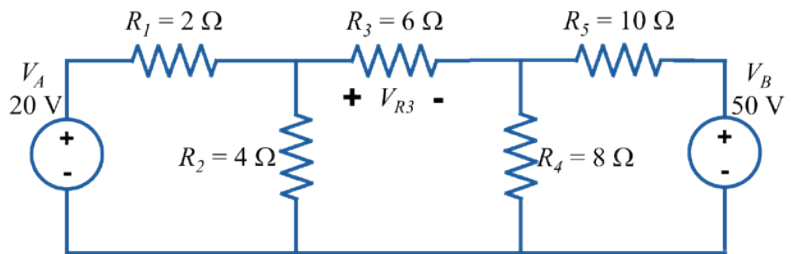


Figura 8.71.

(Sol. $V_{Th} = -8.88\text{ V}$, $R_{Th} = 5.77\ \Omega$ y $I_N = -1.53\text{ A}$).

Prob. 8.4. Obtener el circuito equivalente de Thévenin o Norton visto por las terminales de la resistencia de $2\ \Omega$ y calcular la corriente I_o en el circuito de la Figura 8.72.

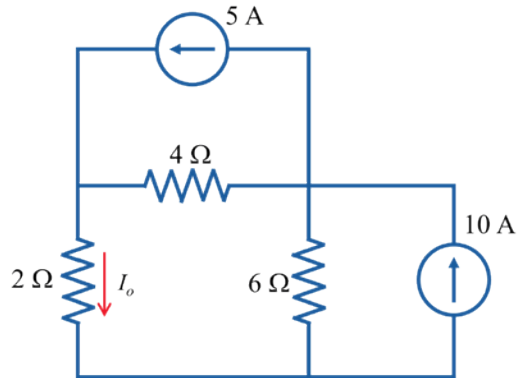


Figura 8.72.

(Sol. $V_{Th} = 80\text{ V}$, $R_{Th} = 10\ \Omega$, $I_N = 8\text{ A}$, $I_o = 6.666\text{ A}$).

Prob. 8.5. Obtener el circuito equivalente de Thévenin o Norton visto por las terminales de la resistencia de $1\ \Omega$ en el circuito de la Figura 8.73.

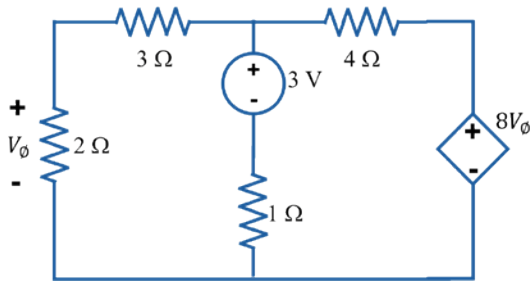


Figura 8.73.

(Sol. $V_{Th} = -3\text{ V}$, $R_{Th} = -2.857\ \Omega$ y $I_N = 1.05\text{ A}$).

Prob. 8.6. Obtener el circuito equivalente de Thévenin o Norton visto por las terminales de la resistencia de $18\ \Omega$ para calcular el voltaje V_o en el circuito de la Figura 8.74.

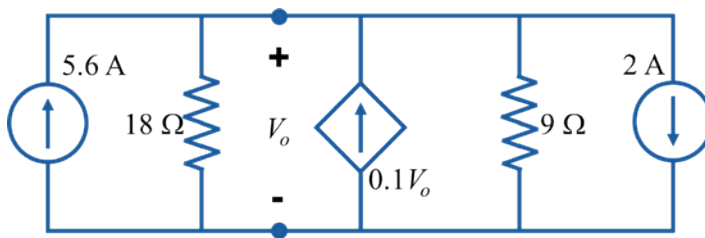


Figura 8.74.

(Sol. $V_{Th} = 324\text{ V}$, $R_{Th} = 90\ \Omega$, $I_N = 3.6\text{ A}$ y $V_o = 54\text{ V}$).

Prob. 8.7. Obtener el circuito equivalente de Thévenin o Norton visto por las terminales de la resistencia de $6\text{ k}\Omega$ para calcular el voltaje V_o en el circuito de la Figura 8.75.

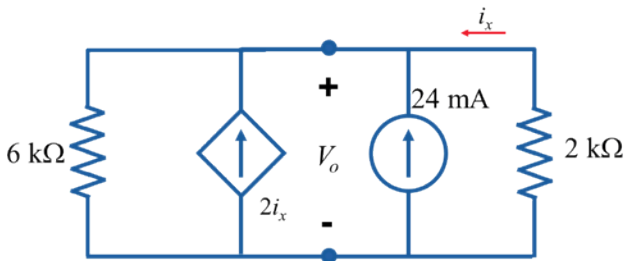


Figura 8.75.

(Sol. $V_{Th} = 16\text{ V}$, $I_N = 24\text{ mA}$, $R_{Th} = 666.66\ \Omega$, y $V_o = 14.4\text{ V}$).

Prob. 8.8. Obtener el circuito equivalente de Thévenin o Norton visto por las terminales de la resistencia R_2 en el circuito de la Figura 8.76.

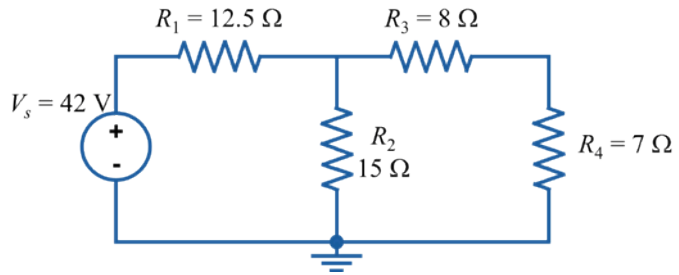


Figura 8.76.

(Sol. $R_{Th} = 6.818 \Omega$, $V_{Th} = 22.90 \text{ V}$, $I_N = 3.36 \text{ A}$).

Prob. 8.9. Obtener el circuito equivalente de Thévenin o Norton visto por las terminales de la resistencia de $3.3 \text{ k}\Omega$ en la Figura 8.77.

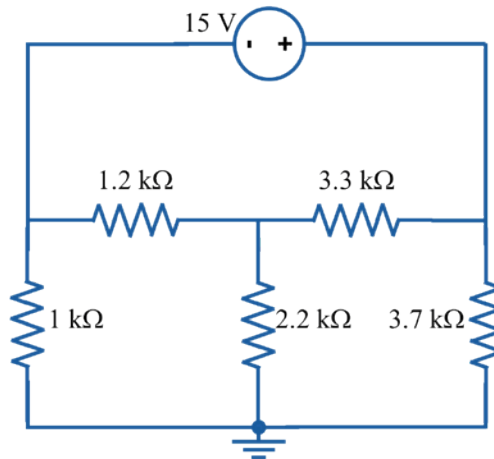


Figura 8.77.

(Sol. $V_{Th} = -14.08 \text{ V}$, $R_{Th} = 856 \Omega$, $I_N = -16.45 \text{ mA}$).

Prob. 8.10. Obtener el circuito equivalente de Thévenin o Norton visto por las terminales de la resistencia de $120\ \Omega$ en el circuito de la Figura 8.78.

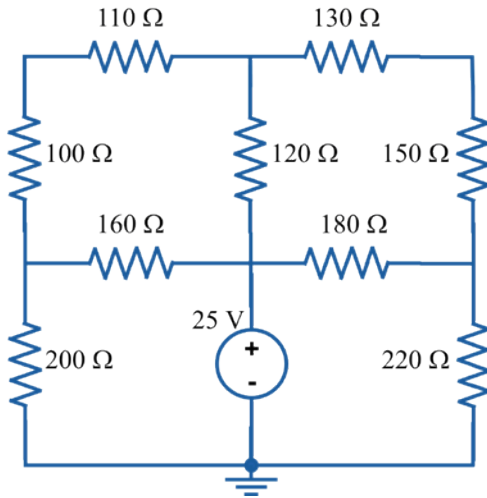


Figura 8.78.

(Sol. $V_{Th} = -11.17\text{ V}$, $R_{Th} = 167.1\ \Omega$, $I_N = -66.85\text{ mA}$).

Prob. 8.11. Obtener el circuito equivalente de Thévenin o Norton visto por las terminales de la resistencia de $3.6\text{ k}\Omega$ en la Figura 8.79.

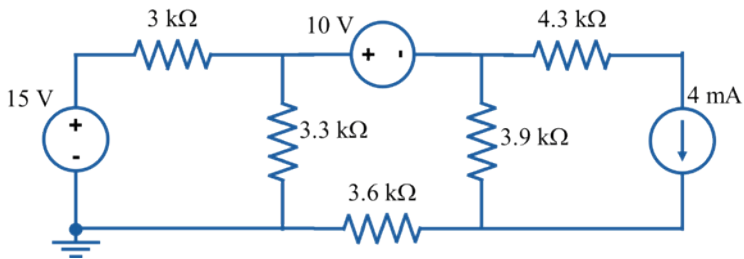


Figura 8.79.

(Sol. $V_{Th} = -13.4571\text{ V}$, $R_{Th} = 5.47\text{ k}\Omega$, $I_N = -2.4595\text{ mA}$).

Prob. 8.12. Obtener el circuito equivalente de Thévenin o Norton visto por las terminales de la resistencia de $1.5\text{ k}\Omega$ en la Figura 8.80.

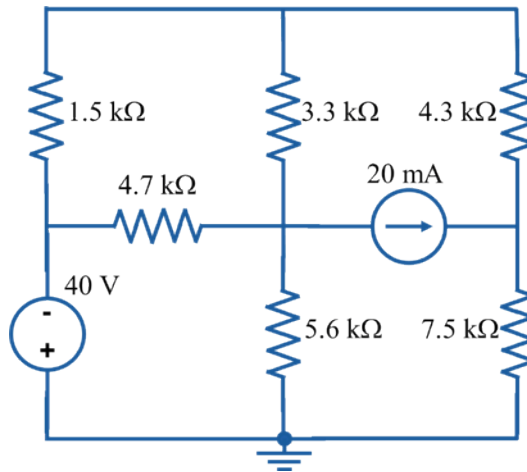


Figura 8.80.

(Sol. $V_{Th} = 41.05\text{ V}$, $R_{Th} = 5.78\ \Omega$, $I_N = 7.1\text{ mA}$).

Prob. 8.13. Obtener el circuito equivalente de Thévenin o Norton visto por las terminales de la resistencia de $750\ \Omega$ en la Figura 8.81.

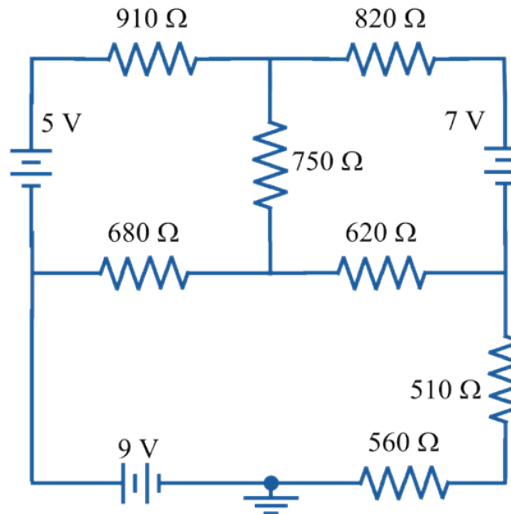


Figura 8.81.

(Sol. $V_{Th} = 6.039\text{ V}$, $R_{Th} = 755.64\ \Omega$, $I_N = 7.99\text{ mA}$).

Prob. 8.14. Obtener el circuito equivalente de Thévenin o Norton visto por las terminales de la resistencia de 7.5Ω en serie con la fuente de 45 V en la Figura 8.82.

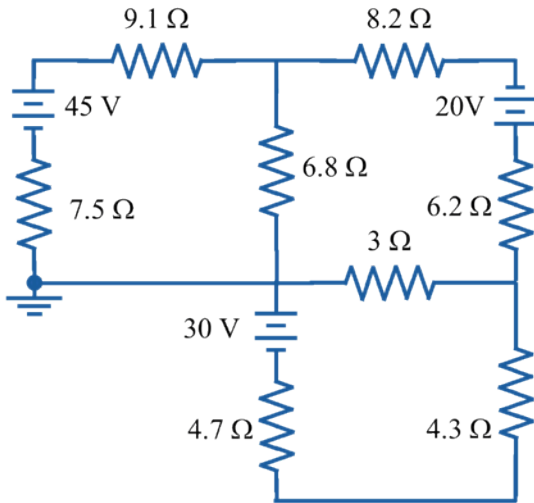


Figura 8.82.

(Sol. $V_{th} = -7.9744 \text{ V}$, $R_{th} = 13.928 \Omega$, $I_N = -572.54 \text{ mA}$).

Prob. 8.15. Obtener el circuito equivalente de Thévenin o Norton visto por la resistencia de 22Ω marcada con las terminales a y b en la Figura 8.83.

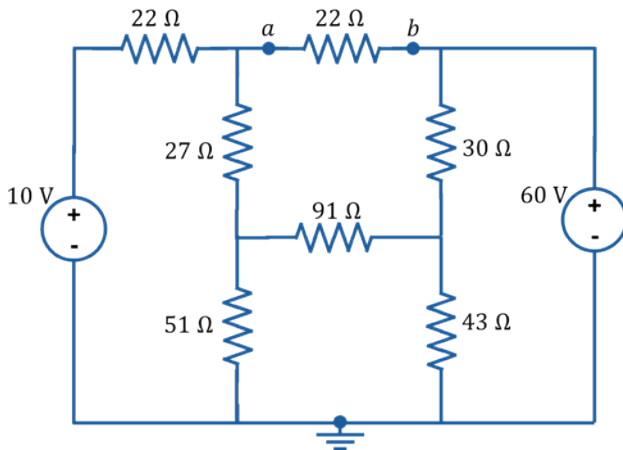


Figura 8.83.

(Sol. $V_{th} = -49.6613 \text{ V}$, $R_{th} = 16.218 \Omega$, $I_N = -3.062 \text{ A}$).

Prob. 8.16. Obtener el circuito equivalente de Thévenin o Norton visto por la resistencia de $10\ \Omega$ marcada con las terminales a y b en la Figura 8.84.

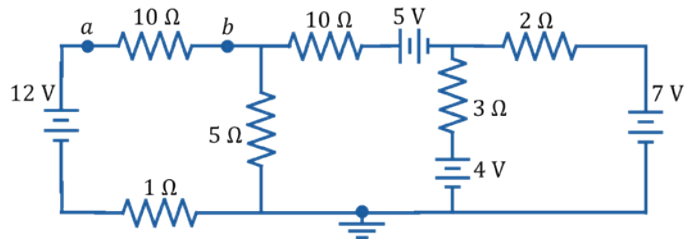


Figura 8.84.

(Sol. $V_{Th} = 8.818\text{ V}$, $R_{Th} = 4.48\ \Omega$, $I_N = 1.966\text{ A}$).

Prob. 8.17. Obtener el circuito equivalente de Thévenin o Norton visto por la resistencia marcada con las terminales a y b en la Figura 8.85.

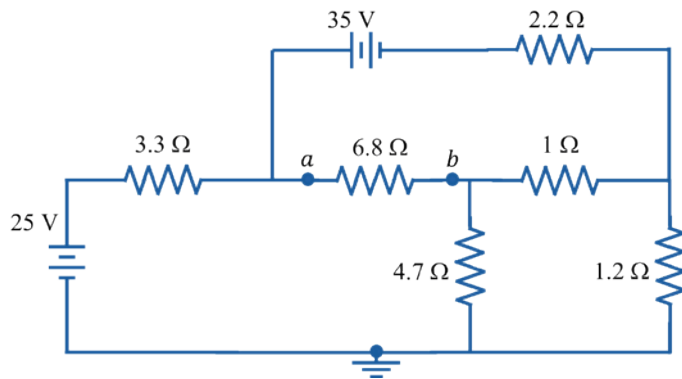


Figura 8.85.

(Sol. $V_{Th} = 31.34\text{ V}$, $R_{Th} = 2.186\ \Omega$, $I_N = 14.33\text{ A}$).

Prob. 8.18. Obtener el circuito equivalente de Thévenin o Norton visto por las terminales de la resistencia de $10\ \Omega$ en la Figura 8.86.

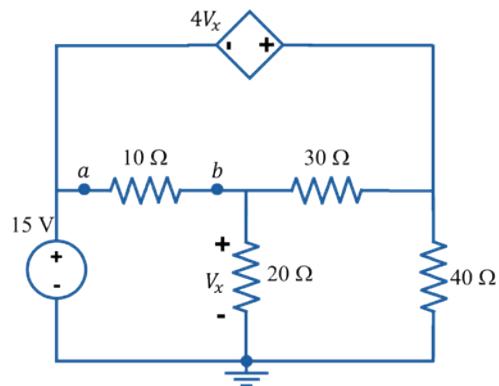


Figura 8.86.

(Sol. $V_{Th} = 25\text{ V}$, $I_N = -1.25\text{ A}$, $R_{Th} = -20\ \Omega$).

Prob. 8.19 Obtener el circuito equivalente de Thévenin o Norton visto por las terminales de la resistencia de $7\ \Omega$ en la Figura 8.87.

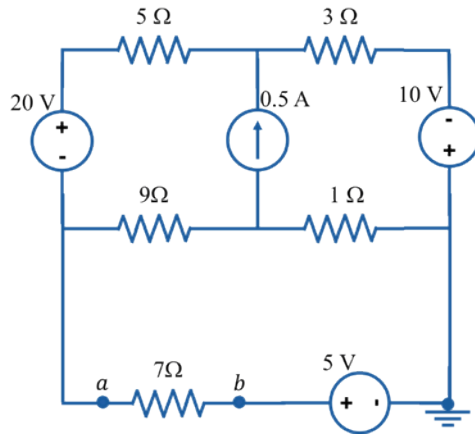


Figura 8.87.

(Sol. $V_{Th} = -21.05\text{ V}$, $R_{Th} = 4.44\ \Omega$, $I_N = -4.73\text{ A}$).

REFERENCIAS DEL CAPÍTULO

- Flores-Oropeza, L. A. [Luis Flores Circuitos]. (2017, marzo 22). 12 Teorema de Norton en CD Ejemplo 2 [archivo de video]. Recuperado de <https://www.youtube.com/watch?v=J6BYhPGAfec>
- Flores-Oropeza, L. A. [Luis Flores Circuitos]. (2017, marzo 22). 09 Teorema de Thevenin en CD [archivo de video]. Recuperado de <https://www.youtube.com/watch?v=VCX-c0dAw6E>
- Johnson, D. H. (2003a). Origins of the equivalent circuit concept: the current-source equivalent. *Proceedings of the IEEE*, 91(5), 817-821. <https://doi.org/10.1109/JPROC.2003.811795>
- Johnson, D. H. (2003b). Origins of the equivalent circuit concept: the voltage-source equivalent. *Proceedings of the IEEE*, 91(4), 636-640. <https://doi.org/10.1109/JPROC.2003.811716>

**TEOREMA DE MÁXIMA
TRANSFERENCIA DE POTENCIA**

9

INTRODUCCIÓN

También conocido como el teorema de Jacobi, por haber sido establecido por el profesor Moritz von Jacobi de San Petersburgo (1801-1874) (Kong, 1995; Nambiar, 1969; Calver, 2001). Este teorema comenzó con los experimentos que el profesor Moritz realizó con motores eléctricos para construir un bote eléctrico y poder realizar excursiones por el río Nevá. En el curso de estos experimentos, se preguntó cuánta energía podría obtener de una batería. Encontró que, de acuerdo con su construcción, una batería real o práctica se puede representar como una fuerza electromotriz (FEM) o fuente de voltaje ideal E en serie, con una resistencia parásita interna R_s . El valor de la resistencia interna dependerá del material con el que esté construida la batería, y este valor junto con el del voltaje de la fuente ideal E serán valores aproximadamente constantes, ya que no dependerán de la corriente I que se consuma. En la Figura 9.1 se muestra el circuito equivalente de una batería real o práctica, considerando la existencia de una resistencia interna R_s .

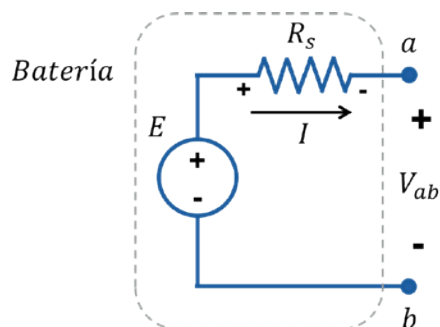


Figura 9.1. Batería real o práctica formada por una fuente de voltaje ideal E en serie con una resistencia interna R_s .

Obsérvese que el voltaje de salida de la batería real o práctica V_{ab} cambiará a medida que el valor de la corriente I aumente ya que, de acuerdo con la ley de voltajes de Kirchhoff, una caída de tensión se restará al valor del voltaje de la fuente ideal E , resultando la ecuación (9.1). Si la corriente I que entrega la batería real o práctica es de 0 A, entonces el voltaje V_{ab} será igual al voltaje E de la fuente ideal.

$$V_{ab} = E - IR_s \quad (9.1)$$

TEOREMA DE JACOBI O DE MÁXIMA TRANSFERENCIA DE POTENCIA

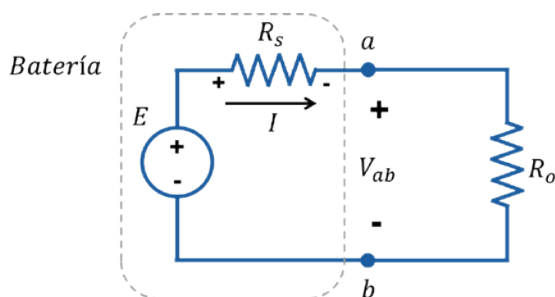


Figura 9.2. Batería real o práctica con resistencia interna R_S a la que se le conecta una resistencia externa R_O .

Nótese en la Figura 9.2 que si a la batería real o práctica se le conecta una resistencia de carga externa R_O , entonces la corriente I quedará definida por la ecuación (9.2)

$$I = \frac{E}{(R_S + R_O)} \quad (9.2)$$

y, por lo tanto, la ecuación (9.3) definirá la potencia en la carga

$$P_O = I^2 R_O \quad (9.3)$$

mientras que la ecuación (9.4) definirá la potencia en la resistencia interna de la batería real o práctica

$$P_S = I^2 R_S \quad (9.4)$$

El profesor Moritz observó que si la resistencia de salida valía cero ($R_O = 0 \Omega$), no existiría potencia externa. Del mismo modo, notó que si la resistencia de salida era infinita ($R_O = \infty \Omega$), tampoco existiría potencia externa, ya que la corriente valdría cero ($I = 0 \text{ A}$). Por lo tanto, dedujo que para algún valor intermedio de R_O entre 0Ω e infinito debería existir un valor de resistencia que produciría una potencia máxima.

Este valor de resistencia R_O se puede obtener fácilmente con un análisis utilizando el cálculo diferencial. Sin embargo, también con un poco de razonamiento, y al variar el valor de R_O desde cero hasta un valor grande, se observa que la potencia máxima se alcanza siempre que $R_O = R_S$. Con base en estas observaciones, el profesor Moritz estableció el teorema de la máxima transferencia de potencia que dice:

La potencia máxima se transfiere a una resistencia de carga R_O cuando la resistencia interna R_S de una fuente real o práctica es igual a la resistencia de la carga.

Nota: Este teorema es válido siempre y cuando la resistencia externa pueda variar y la resistencia interna de la fuente de alimentación sea constante.

El teorema se puede comprobar gráficamente con facilidad con un ejemplo en el que el voltaje ideal de la batería y la resistencia interna sean ($E = 1 \text{ V}$) y ($R_S = 1 \text{ } \Omega$), respectivamente, y variando el valor de R_O desde $0 \text{ } \Omega$ hasta un valor relativamente grande, por ejemplo $10 \text{ } \Omega$ ($R_O = 0 \dots 10 \text{ } \Omega$). Con las ecuaciones (9.2), (9.3) y (9.4) se obtienen los valores de la Tabla 9.1. Nótese que los valores de la corriente I y la potencia P_S son máximos y disminuyen cuando R_O aumenta, mientras que la potencia en P_O inicia en 0 W para después alcanzar un valor máximo de 250 mW , cuando las dos resistencias son iguales ($R_O = R_S = 1 \text{ } \Omega$), y después comienza a disminuir cuando R_O aumenta.

Tabla 9.1. Variación de corriente y potencias para distintos valores de resistencia de carga R_O

| R_O (Ω) | I (A) | P_S (W) | P_O (W) |
|--------------------|---------|-----------|-----------|
| 0 | 1.000 | 1.000 | 0.000 |
| 0.2 | 0.833 | 0.694 | 0.139 |
| 0.4 | 0.714 | 0.510 | 0.204 |
| 0.6 | 0.625 | 0.391 | 0.234 |
| 0.8 | 0.556 | 0.309 | 0.247 |
| 1 | 0.500 | 0.250 | 0.250 |
| 1.2 | 0.455 | 0.207 | 0.248 |
| 1.4 | 0.417 | 0.174 | 0.243 |
| 1.6 | 0.385 | 0.148 | 0.237 |
| 1.8 | 0.357 | 0.128 | 0.230 |
| 2 | 0.333 | 0.111 | 0.222 |
| 3 | 0.250 | 0.063 | 0.188 |
| 4 | 0.200 | 0.040 | 0.160 |
| 5 | 0.167 | 0.028 | 0.139 |
| 6 | 0.143 | 0.020 | 0.122 |
| 7 | 0.125 | 0.016 | 0.109 |
| 8 | 0.111 | 0.012 | 0.099 |
| 9 | 0.100 | 0.010 | 0.090 |
| 10 | 0.091 | 0.008 | 0.083 |

En la Figura 9.3 se grafican los valores de P_O obtenidos de la Tabla 9.1 y se observa que el valor de la potencia máxima se alcanza cuando ambas resistencias son iguales $R_O = R_S$, en este caso $1 \text{ } \Omega$, y que la potencia es, en esta situación, de 250 W .

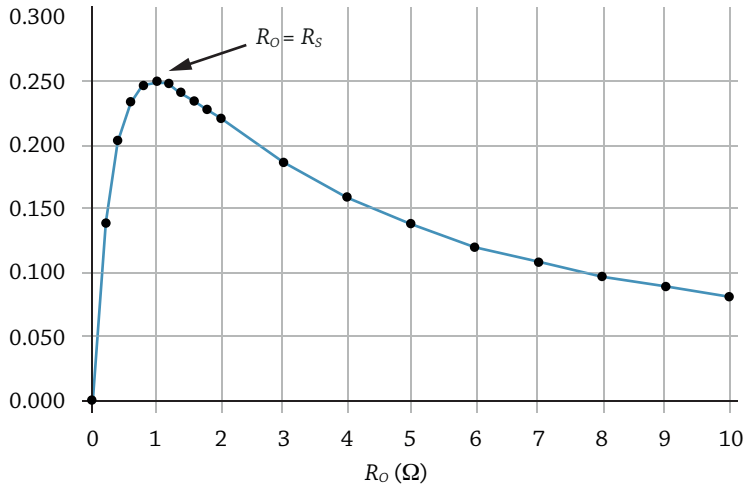


Figura 9.3. Máxima potencia transferida a la salida P_O variando la resistencia R_O .

TEOREMA DE MÁXIMA TRANSFERENCIA DE POTENCIA Y TEOREMA DE THEVENIN

Debido a que en el circuito equivalente de Thévenin resulta una fuente de voltaje conectada en serie con una resistencia, se asume que la potencia máxima que podrá entregar el circuito a una resistencia de carga conectada a él será la de aquella que tenga el mismo valor que la resistencia de Thévenin. Esto ocurrió en el Ejemplo 8-1 y el Ejemplo 8-2 que se resolvieron en el capítulo 8, ya que en dichos ejemplos se calculó la potencia en la resistencia de salida o de carga, cuyo valor variaba. En ambos ejemplos se incluyó, sin saberlo, el cálculo de la potencia para la resistencia de salida cuando ésta era igual que la resistencia de Thévenin, y en ambos ejemplos la potencia fue máxima 2.017 W y 900 μ W, respectivamente. En ese momento no se tenía idea de que se estaba aplicando el teorema de máxima transferencia de potencia.

Por lo tanto, el teorema de máxima transferencia de potencia también se puede enunciar de la siguiente manera:

Un circuito eléctrico puede transferir la potencia máxima a una resistencia de carga si esta resistencia tiene el mismo valor que la resistencia equivalente de Thévenin del circuito al que se encuentra conectada.

El circuito que resultará de aplicar el teorema de Thévenin para obtener la máxima potencia transferida a la carga es aquel en el que la resistencia de salida sea igual que la resistencia equivalente de Thévenin, tal como se muestra en la Figura 9.4.

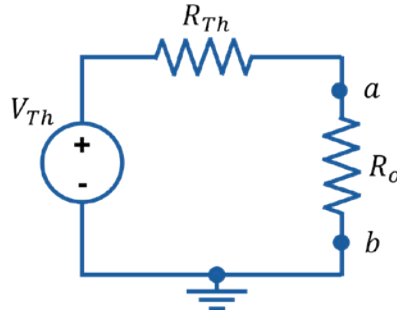


Figura 9.4. Circuito equivalente de Thévenin con resistencia de carga R_o que se asegura la máxima transferencia de potencia.

En este caso, ya que la resistencia de carga y la resistencia de Thévenin son iguales, entonces la máxima transferencia de potencia se consigue cuando el voltaje en la resistencia de carga es la mitad del voltaje de Thévenin tal, como queda expresado en la ecuación (9.5):

$$V_{oMT} = \frac{V_{Th}}{2} \quad (9.5)$$

y, por lo tanto, la ecuación (9.6) también define la máxima transferencia de potencia en la resistencia de carga R_o .

$$P_o = \frac{(V_{oMT})^2}{R_o}$$

$$P_o = \frac{V_{Th}^2}{4R_o} \quad (9.6)$$

MÁXIMA TRANSFERENCIA DE POTENCIA A UNA CARGA VS MÁXIMA POTENCIA ABSORBIDA DE UNA FUENTE

En circuitos eléctricos, se debe distinguir con claridad la diferencia que existe entre la máxima potencia que se le puede transferir a una resistencia de carga variable y la máxima potencia que una resistencia fija puede absorber de la fuente en una red eléctrica. Es común confundirse con estas dos ideas, pero a continuación se detallan las características de cada una de ellas para establecer las diferencias.

La máxima transferencia de potencia a una resistencia de carga, a partir de un circuito o una red, se alcanza si la resistencia que se alimenta es variable y se puede ajustar al valor de la resistencia equivalente de Thévenin del circuito o a la resistencia interna de la fuente de alimentación. En esas condiciones, se puede afirmar que la potencia transferida a la carga es la máxima posible que se puede transferir (y aun así el rendimiento o la eficiencia será apenas de 50 %, porque la misma potencia se estará consumiendo por parte de la resistencia equivalente de Thévenin en el circuito o en la resistencia interna de la batería).

La máxima potencia absorbida de una fuente de alimentación, por parte de una resistencia fija de carga, dependerá de si se puede o no modificar el valor de la resistencia de Thévenin o la resistencia interna de la fuente R_S . En la Figura 9.2 cuando la resistencia de carga R_O es fija y la resistencia interna R_S es variable se determina que, si $R_S = \infty$, tenemos $I = 0$ A y, por lo tanto, la potencia en la carga es cero ($P_O = 0$ W). Pero cuando $R_S = 0 \Omega$, tenemos ($I = E / R_O$) y la potencia será $P_O = I^2 R_O$, éste es obviamente el valor máximo. Por lo tanto: cuando la resistencia de carga es fija, se produce la máxima absorción de potencia para una resistencia interna de cero ($R_S = 0 \Omega$). En esas condiciones, se debe explorar la posibilidad de hacer cero o un valor muy pequeño la resistencia de Thévenin o la resistencia interna de la fuente de alimentación R_S . En resumen, las ecuaciones (9.2), (9.3) y (9.4) siguen aplicando para este concepto, sólo que ahora la resistencia que varía será la resistencia interna R_S , mientras que la resistencia de carga R_O permanece constante.

La idea de la absorción de la potencia de una resistencia fija de carga R_O se puede comprobar gráficamente con facilidad con un ejemplo en el que el voltaje de la batería o de la red y la resistencia de carga sean ($E = 1$ V) y ($R_O = 1 \Omega$), respectivamente, y variando el valor de la resistencia interna R_S desde 0Ω hasta un valor relativamente grande, por ejemplo 10Ω ($R_S = 0 \dots 10 \Omega$). Con las ecuaciones (9.2), (9.3) y (9.4) se obtienen los valores de la Tabla 9.2. Observar que los valores de la corriente I y la potencia P_O son máximos cuando la resistencia interna $R_S = 0 \Omega$, y disminuyen conforme el valor de R_S aumenta. Teóricamente, mientras más grande sea el valor de la resistencia interna R_S menor será el valor de la potencia de salida P_O , por lo tanto, para garantizar que la potencia en la salida sea máxima, se debe hacer $R_S = 0 \Omega$ o asegurar el menor de los valores posibles.

Tabla 9.2. Variación de corriente y potencias para distintos valores de resistencia interna R_S .

| $R_S (\Omega)$ | I (A) | P_S (W) | P_O (W) |
|----------------|---------|-----------|-----------|
| 0 | 1.000 | 0.000 | 1.000 |
| 0.2 | 0.833 | 0.139 | 0.694 |
| 0.4 | 0.714 | 0.204 | 0.510 |
| 0.6 | 0.625 | 0.234 | 0.391 |
| 0.8 | 0.556 | 0.247 | 0.309 |
| 1 | 0.500 | 0.250 | 0.250 |
| 1.2 | 0.455 | 0.248 | 0.207 |
| 1.4 | 0.417 | 0.243 | 0.174 |
| 1.6 | 0.385 | 0.237 | 0.148 |
| 1.8 | 0.357 | 0.230 | 0.128 |
| 2 | 0.333 | 0.222 | 0.111 |
| 3 | 0.250 | 0.188 | 0.063 |
| 4 | 0.200 | 0.160 | 0.040 |

Continuación de Tabla

| $R_S (\Omega)$ | I (A) | P_S (W) | P_O (W) |
|----------------|---------|-----------|-----------|
| 5 | 0.167 | 0.139 | 0.028 |
| 6 | 0.143 | 0.122 | 0.020 |
| 7 | 0.125 | 0.109 | 0.016 |
| 8 | 0.111 | 0.099 | 0.012 |
| 9 | 0.100 | 0.090 | 0.010 |
| 10 | 0.091 | 0.083 | 0.008 |

En la Figura 9.5 se grafican los valores de P_O obtenidos de la Tabla 9.2 y se observa que el valor de la potencia máxima absorbida se alcanza cuando $R_S = 0 \Omega$, alcanzando en este caso un valor de 1 W.

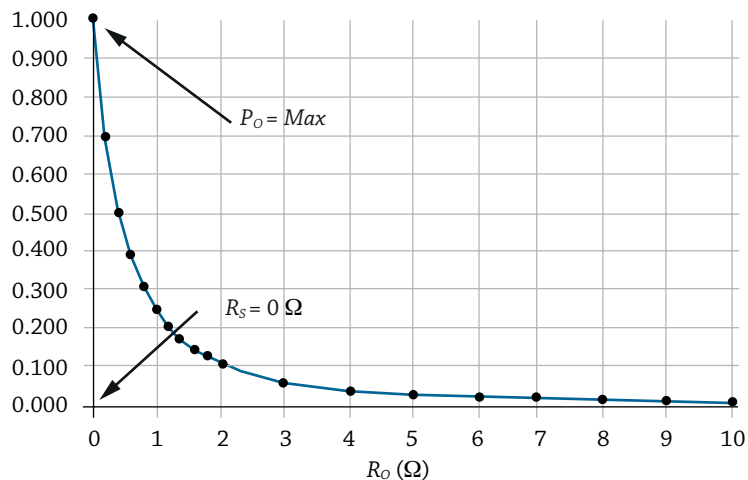


Figura 9.5. Máxima potencia absorbida por la salida P_O variando la resistencia R_S .

APLICACIONES DEL TEOREMA DE MÁXIMA TRANSFERENCIA DE POTENCIA

Se trata de un teorema que aparentemente no tiene mucha relevancia, prácticamente consiste en aplicar el teorema de Thévenin para obtener un circuito en el que se sabrá cómo transferir la potencia máxima a una resistencia conectada. Lo relevante puede surgir cuando se tenga que diseñar un circuito con carga fija y en el que se tenga que “analizar” qué elementos influyen para poder modificar la resistencia interna o de Thévenin para poder conseguir que esta resistencia sea mínima (idealmente nula).

En la literatura en general se pueden encontrar algunas aplicaciones típicas en las que el teorema de máxima transferencia de potencia toma importancia. A continuación, se mencionan algunas para que el estudiante tenga una idea de ellas:

- En los circuitos de radio, la resistencia interna de una fuente de energía generalmente no se puede reducir a un valor pequeño, por lo que la resistencia de carga se iguala con la de la batería para obtener la máxima transferencia de po-

tencia. Las potencias involucradas son muy pequeñas y las pérdidas no son importantes, sólo la cantidad de potencia que se transfiere es importante. Éste es un caso muy distinto al de la transmisión de energía, cuando las pérdidas sí importan (Calvert, 2001).

- En el diseño de circuitos con transistores con múltiples etapas, se debe cuidar cuál es el valor de la resistencia de entrada y la resistencia de salida que tiene cada etapa para garantizar que la transferencia de potencia sea la máxima posible. A este proceso se le conoce como “Acoplamiento de impedancias” (Boylestad & Nashelsky, 2009).
- En el diseño de circuitos en los que se utilizan Amplificadores Operacionales (OPAMPs) el concepto de transferencia y absorción de potencia también es muy importante. Cuando se van a medir señales eléctricas débiles, es crucial no modificar su valor para no alterarlas y esto se consigue teniendo una resistencia de entrada en el circuito muy grande (teóricamente infinita), de esta manera se garantiza que la señal que se pretende medir no se verá afectada. El caso contrario ocurre cuando el OPAMP tiene que entregar una señal de potencia en la salida, es decir, entregar un valor elevado de corriente. En ese caso, es deseable que la resistencia o impedancia de salida sea lo más pequeña posible para que la absorción de la potencia por parte de la carga sea la máxima posible (Savant *et al.*, 2000).

ANÁLISIS DE CIRCUITOS UTILIZANDO EL TEOREMA DE MÁXIMA TRANSFERENCIA DE POTENCIA

A continuación, se presentan algunos ejemplos en los que se aplica el teorema de máxima transferencia de potencia para familiarizar al alumno con su utilización.

Ejemplo 9-1. Si en el circuito de la Figura 9.6 se puede ajustar R_O en cualquier valor, determinar:

- ¿Cuál será el valor que haga que la potencia transferida a la resistencia R_O sea máxima?
- ¿De cuánto será el valor de esa potencia máxima?

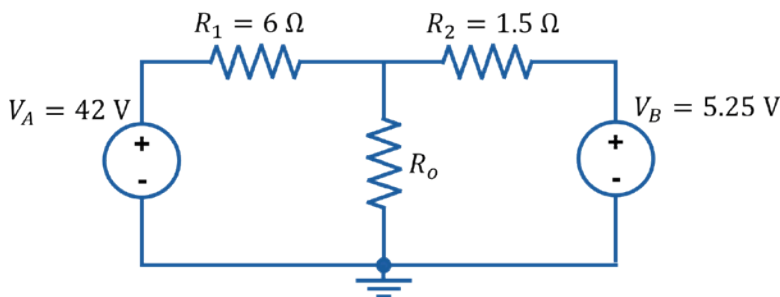


Figura 9.6. Circuito para calcular la máxima transferencia de potencia en R_O .

Solución.

- a) La resistencia de carga R_O que asegura que se transfiera la potencia máxima es la misma que la resistencia de Thévenin, por lo tanto, se aplican los pasos estudiados en el capítulo 8 para calcularla.

$$R_O = R_{Th} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{(6 \Omega)(1.5 \Omega)}{6 \Omega + 1.5 \Omega}$$

$$R_O = 1.2 \Omega$$

- b) Para calcular la potencia máxima transferida, es necesario obtener el circuito equivalente de Thévenin, por lo tanto, falta calcular el voltaje de Thévenin V_{Th} . Retiramos la resistencia R_O del circuito de la Figura 9.6 y calculamos el voltaje de Thévenin V_{Th} en la Figura 9.7. Para calcular V_{Th} se utiliza el principio de superposición explicado en el capítulo 6.

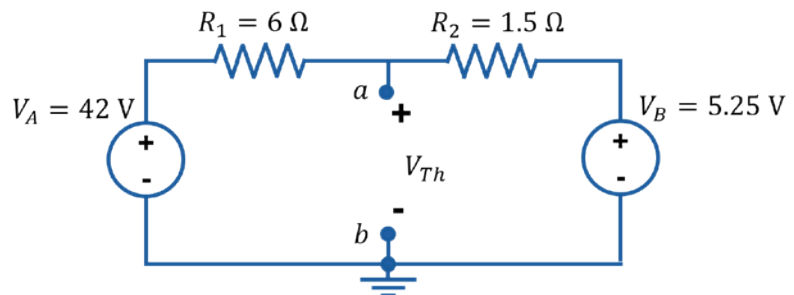


Figura 9.7. Circuito para calcular el voltaje de Thévenin V_{Th} .

$$V_{Th} = V_{Th}' + V_{Th}''$$

$$V_{Th} = V_A \frac{R_2}{R_1 + R_2} + V_B \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$V_{Th} = (42 \text{ V}) \frac{(1.5 \Omega)}{6 \Omega + 1.5 \Omega} + (5.25 \text{ V}) \frac{(6 \Omega)}{6 \Omega + 1.5 \Omega}$$

$$V_{Th} = 12.6 \text{ V}$$

Por lo tanto, el circuito equivalente de Thévenin que resulta se muestra en la Figura 9.8 .

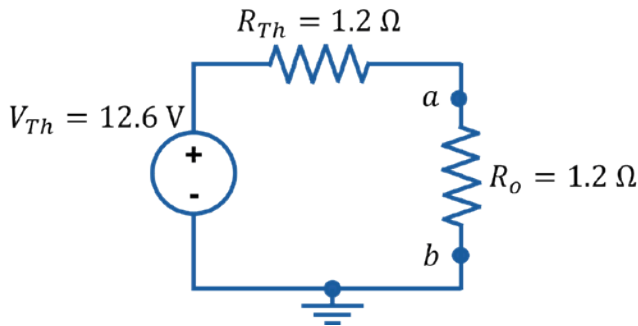


Figura 9.8. Circuito equivalente de Thévenin para calcular la máxima transferencia de potencia en R_o .

Para calcular la máxima transferencia de potencia a la resistencia R_o se utiliza la ecuación (9.6) resultando.

$$P_o = \frac{V_{Th}^2}{4R_o} = \frac{(12.6 \text{ V})^2}{4(1.2 \Omega)}$$

$$P_o = 33.075 \text{ W}$$

Ejemplo 9-2. Si en el **Ejemplo 9-1** se mantiene constante el valor de R_o calculado en el inciso a) y si se mantiene la proporción entre R_1 y R_2 para que el voltaje de Thévenin resulte igual que en el problema original.

- a) En el circuito de la Figura 9.9 ¿Qué nuevos valores de R_1 y R_2 hacen que la potencia absorbida por la resistencia de carga R_o sea el doble del valor que se obtuvo en el inciso b)?

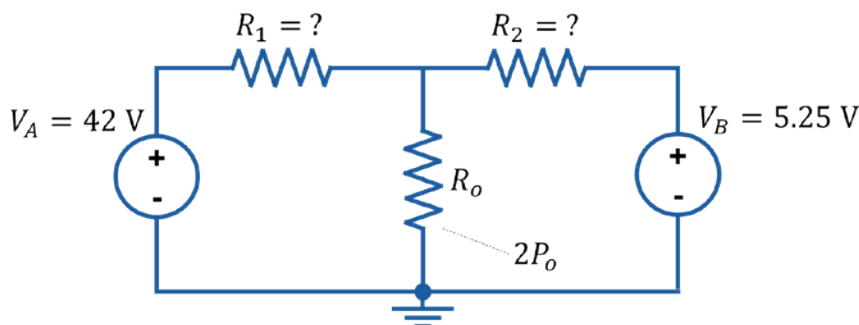


Figura 9.9. Circuito para calcular el doble de la absorción de potencia en R_o .

Solución.

- b) Para calcular los nuevos valores de las resistencias R_1 y R_2 respetando la proporción que existe entre ellas y para que la resistencia R_o absorba el doble de la potencia del circuito, se deben tomar en cuenta los siguientes aspectos.

- Los valores originales de R_1 y R_2 son 6Ω y 1.5Ω respectivamente, por lo tanto, la ecuación (9.7) expresa la proporción que existe entre ambas resistencias.

$$R_1 = 4R_2 \quad (9.7)$$

- Si la proporción entre las resistencias R_1 y R_2 se mantiene, entonces el voltaje V_{Th} conservará el mismo valor de 12.6 V para los nuevos valores de resistencias.
- La resistencia R_O permanecerá constante, es decir, 1.2Ω .
- La nueva potencia que debe absorber R_O de la red debe ser del doble que la calculada en el inciso b), es decir, 66.15 W .

Entonces, ahora lo que se debe calcular es un nuevo valor de resistencia de Thévenin R_{ThN} sin modificar la resistencia R_O para que esta última absorba el doble de la potencia de la red tal como se muestra en la Figura 9.10.

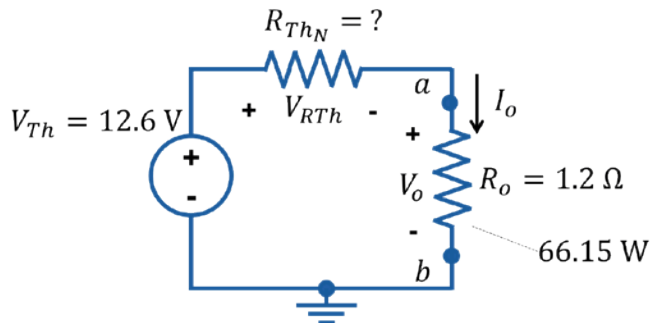


Figura 9.10. Circuito para que la resistencia de salida R_O absorba el doble de potencia de la red.

La resistencia R_O debe absorber una potencia de 66.15 W , por lo tanto, el voltaje V_O que produce este nuevo valor de potencia se despeja de la ecuación (2.8) resultando la ecuación (9.8).

$$V_O = \sqrt{P_O R_O} \quad (9.8)$$

Sustituyendo los valores en la ecuación anterior resulta:

$$V_O = \sqrt{(66.15 \text{ W})(1.2 \Omega)} = 8.91 \text{ V}$$

Por lo tanto, el voltaje en la nueva resistencia de Thévenin R_{ThN} se expresa en la ecuación (9.9):

$$V_{RTh} = V_{Th} - V_O \quad (9.9)$$

Sustituyendo los valores en la ecuación anterior resulta:

$$V_{RTh} = 12.6 \text{ V} - 8.91 \text{ V} = 3.69 \text{ V}$$

La corriente que circulará por la nueva resistencia de Thévenin R_{ThN} debe ser la misma que circule por la resistencia R_O por es-

tar conectadas en serie. Por lo tanto, utilizamos la ecuación (2.10) para despejar el valor de la corriente que circula a través de la resistencia R_O resultando la ecuación (9.10).

$$I_o = \sqrt{\frac{P_o}{R_o}} \quad (9.10)$$

Sustituyendo los valores en la ecuación anterior resulta:

$$I_o = \sqrt{\frac{66.15 \text{ W}}{1.2 \Omega}} = 7.42 \text{ A}$$

Con el valor del voltaje y la corriente calculamos el nuevo valor de la resistencia de Thévenin R_{ThN} con la ley de Ohm expresada en la ecuación (9.11).

$$R_{ThN} = \frac{V_{RTh}}{I_o} \quad (9.11)$$

Sustituyendo los valores en la ecuación anterior resulta.

$$R_{ThN} = \frac{3.69 \text{ V}}{7.42 \text{ A}} = 0.497,3 \Omega$$

Este es el nuevo valor de la resistencia de Thévenin R_{ThN} que asegurará que la resistencia de salida R_O absorba el doble de la potencia de la red.

Por último, para calcular los valores de las resistencias R_1 y R_2 se debe garantizar que el paralelo de estas dos sea igual a la resistencia R_{ThN} recién determinada. Esto se consigue calculando la resistencia equivalente entre las dos resistencias e igualándolas con el valor de la recién calculada, tal como se expresa en la ecuación (9.12).

$$\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = R_{ThN} \quad (9.12)$$

Recordemos que las resistencias R_1 y R_2 están relacionadas por la ecuación (9.7), por lo tanto, al sustituir esta condición en la ecuación (9.12) y despejar el valor de R_2 resulta la ecuación (9.13).

$$\begin{aligned} \frac{(4R_2)R_2}{(4R_2)+R_2} &= R_{ThN} \\ \frac{4}{5}R_2 &= R_{ThN} \\ R_2 &= \frac{5}{4}R_{ThN} \end{aligned} \quad (9.13)$$

Sustituimos la ecuación (9.13) en la ecuación (9.7) y resulta la ecuación (9.14).

$$\begin{aligned}R_1 &= 4R_2 \\R_1 &= 4\left(\frac{5}{4}R_{Th_N}\right) \\R_1 &= 5R_{Th_N}\end{aligned}\tag{9.14}$$

Por lo tanto, los valores de las nuevas resistencias son:

$$R_2 = \frac{5}{4}R_{Th_N} = \frac{5}{4}(0.497,3 \Omega)$$

$$R_2 = 0.6216 \Omega$$

$$R_1 = 5R_{Th_N} = 5(0.497,3 \Omega)$$

$$R_1 = 2.486 \Omega$$

Con estos nuevos valores de resistencias se logra que la potencia en la resistencia de carga sea el doble del que se obtuvo en el **Ejemplo 9-1**.

Ejemplo 9-3. Una batería real o práctica proporciona una corriente de $I_{cc} = 2.5 \text{ A}$ cuando se encuentra (momentáneamente) en cortocircuito ($R_O = 0 \Omega$), y cuando se le conecta una resistencia de carga de 20Ω , a esa resistencia se le suministra una potencia de 90 W . Calcular:

- El voltaje en las terminales de la batería V_{ab} si esta se encuentra en circuito abierto.
- El voltaje en las terminales de la batería V_{ab} cuando se le conecta la resistencia de carga de 20Ω .
- La potencia máxima que se podría entregar a una resistencia de carga R_O bien elegida.

Solución.

Primero se deducirán y computarán las ecuaciones y valores suficientes para poder calcular lo que se pide en el problema.

La Figura 9.11 corresponde a la batería en corto circuito y la Figura 9.12 con la batería y la resistencia de carga de 20Ω .

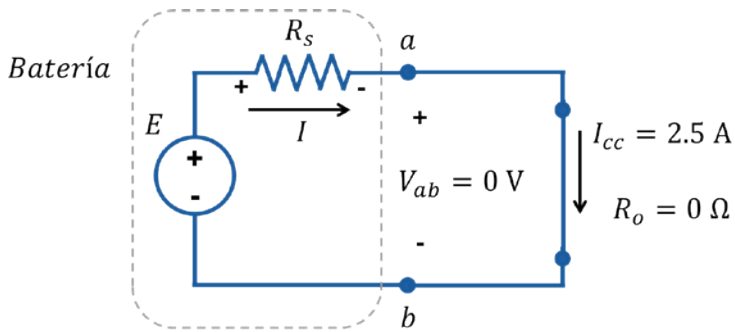


Figura 9.11. Salida en cortocircuito momentáneo $R_o = 0 \Omega$.

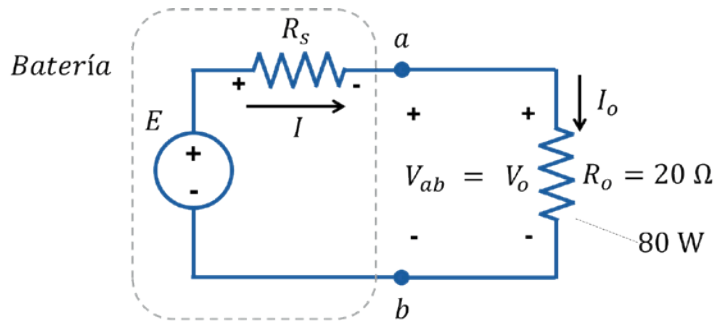


Figura 9.12. Salida con una resistencia de carga $R_o = 20 \Omega$.

Observar que, para ambos circuitos, el voltaje E y la resistencia interna R_s permanecen constantes para los distintos valores de la resistencia de carga.

Para calcular el voltaje en las terminales de la batería V_{ab} en circuito abierto y con la resistencia de carga R_o conectada, es necesario conocer el voltaje E y el valor de la resistencia interna R_s .

Entonces, a partir de la Figura 9.11 se puede definir el voltaje E en función de la corriente de corto circuito I_{cc} y la resistencia interna R_s desconocida tal como se expresa en la ecuación (9.15) o se puede definir la resistencia interna R_s en función de la corriente de corto circuito I_{cc} y el voltaje E desconocido, tal como se expresa en la ecuación (9.16).

$$E = I_{cc}R_s \quad (9.15)$$

$$R_s = \frac{E}{I_{cc}} \quad (9.16)$$

Nótese de la Figura 9.12 que la corriente $I = I_o$ por tratarse de un circuito conectado en serie. Por lo tanto, a partir de este circuito se puede definir la corriente que está circulando a través de él con la ecuación (9.10).

$$I = \sqrt{\frac{P_o}{R_o}}$$

Sustituyendo los valores en la ecuación anterior resulta:

$$I = \sqrt{\frac{80 \text{ W}}{20 \Omega}} = 2 \text{ A}$$

De igual manera, en la Figura 9.12 se puede aplicar una ley de voltajes de Kirchhoff para relacionar todos los voltajes del circuito, resultando la ecuación (9.17).

$$-E + IR_s + IR_o = 0 \text{ V} \quad (9.17)$$

En la ecuación (9.17) se sustituye la ecuación (9.16) para dejar una sola incógnita, en este caso el voltaje E .

$$-E + I \left(\frac{E}{I_{cc}} \right) + IR_o = 0 \text{ V}$$

Despejamos el voltaje E y resulta la ecuación (9.18).

$$\begin{aligned} E \left(-1 + \frac{I}{I_{cc}} \right) + IR_o &= 0 \text{ V} \\ E &= \frac{-IR_o}{\left(-1 + \frac{I}{I_{cc}} \right)} \\ E &= \frac{IR_o}{\left(1 - \frac{I}{I_{cc}} \right)} \end{aligned} \quad (9.18)$$

Se puede hacer el mismo desarrollo sólo que ahora, en la ecuación (9.17) se sustituye la ecuación (9.15) para dejar una sola incógnita, en este caso la resistencia R_s .

$$-(I_{cc}R_s) + IR_s + IR_o = 0 \text{ V}$$

$$R_s(-I_{cc} + I) + IR_o = 0 \text{ V}$$

Despejamos la resistencia R_s y resulta la ecuación (9.19).

$$\begin{aligned} R_s &= \frac{-IR_o}{-I_{cc} + I} \\ R_s &= \frac{IR_o}{I_{cc} - I} \end{aligned} \quad (9.19)$$

- a) Ya que se obtuvieron las ecuaciones y los valores necesarios, ahora sí es posible calcular lo que se pide en el problema. Para calcular el voltaje en las terminales de la batería en circuito abierto, se aplica la ecuación (9.1)

$$V_{ab} = E - IR_S$$

El circuito se encuentra abierto, por lo tanto, no circula corriente a través de él ($I = 0 \text{ A}$) lo que implica que no haya caída de voltaje en la resistencia interna R_S . Obsérvese que tiene sentido ya que, al no circular corriente a través de la resistencia R_S , no se produce una caída de tensión interna en la batería, ocasionando así que el voltaje de la fuente ideal E sea el mismo voltaje que aparece en las terminales de la batería V_{ab} .

$$V_{ab} = E - (0 \text{ A})R_S$$

$$\therefore V_{ab} = E$$

Para calcular cuánto vale el voltaje ideal de la batería se aplica la ecuación (9.18) que se obtuvo del análisis, se sustituyen los valores que se tienen del problema y resulta:

$$E = \frac{IR_o}{\left(1 - \frac{I}{I_{cc}}\right)} = \frac{(2 \text{ A})(20 \Omega)}{\left(1 - \frac{2 \text{ A}}{2.5 \text{ A}}\right)}$$

$$E = 200 \text{ V}$$

- b) De acuerdo con la Figura 9.12, el voltaje en las terminales de la batería V_{ab} es el mismo voltaje que tiene la propia resistencia de carga R_o cuando está siendo alimentada por la batería ($R_o = V_o$). Calcular este voltaje es simple ya que con la información que se conoce del problema se puede calcular con facilidad el voltaje de la resistencia R_o por medio de la ecuación (9.8).

$$V_o = \sqrt{P_o R_o}$$

Sustituimos los valores en la ecuación anterior y resulta:

$$V_o = \sqrt{(80 \text{ W})(20 \Omega)}$$

$$V_o = 40 \text{ V}$$

De los 200 V que tiene la fuente de voltaje ideal E , únicamente 40 V llegan a las terminales de la batería y por lo tanto a la resistencia de carga R_o , el resto del voltaje se queda en la resistencia interna R_S como una caída de voltaje.

- c) De acuerdo con el teorema de máxima transferencia de potencia y el teorema de Thévenin, la potencia máxima que se puede transferir o entregar a una carga ocurre cuando la resistencia de carga R_O es igual a la resistencia interna de la batería R_S o a la resistencia de Thévenin R_{Th} del circuito al que está conectada. Por esta razón, para calcular la máxima potencia transferida por el circuito, se calcula la resistencia interna de la batería R_S , ya que será este valor al que se deberá igualar la resistencia de carga R_O .

Con la ecuación (9.19) que se dedujo del análisis, y con la información proporcionada por el problema, calculamos el valor de la resistencia R_S .

$$R_S = \frac{IR_O}{I_{cc} - I}$$

$$R_S = \frac{(2 \text{ A})(20 \Omega)}{(2.5 \text{ A}) - (2 \text{ A})}$$

$$R_S = 80 \Omega$$

De acuerdo con el teorema de máxima transferencia de potencia, la potencia máxima transferida se alcanzará cuando la resistencia de carga sea igual a la resistencia interna de la batería ($\bullet \bullet R_O = R_S$), en este caso 80Ω .

Por lo tanto, la máxima potencia que se puede transferir a una resistencia ideal se calcula con la ecuación (9.6), expresión que se obtuvo del circuito equivalente de Thévenin y en la que sólo se cambió V_{Th} por E .

$$P_o = \frac{E^2}{4R_o}$$

$$P_o = \frac{(200 \text{ V})^2}{4(80 \Omega)}$$

$$P_o = 125 \text{ W}$$

Nótese que la potencia que ahora se entrega a la resistencia de carga R_O aumentó de 80 W a 125 W . Se deja al estudiante comprobar que, para valores inferiores y superiores, el de la potencia resultará menor.

Ejemplo 9-4. Con base en el circuito de la Figura 9.13 calcular:

- El valor de R_O para el cual puede entregarse una potencia máxima.
- El voltaje en las terminales de la resistencia R_O (con la referencia + en la parte superior) y la potencia máxima que se le transfiere.

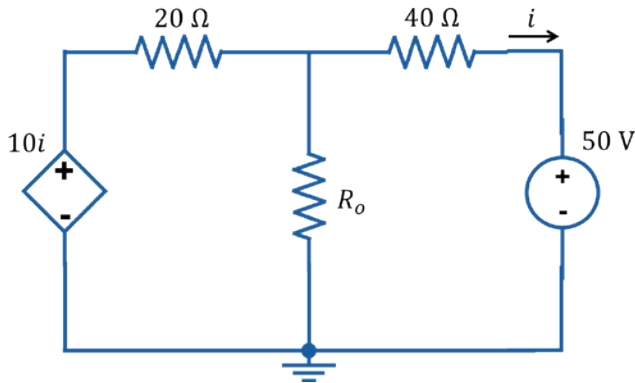


Figura 9.13. Circuito con fuente dependiente para cálculo de máxima transferencia de potencia.

Solución.

- El valor de R_O para poder transferir la potencia máxima debe ser igual al valor de la resistencia de Thévenin R_{Th} , por lo tanto, a partir la Figura 9.13 procedemos a obtener el circuito equivalente de Thévenin tal como se explica en el capítulo 8. Observar que en el circuito se tiene una fuente dependiente, entonces para obtener el circuito equivalente de Thévenin se hace lo siguiente:

Primero retiramos la resistencia R_O y marcamos las terminales como se indica en la Figura 9.14 para calcular el voltaje de Thévenin V_{Th} .

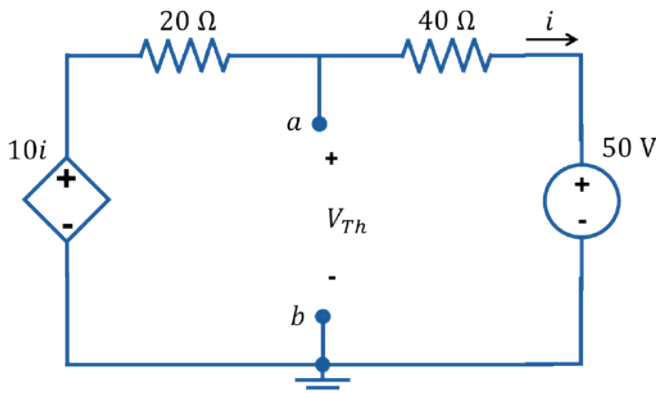


Figura 9.14. Circuito para calcular R_{Th} y V_{Th} .

En la Figura 9.15 asignamos la dirección de la corriente igual que la corriente i para colocar los signos de voltaje en las resistencias.

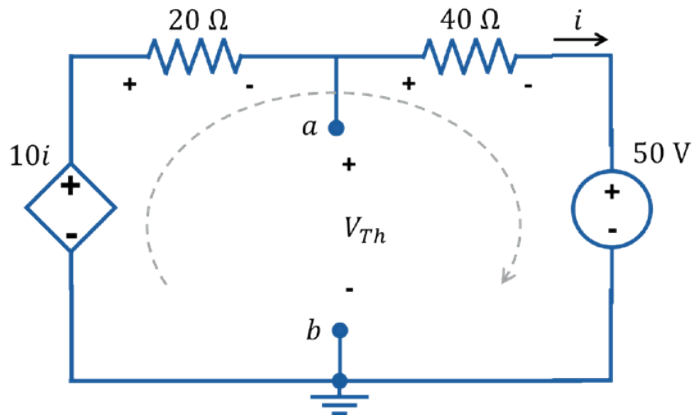


Figura 9.15. Dirección de corriente y signos para calcular el voltaje de Thévenin V_{Th} .

Con la ley de voltajes de Kirchhoff obtenemos la ecuación (9.20) a lo largo de todo el perímetro del circuito y despejamos el valor de la corriente i .

$$\begin{aligned}
 -10i \text{ V} + (20 \Omega)i + (40 \Omega)i + 50 \text{ V} &= 0 \text{ V} \\
 (50 \Omega)i &= -50 \text{ V} \\
 i &= -1 \text{ A}
 \end{aligned} \tag{9.20}$$

Con la corriente i calculada, y a partir de la Figura 9.15, el voltaje de Thévenin se puede calcular con la ecuación (9.21) o la ecuación (9.22).

$$\begin{aligned}
 V_{Th} &= 40i + 50 \\
 V_{Th} &= (40)(-1) + 50 \\
 V_{Th} &= 10 \text{ V}
 \end{aligned} \tag{9.21}$$

$$\begin{aligned}
 V_{Th} &= -20i + 10i \\
 V_{Th} &= -(20)(-1) + 10(-1) = 10 \text{ V} \\
 V_{Th} &= 10 \text{ V}
 \end{aligned} \tag{9.22}$$

Ahora calculamos la resistencia de Thévenin, pero como en el circuito se encuentra una fuente dependiente, necesitamos calcular la corriente de corto circuito I_{cc} entre las terminales a y b tal como se indica en la Figura 9.16.

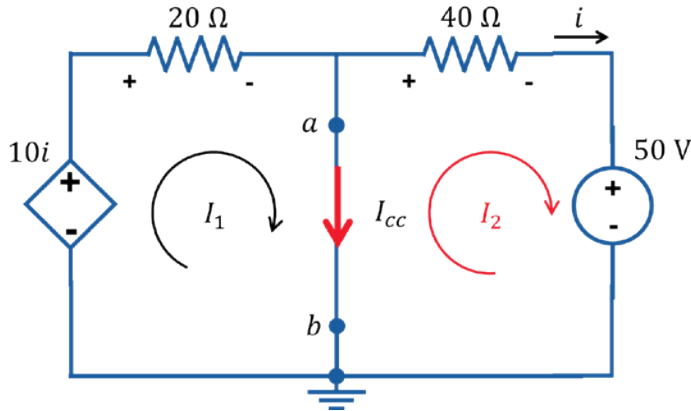


Figura 9.16. Circuito para calcular la corriente de corto circuito I_{cc} utilizando mallas.

De la Figura 9.16 se observa que la corriente de corto circuito queda definida como se indica en la ecuación (9.23).

$$I_{cc} = I_1 - I_2 \quad (9.23)$$

En la malla de I_1 aplicamos la ley de voltajes de Kirchhoff y resulta la ecuación (9.24).

$$-10i + 20I_1 = 0 \quad (9.24)$$

En el circuito de la Figura 9.16 también se observa que $i = I_2$ porque tienen la misma dirección y sentido, por lo tanto, la ecuación (9.24) se transforma para quedar en la ecuación (9.25).

$$-10I_2 + 20I_1 = 0 \quad (9.25)$$

En la malla de I_2 aplicamos la ley de voltajes de Kirchhoff y resulta la ecuación (9.26).

$$40I_2 + 50 = 0 \quad (9.26)$$

De la ecuación (9.26) despejamos el valor de la corriente I_2 , resultando:

$$I_2 = \frac{-50}{40}$$

$$I_2 = -1.25 \text{ A} \quad (9.27)$$

Sustituimos el valor de la corriente I_2 en la ecuación (9.25) para después despejar el valor de la corriente I_1 , resultando:

$$-10I_2 + 20I_1 = 0$$

$$I_1 = \frac{-12.5}{20}$$

$$-10(-1.25) + 20I_1 = 0$$

$$I_1 = -0.625 \text{ A} \quad (9.28)$$

Sustituimos en la ecuación (9.23) los valores de las corrientes I_1 e I_2 calculadas para obtener el valor de la corriente de corto circuito I_{cc} , resultando:

$$I_{cc} = I_1 - I_2$$

$$I_{cc} = (-0.625 \text{ A}) - (-1.25 \text{ A})$$

$$I_{cc} = 0.625 \text{ A}$$

Con la corriente de corto circuito I_{cc} y el voltaje de Thévenin V_{Th} utilizamos la ecuación (8.1) para calcular la resistencia de Thévenin R_{Th} , resultando:

$$R_{Th} = \frac{V_{Th}}{I_{cc}} = \frac{10 \text{ V}}{0.625 \text{ A}}$$

$$R_{Th} = 16 \Omega$$

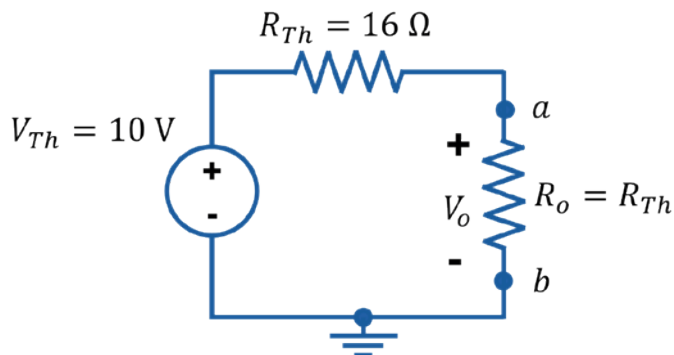


Figura 9.17. Circuito equivalente de Thévenin para calcular la máxima transferencia de potencia.

De acuerdo con el teorema de máxima transferencia de potencia, la resistencia que asegura la máxima transferencia es el valor de la resistencia de Thévenin, por lo tanto, la resistencia de carga debe ser $R_o = 16 \Omega$.

- a) El voltaje V_o en la resistencia de carga es la mitad del voltaje V_{Th} , resultando:

$$V_o = \frac{V_{Th}}{2}$$

$$V_o = 5 \text{ V}$$

Para calcular la potencia máxima que se transfiere a la resistencia utilizamos la ecuación (9.6), resultando:

$$P_o = \frac{V_{Th}^2}{4R_o} = \frac{(10 \text{ V})^2}{4(16 \Omega)}$$

$$P_o = 1.56 \text{ W}$$

RESUMEN Y CONCLUSIÓN

El teorema de máxima transferencia de potencia se comenzó a estudiar para determinar cuál debería ser el valor óptimo de una resistencia de carga variable y poder transferirle la máxima potencia desde una batería o fuente de voltaje real o práctica. El teorema se generalizó y, junto con el teorema de Thévenin, estableció que la máxima potencia que se puede transferir de una red a una resistencia variable es aquella en la que la resistencia de carga sea igual que la resistencia de Thévenin. La potencia máxima que se puede transferir a una resistencia de carga es la misma que se consume por parte de la resistencia interna de la batería o de la resistencia equivalente de Thévenin, por lo tanto, el rendimiento que se alcanza en ese punto de operación de la potencia que se genera es apenas del 50 %.

Por otro lado, cuando la resistencia de carga es fija y lo que se puede modificar es la resistencia interna de la red, entonces lo que se busca es la máxima absorción de potencia de la red. Ésta se logra cuando la resistencia interna de la red se puede minimizar al límite –teóricamente, hacer cero–, de este modo la potencia en la carga aumenta significativamente.

En el capítulo, se resolvieron ejercicios suficientes para ejemplificar la aplicación del teorema de máxima transferencia de potencia y para explicar cómo opera la máxima absorción de potencia de una red o circuito. Dentro de los ejemplos se incluyó un ejemplo en el que también se utilizaron fuentes dependientes.

PROBLEMAS PROPUESTOS

A continuación, se proponen una serie de problemas para resolver utilizando el teorema de máxima transferencia de potencia.

Prob. 9.1. Si cualquier valor arbitrario puede elegirse para R_o en el circuito de la Figura 9.18, ¿cuál es la potencia máxima que podría disiparse en R_o ?

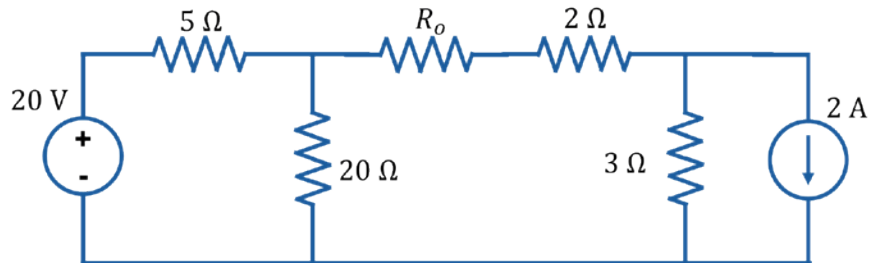


Figura 9.18.

(Sol. 13.44 W).

Prob. 9.2. En el circuito de la Figura 9.19, ¿Cuánto vale la potencia que disipa la resistencia de 5Ω ? ¿A qué valor debe cambiar esta resistencia para transferirle la potencia máxima posible?, ¿Cuál sería el valor de esta potencia máxima?

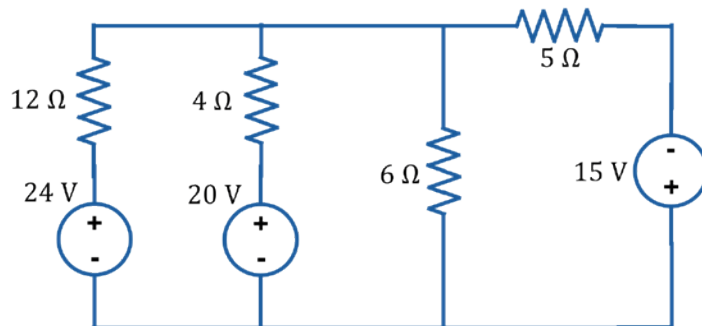


Figura 9.19.

(Sol. 85.81 W, 2Ω , 105.12 W).

Prob. 9.3. Si en el Ejemplo 9.1 se mantiene constante el valor de R_o calculado, y si también se mantiene la proporción entre R_1 y R_2 para que el voltaje de Thévenin resulte igual que en el problema original, ¿qué nuevos valores de R_1 y R_2 hacen que la potencia absorbida por la resistencia de carga R_o sea el triple del valor que se obtuvo inicialmente?

(Sol. $R_1 = 928.2 \text{ m}\Omega$, $R_2 = 232 \text{ m}\Omega$).

Prob. 9.4. En el circuito de la Figura 9.20: (a) calcular el valor de R_o , para el cual puede entregarse una potencia máxima, y (b) obtener la tensión en R_o en ese determinado caso (con la referencia + en la parte superior de la resistencia).

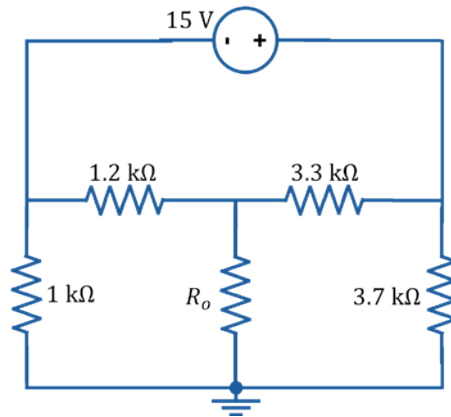


Figura 9.20.

(Sol. $1.66 \text{ k}\Omega$, 404.25 mV).

Prob. 9.5. Obtener el circuito equivalente de Thévenin visto por las terminales a y b en el circuito de la Figura 9.21 y determinar cuánto vale la potencia máxima que se puede extraer de él.

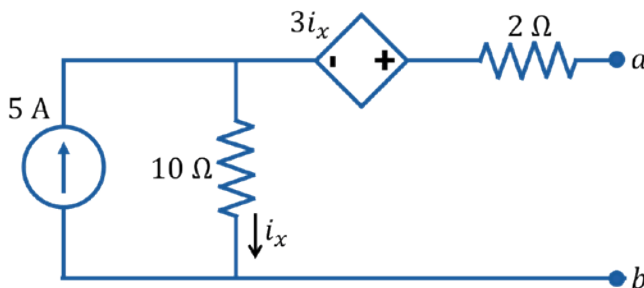


Figura 9.21.

(Sol. $V_{Th} = 65 \text{ V}$, $R_{Th} = 15 \Omega$ y $P_{max} = 70.41 \text{ W}$).

Prob. 9.6. El circuito de la Figura 9.22 está formado por dos Etapas. La *Etapa 1* debe entregar la potencia a la *Etapa 2*. La *Etapa 2* está simplificada con una resistencia de entrada ajustable R_{adj} , que se encarga de modificar el valor de resistencia de entrada para poder absorber la potencia máxima posible de la *Etapa 1*. ¿Cuál es el valor de la resistencia R_{adj} para que la *Etapa 1* transfiera la máxima potencia a la *Etapa 2*?, ¿cuál es el valor de la potencia máxima que se puede transferir de la *Etapa 1* a la *Etapa 2*?, ¿cuánta potencia recibirá la *Etapa 2* si R_{adj} se ajusta a su valor más bajo?, y ¿cuánta potencia recibirá la *Etapa 2* si R_{adj} se ajusta a su valor más alto?

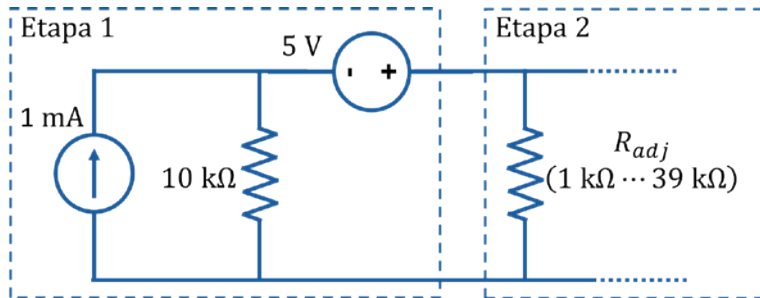


Figura 9.22.

(Sol. $10\text{ k}\Omega$, 5.625 mW , 1.855 mW , 3.65 mW).

REFERENCIAS DEL CAPÍTULO

- Boylestad, R. & Nashelsky, L. (2009). *Electrónica: Teoría de circuitos y dispositivos electrónicos*. (R. Navarro Solís, Trans; L. M. Cruz Castillo, Ed.; F. Rodríguez Ramírez, revisor técnico). México: Pearson Educación, Prentice Hall.
- Calvert, J. B. (2001). Jacobi's Theorem. *Engineering and Technology*. <https://web.archive.org/web/20070410075743/http://www.du.edu/~jcalvert/tech/jacobi.htm>
- Kong, C. S. (1995). A general maximum power transfer theorem. *IEEE Transactions on Education*, 38(3), 296-298. <https://doi.org/10.1109/13.406510>
- Nambiar, K. K. (1969). A generalization of the maximum power transfer theorem. *Proceedings of the IEEE*, 57(7), 1339-1340. <https://doi.org/10.1109/PROC.1969.7266>
- Savant, C. J. Jr., Carpenter, G. L. & Roder, M. S. (2000). *Diseño electrónico: circuitos y sistemas*. (G. Nagore Cázares, Trans.; J. L. Sánchez Téllez, revisión técnico). México: Prentice Hall.



ANÁLISIS DE CIRCUITOS
RL Y RC

10

INTRODUCCIÓN

El uso de capacitores e inductores en los circuitos eléctricos es muy común, de hecho, bastante importante y necesario para las aplicaciones en la electricidad y la electrónica. Para analizar circuitos en los que aparecen inductores y capacitores, es necesario primero conocer la función escalón unitario y saber qué son o a qué se refieren las condiciones iniciales (C.I.) en inductores y capacitores.

FUNCIÓN ESCALÓN UNITARIO

En ingeniería y teoría de control es común encontrar funciones que corresponden a estados de *sí o no*, o bien *activo o inactivo* (Geovanni, 2015). Por ejemplo, una fuerza externa que actúa sobre un sistema mecánico o una tensión eléctrica aplicada a un circuito puede tener que suspenderse después de cierto tiempo. Para tratar de forma efectiva estas funciones discontinuas conviene introducir una función especial llamada función escalón unitario $u(t)$. La función escalón unitario es una función matemática adimensional con la que se puede multiplicar cualquier variable física como corriente, voltaje, potencia, fuerza, etc. (Ricardo, 2010). La ecuación (10.1) define matemáticamente a la función escalón unitario como 0 para ($t < 0$) y como 1 para ($t > 0$).

$$u(t) = \begin{cases} 0; & t < 0 \\ 1; & t > 0 \end{cases} \quad (10.1)$$

En la Figura 10.1 se muestra gráficamente la función escalón unitario $u(t)$.

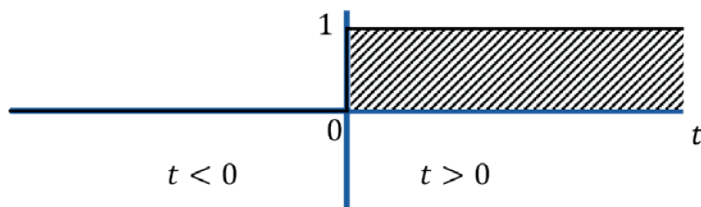
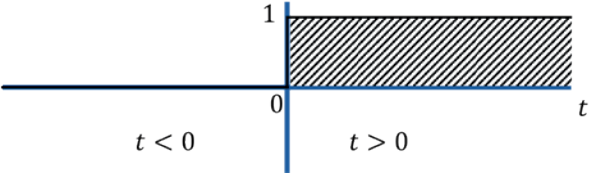
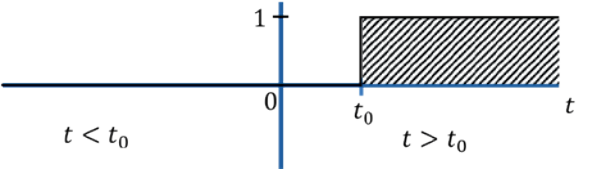
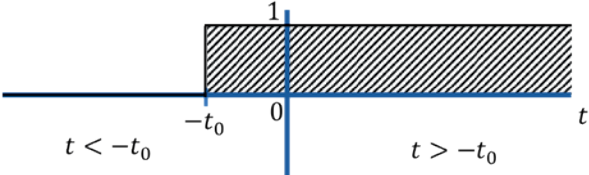
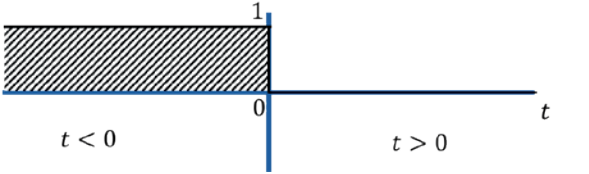
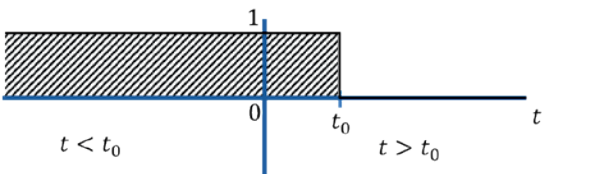
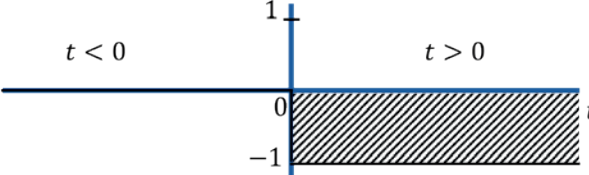


Figura 10.1. Forma gráfica de la función escalón unitario $u(t)$.

La función escalón unitario se puede utilizar de diversas formas para el análisis de los circuitos eléctricos. En la Tabla 10.1 se muestran algunas de las maneras en las que se puede encontrar este tipo de función, así como la forma matemática de representarlas.

Tabla 10.1. Distintas formas de utilizar a la función escalón unitario

| Función escalón | Representación gráfica |
|---|--|
| $u(t) = \begin{cases} 0; & t < 0 \\ 1; & t > 0 \end{cases}$ |  |
| $u(t - t_0) = \begin{cases} 0; & t < t_0 \\ 1; & t > t_0 \end{cases}$ |  |
| $u(t + t_0) = \begin{cases} 0; & t < -t_0 \\ 1; & t > -t_0 \end{cases}$ |  |
| $u(-t) = \begin{cases} 1; & t < 0 \\ 0; & t > 0 \end{cases}$ |  |
| $u(-t - t_0)$ |  |
| $-u(t)$ |  |

De igual manera, matemáticamente se puede extraer información de las gráficas o de las ecuaciones de la función escalón unitario si es que el problema así lo pide. Por ejemplo, de la Figura

10.1 el valor de cero por la derecha ($t = 0^+$) se puede escribir como se indica en la ecuación (10.2) y su valor corresponde a 1. De la misma manera, de la Figura 10.1 el valor de cero por la izquierda ($t = 0^-$) se puede escribir como se indica en la ecuación (10.3) y su valor corresponde con 0.

$$u(0^+) = 1 \quad (10.2)$$

$$u(0^-) = 0 \quad (10.3)$$

FUNCIÓN PULSO RECTANGULAR

Algunos sistemas mecánicos suelen estar sometidos a una fuerza externa (o a un voltaje eléctrico en el caso de los circuitos) de gran magnitud, que solamente actúa durante un tiempo muy corto. Por ejemplo, una descarga eléctrica sobre el ala de un avión; un cuerpo sujeto a un resorte que recibe un fuerte golpe con un martillo; una pelota (de golf o de tenis), inicialmente en reposo, es enviada velozmente por los aires al ser golpeada con un objeto como un bastón de golf o una raqueta de tenis. La función pulso rectangular puede servir como un modelo para describir el comportamiento de tal fuerza sobre la pelota, el cuerpo, el ala de un avión (Geovanni, 2015). La ecuación (10.4) define matemáticamente a la función pulso rectangular.

$$[u(t - t_0) - u(t - t_1)] = \begin{cases} 0; & t < t_0 \\ 1; & t_0 < t < t_1 \\ 0; & t > t_1 \end{cases} \quad (10.4)$$

En la Figura 10.2 se muestra gráficamente la función pulso rectangular.

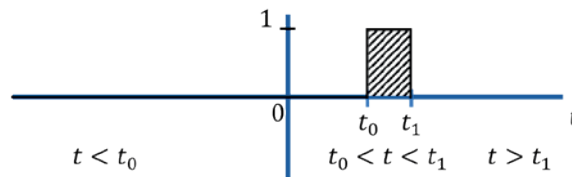


Figura 10.2. Función pulso rectangular.

La función escalón unitario es de gran utilidad cuando se analizan circuitos eléctricos, ya que ayuda a simplificar la forma de representar una fuente de alimentación que se conecta o se desconecta de un circuito eléctrico. Por ejemplo, en la Figura 10.3 se muestra un *switch* o interruptor que se activa en el instante de tiempo ($t = 0$ s), en ese momento se conecta la fuente de voltaje a la resistencia R y comienza a circular la corriente a través de ella.

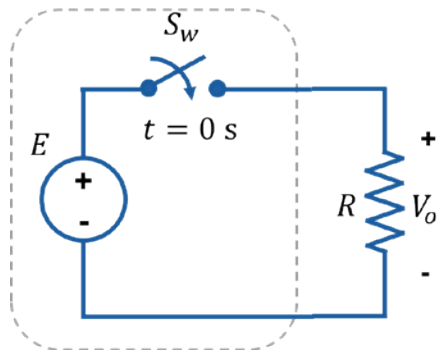


Figura 10.3. Fuente de voltaje con un switch S_w que se conecta en $t = 0 \text{ s}$.

La forma de representar lo mismo, pero utilizando la función escalón unitario se muestra en la Figura 10.4. En esta representación, la función escalón unitario se multiplica por el valor de la fuente de voltaje y juntas sustituyen a acción del interruptor.

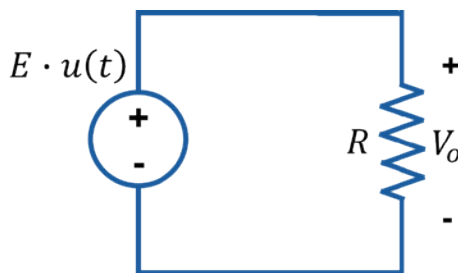


Figura 10.4. Fuente de voltaje con función escalón unitario conectada a una resistencia.

En ambos casos, con el interruptor o con la función escalón unitario, el voltaje de salida V_o en la resistencia R es el que se muestra en la Figura 10.5.

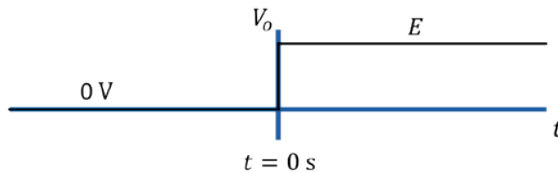


Figura 10.5. Voltaje V_o en la resistencia de salida R .

A continuación, se presentan algunos ejemplos de la aplicación de la función escalón unitario utilizando fuentes de voltaje o fuentes de corriente.

Ejemplo 10-1. Construir la gráfica de la función escalón unitario de voltaje expresada por $5u(t)$ V.

Respuesta.

Se trata de una señal de voltaje que vale 0 V para ($t < 0$) y 5 V para ($t > 0$) tal como se representa en la Figura 10.6.

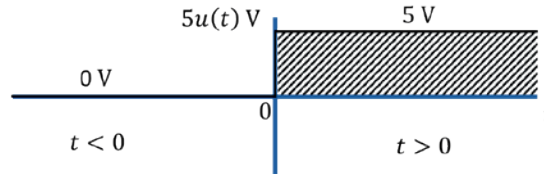


Figura 10.6. Función escalón unitario $u(t)$ combinada con una señal de voltaje de 5 V.

Ejemplo 10-2. Construir la gráfica la función escalón unitario de corriente expresada por $3u(t - 2)$ A.

Respuesta.

Se trata de una señal de corriente que vale 0 A para ($t < 2$) y 3 A para ($t > 2$) tal como se representa en la Figura 10.7.

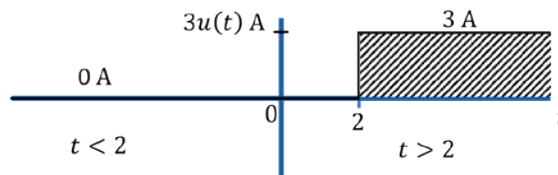


Figura 10.7. Función escalón unitario $u(t)$ combinada con una señal de voltaje de 3 A desplazada 2 segundos.

Ejemplo 10-3. Multiplicar las dos señales de los ejemplos anteriores y graficar la función que resulta.

Respuesta.

Se trata de una señal de voltaje multiplicada por una señal de corriente, por lo tanto, el resultado será una señal de potencia. Obsérvese que la potencia es de 0 W cuando la corriente o el voltaje son de 0 A ó de 0 V y de 15 W cuando las dos señales son distintas de cero simultáneamente. El tiempo en el que ambas señales son distintas de cero ocurre cuando ($t > 2$), tal como se muestra en la Figura 10.8.

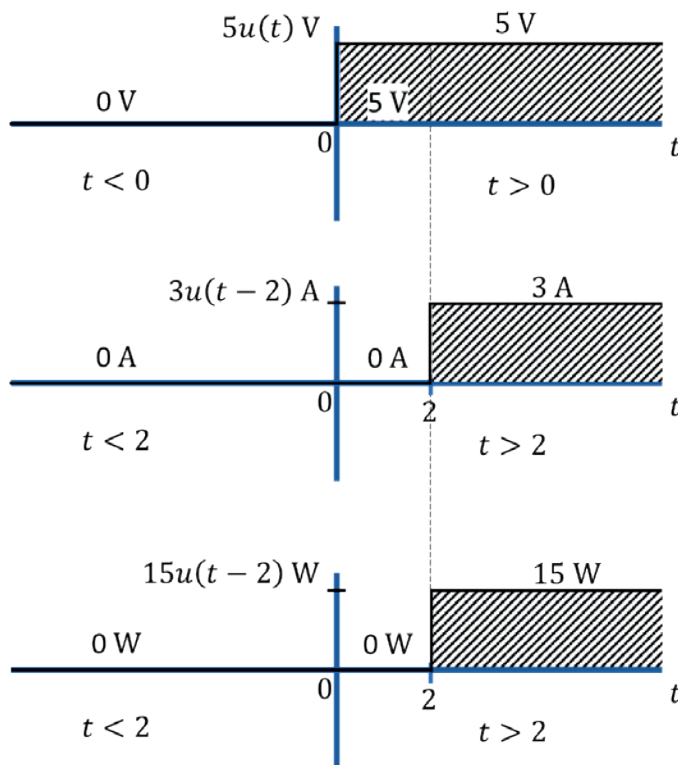


Figura 10.8. Resultado de multiplicar una función de voltaje por una función de corriente, obteniendo una función escalón de potencia es de 15 W para ($t > 2$).

Ejemplo 10-4. A partir de la señal que se muestra en la Figura 10.9 obtener la función escalón que define a esta señal de voltaje.

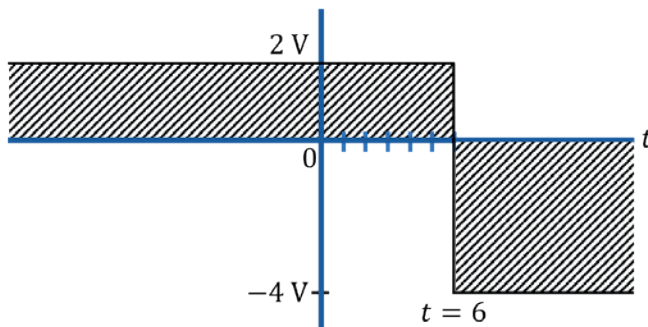


Figura 10.9. Señal de voltaje para obtener la función escalón.

Respuesta.

Es una señal que vale 2 V constantes para todos los tiempos ($t < 6$) y después pasa su valor a -4 V para todos los tiempos ($t > 6$). Por lo tanto, al expresarla matemáticamente resulta la ecuación (10.5).

$$[2u(-t - 6) V - 4u(t - 6) V] = \begin{cases} 2 V; & t < 6 \\ -4 V; & t > 6 \end{cases} \quad (10.5)$$

FUNCIONAMIENTO PERMANENTE DEL INDUCTOR Y CAPACITOR CON CORRIENTE Y VOLTAJE CONSTANTES

Se analiza cómo se comporta el inductor y el capacitor, a partir de las ecuaciones del capítulo 1 que definen el funcionamiento matemático del inductor y el funcionamiento del capacitor. Si sólo se utilizan fuentes de voltaje constantes y únicamente circulan corrientes constantes a través del inductor y del capacitor, se analiza cuál es el comportamiento de estos elementos en tales condiciones. Es importante comprender que para que un inductor y/o un capacitor operen con valores constantes de corriente o voltaje, el circuito en el que están conectados debe llevar mucho tiempo en ese estado o en esas condiciones (teóricamente, un tiempo infinito $t = \infty$) y se dice que está operando en estado “*permanente o estable*”.

Inductor en estado estable o permanente

Para calcular el voltaje v_L en las terminales del inductor, se multiplica la inductancia L por la derivada de la corriente i_L que circula a través de él con respecto del tiempo, tal como se muestra en la Figura 10.10. Pero, si la corriente i_L en el inductor es un valor de corriente constante I , entonces la derivada de esta corriente valdrá 0. Eso significa que, en estado permanente, mientras esté circulando una corriente de valor constante por el inductor, el voltaje v_L en las terminales de éste será de 0 V. Esta secuencia de cálculos se muestra en las ecuaciones (10.6), (10.7) y (10.8).

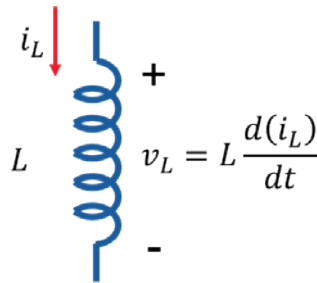


Figura 10.10. Inductor y la ecuación para calcular el voltaje en sus terminales.

$$v_L = L \frac{d(i_L)}{dt} \quad (10.6)$$

$$i_L = I = cte \quad (10.7)$$

$$v_L = L \frac{d(I)}{dt} = 0 \text{ V} \quad (10.8)$$

Físicamente el inductor operando en estas condiciones eléctricas es equivalente a considerarlo como si se tratase de un simple conductor sin caída de tensión o como si el elemento funcionara como un corto circuito, tal como se observa en la Figura 10.11.

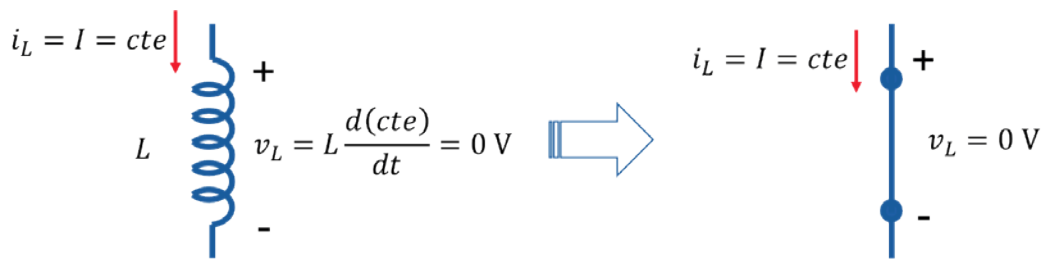


Figura 10.11. Comportamiento del inductor en estado estable o permanente por el cual circula una corriente i_L constante.

Capacitor en estado estable o permanente

Para calcular la corriente i_C que circula a través del capacitor, se multiplica la capacitancia C por la derivada con respecto del tiempo del voltaje v_C que se aplica a sus terminales, tal como se muestra en la Figura 10.12. Pero, si el voltaje v_C en el capacitor es un valor de voltaje constante V , entonces la derivada de este voltaje valdrá 0. Eso significa que, mientras el capacitor esté alimentado por un valor de voltaje constante, la corriente i_C , en estado estable o permanente, a través del capacitor, será de 0 A. Esta secuencia de análisis se muestra en las ecuaciones (10.9), (10.10) y (10.11).

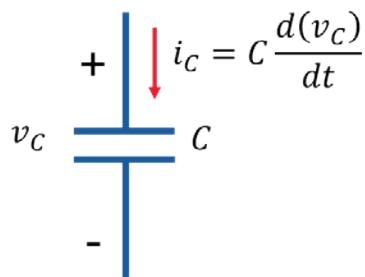


Figura 10.12. Ecuación para calcular la corriente a través del capacitor.

$$i_C = C \frac{d(v_C)}{dt} \quad (10.9)$$

$$v_C = V = cte \quad (10.10)$$

$$i_C = C \frac{d(V)}{dt} = 0 \text{ A} \quad (10.11)$$

Físicamente el capacitor operando en estas condiciones eléctricas es equivalente a considerarlo como si se tratara de un simple circuito abierto con un voltaje entre sus terminales y sin corriente circulando a través de él, tal como se observa en la Figura 10.13.

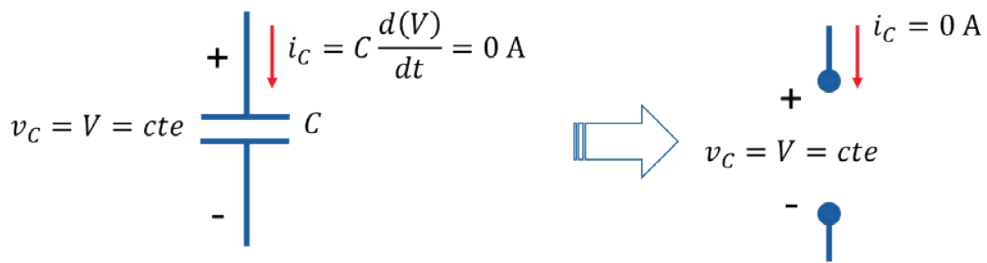


Figura 10.13. Comportamiento del capacitor alimentado por un voltaje v_C constante.

FUNCIONAMIENTO INICIAL DEL INDUCTOR Y CAPACITOR CON CORRIENTE Y VOLTAJE CONSTANTES

Para que el inductor o el capacitor se encuentren funcionando de forma permanente en un tiempo muy prolongado, teóricamente en un tiempo infinito ($t = \infty$), primero tuvieron que haber iniciado su funcionamiento a partir de un estado permanente o estable, que muy probablemente haya sido desde 0 V para el caso del voltaje en el capacitor y/o desde 0 A para el caso de la corriente en el inductor.

Inductor en estado inicial

En la Figura 10.14 se muestra una fuente de alimentación V_T conectada con un interruptor (S_w) para alimentar a un inductor L conectado en serie con una resistencia R . Antes de que la fuente de alimentación V_T sea conectada al circuito, se observa que la corriente en la resistencia y el inductor es nula ($i_L = 0 \text{ A}$). Una vez que se cierra el interruptor en ($t = 0 \text{ s}$), el inductor se comporta instantáneamente como un circuito abierto, tal como se muestra en la Figura 10.15. Lo anterior se debe al funcionamiento natural del inductor, que no permite cambios bruscos o súbitos en el valor de la corriente que circula a través de él.

En general, un inductor tiende a mantener sin cambios la dirección y magnitud de la corriente que circula a través de él y lo mismo ocurrirá si por el inductor circula un valor distinto de (0 A) de corriente. El inductor intentará mantener la misma dirección, magnitud y sentido de la corriente.

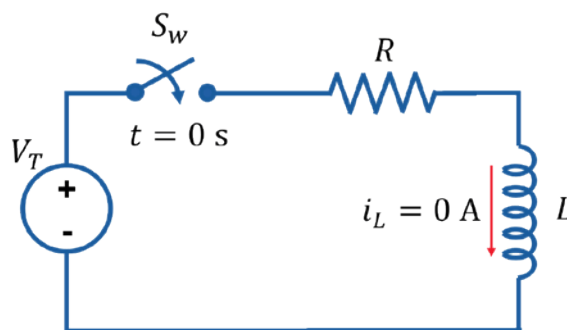


Figura 10.14. Circuito con inductor y resistencia antes de cerrar el interruptor y en el que $i_L = 0 \text{ A}$.

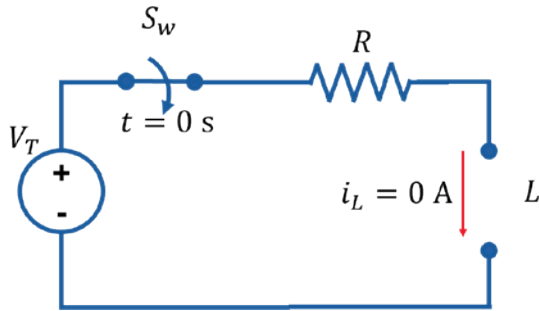


Figura 10.15. Comportamiento instantáneo del inductor para mantener la corriente en su mismo valor ($i_L = 0$ A) en el instante justo que se cierra el interruptor.

Capacitor en estado inicial

En la Figura 10.16 se muestra una fuente de alimentación V_T conectada con un interruptor (S_w) para alimentar a un capacitor C conectado en serie con una resistencia R . Antes de que la fuente de alimentación V_T sea conectada al circuito, se observa que el voltaje en el capacitor es nulo ($v_C = 0$ V). Una vez que se cierra el interruptor en ($t = 0$ s), el capacitor se comporta instantáneamente como un corto circuito, tal como se muestra en la Figura 10.17. Lo anterior se debe al funcionamiento natural del capacitor, que no permite cambios bruscos o súbitos en el valor del voltaje que tiene entre sus terminales.

En general, un capacitor tiende a mantener sin cambios la polaridad y la magnitud del voltaje entre sus terminales y lo mismo ocurrirá si en el capacitor existe un valor distinto de (0 V) de voltaje. El capacitor intentará mantener la misma polaridad y magnitud del voltaje en sus terminales.

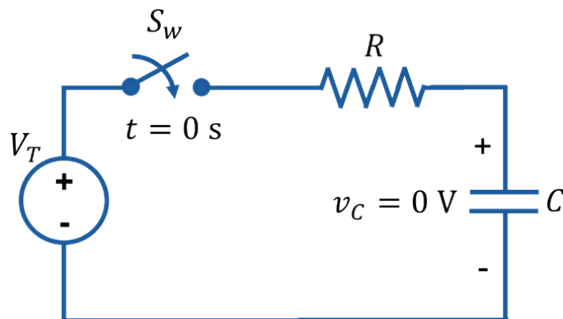


Figura 10.16. Circuito con capacitor y resistencia antes de cerrar el interruptor en el que $v_C = 0$ V.

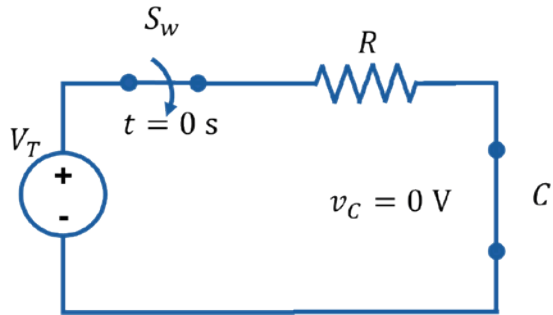


Figura 10.17. Comportamiento instantáneo del capacitor para mantener el voltaje en su mismo valor ($v_C = 0 \text{ V}$) en el instante justo que se cierra el interruptor.

CORRIENTE INICIAL Y PERMANENTE PARA CIRCUITOS CON RESISTENCIAS, INDUCTORES Y CAPACITORES

En resumen, el funcionamiento inicial y permanente de inductor y capacitor cuando son alimentados con voltajes y corrientes de corriente directa se muestran en la Tabla 10.2.

Tabla 10.2. Resumen del comportamiento del inductor y capacitor para $t = 0 \text{ s}$ y para $t = \infty$

| Elemento | Comportamiento en ($t = 0 \text{ s}$) | Comportamiento en ($t = \infty$) |
|----------|---|------------------------------------|
| | | |
| | | |

Con los comportamientos de inductores y capacitores se puede calcular la corriente y el voltaje iniciales, así como la corriente y voltaje permanentes en los circuitos que contengan resistencias, inductores y capacitores.

Ejemplo 10-5. A partir del circuito que se presenta en la Figura 10.18 calcular la corriente i_T que circula por la fuente de alimentación V_T :

- En el instante antes de cerrar el interruptor S_W , es decir, para $(t = 0^- \text{ s})$.
- En el instante después de cerrar el interruptor S_W , es decir, para $(t = 0^+ \text{ s})$.
- Después que el interruptor S_W ha permanecido cerrado por mucho tiempo, teóricamente para $(t = \infty)$.
- Construir una gráfica de la corriente i_T con los datos que se obtengan.

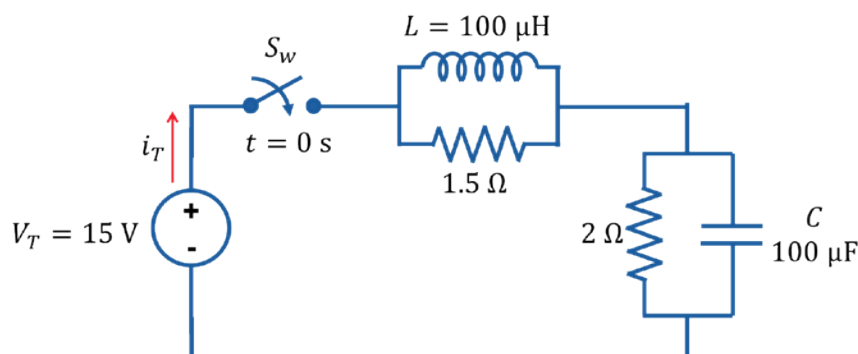


Figura 10.18. Circuito para calcular los distintos valores de corriente en la fuente de alimentación para funcionamiento inicial y para funcionamiento permanente.

Respuesta.

Para este tipo de circuitos, por el momento lo único que se ha estudiado es el funcionamiento inicial ($t = 0 \text{ s}$) y el funcionamiento permanente ($t = \infty$). Para el resto de los tiempos no se ha establecido aún ningún tipo de comportamiento.

- Antes que el interruptor S_W se cierre no se observa ningún tipo de conexión que indique que está circulando alguna corriente por la fuente de alimentación o por alguno de los elementos que se encuentran conectados. Por lo tanto, la corriente de la fuente de alimentación es de 0 A para el instante anterior a cerrar el interruptor S_W .

$$i_T(0^-) = 0 \text{ A}$$

- Cuando el interruptor S_W se cierra, el circuito equivalente que se obtiene es el que se muestra en la Figura 10.19. Sin embargo, este circuito se debe modificar para el funcionamiento inicial, es decir, para cuando $(t = 0 \text{ s})$, el cual nos ayudará a calcular la corriente i_T que se busca para $(t = 0^+ \text{ s})$. En este funcionamiento, y de acuerdo con la Tabla 10.2, el inductor L se comporta como un circuito abierto y el capacitor C como un corto circuito, por lo tanto, el circuito equivalente que resulta se muestra en la Figura 10.20.

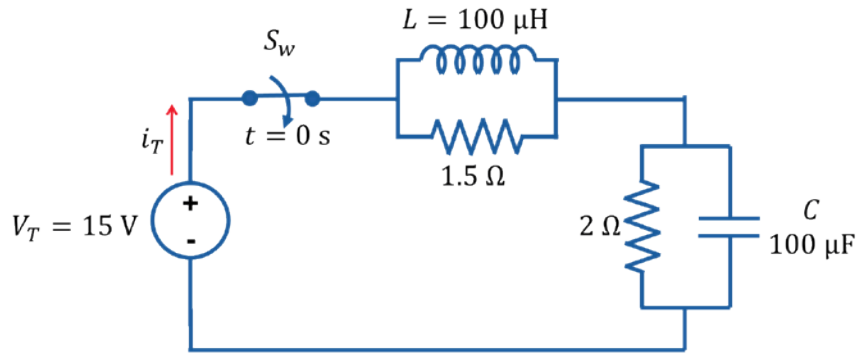


Figura 10.19. Circuito que resulta después de cerrar el interruptor.

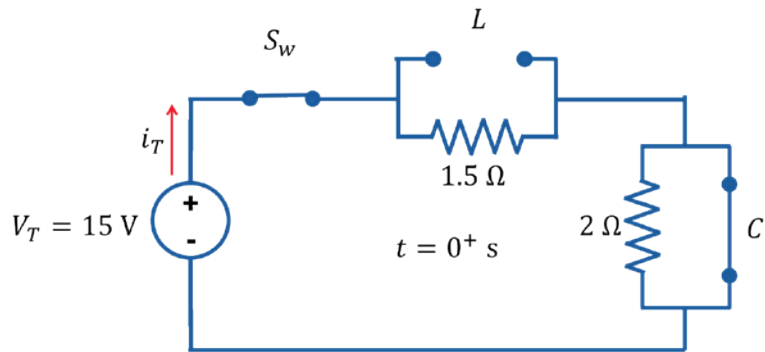


Figura 10.20. Comportamiento de inductor y capacitor para $t = 0^+ s$.

En el circuito de la Figura 10.20 se puede observar que la corriente i_T circula por la resistencia de 1.5Ω y a través de capacitor C , que se encuentra instantáneamente en corto circuito, eliminando a la resistencia de 2Ω . Por lo tanto, la corriente i_T se calcula con la fuente de voltaje V_T y con la resistencia de 1.5Ω con la ecuación (10.12).

$$i_L = \frac{15 \text{ V}}{1.5 \Omega}$$

$$i_L = 10 \text{ A} \quad (10.12)$$

- a) Para calcular la corriente i_T después que el interruptor S_w ha permanecido cerrado por mucho tiempo, teóricamente para $(t = \infty)$, el circuito se modifica para quedar como aparece en la Figura 10.21. En este funcionamiento, y de acuerdo con la Tabla 10.2, el inductor L se comporta como un corto circuito y el capacitor C como un circuito abierto.

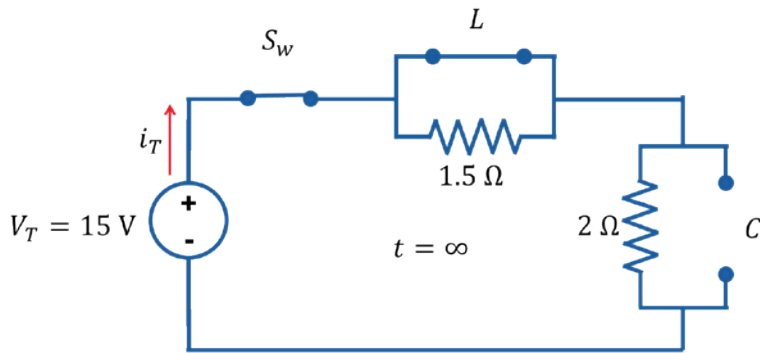


Figura 10.21. Comportamiento de inductor y capacitor para $t = \infty$.

En el circuito de la Figura 10.21 se puede observar que ahora la corriente circula a través del inductor L y por la resistencia de 2Ω , ya que el inductor se comporta como un corto circuito, eliminando a la resistencia de 1.5Ω . Por lo tanto, la corriente i_T se calcula con la fuente de voltaje V_T y con la resistencia de 2Ω con la ecuación (10.13).

$$i_L = \frac{15 \text{ V}}{2 \Omega}$$

$$i_L = 7.5 \text{ A} \quad (10.13)$$

- a) Por el momento no es posible saber cómo es la evolución de la corriente para todos los instantes de tiempo para $(t > 0^+ s)$. Sin embargo, con los tres valores de corriente de i_T que se acaban de calcular, es posible construir una gráfica (incompleta) del comportamiento de la corriente i_T . Por ejemplo, se puede deducir que la corriente para $(t < 0 s)$ es la misma que para $(t = 0^- s)$, es decir 0 A , porque el circuito es el mismo hasta que se conecta el interruptor. La corriente para $(t = 0 s)$ es igual que la corriente para $(t > 0^+ s)$, es decir 10 A , pero no para valores mayores que 0^+ , porque no se ha realizado un análisis del comportamiento del circuito para ese tiempo. Lo que sí se pudo calcular es el valor de la corriente i_T , para un tiempo mucho mayor que 0^+ , es decir, para $(t \gg 0 s)$ que se pueda considerar como $(t = \infty)$, que resultó de 7.5 A . Con esta información, se construye la gráfica de la Figura 10.22.

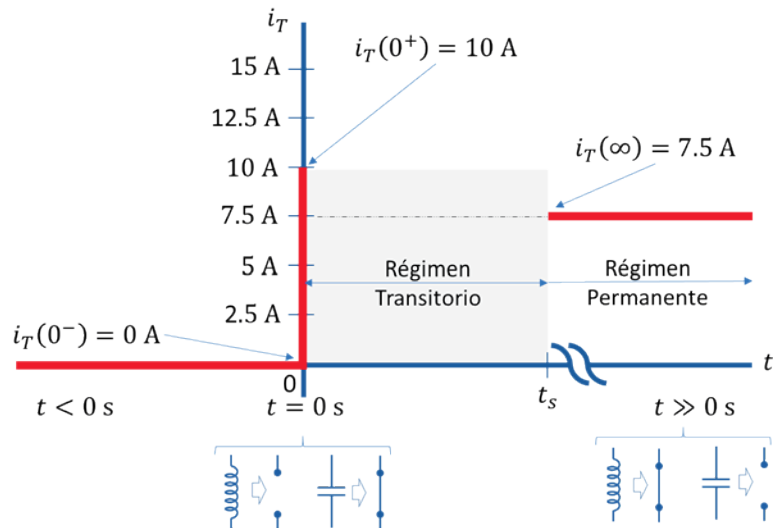


Figura 10.22. Gráfica de los valores de corriente calculados para funcionamiento inicial y permanente de inductor y capacitor.

En la gráfica de la corriente obtenida se observa que esta pasa de 0 A, para un tiempo ($t < 0$ s), a un valor de 10 A para ($t < 0^+$ s). Sin embargo, a partir de ese momento y hasta un tiempo t_s que se pueda considerar lo suficientemente grande ($t \gg 0$ s), no es posible saber cuál es el comportamiento de la corriente (por ahora). Ese tiempo que transcurre desde ($t = 0$ s) hasta t_s en el que la corriente alcanza un valor permanente se le llama “Régimen Transitorio” y al tiempo a partir del cual la corriente ya no varía ($t > t_s$), se le conoce como “Régimen Permanente”.

CONDICIONES INICIALES DE CORRIENTE Y VOLTAJE

En el análisis de circuitos en los que se incluyen inductores o capacitores es necesario conocer o saber determinar las condiciones iniciales (C.I.) para resolver un problema adecuadamente. Las condiciones iniciales hacen referencia a la corriente en el inductor I_0 o al voltaje en el capacitor V_{C0} en el instante que se produce una transición. Las transiciones generalmente ocurren cuando un interruptor S_W se cierra o se abre en un instante de tiempo normalmente establecido como ($t = 0$) de ahí el subíndice 0 para las condiciones iniciales.

Se les llama o conoce como condiciones iniciales porque son los valores de corriente o voltaje que tienen el inductor y el capacitor al momento de conectarse o desconectarse en un circuito. En esencia, para conocer la condición inicial de un inductor o un capacitor, sólo se debe calcular qué valor tiene de corriente o voltaje en el instante de tiempo cuando se conecta al circuito o cuando ocurre un cambio en las condiciones de operación de éste.

La forma para calcular las condiciones iniciales debe hacerse tomando en cuenta el instante de tiempo en el que se encuentre operando el circuito: puede ser el funcionamiento inicial, en el régimen transitorio o mientras funciona en régimen permanente.

Matemáticamente, la condición inicial de voltaje V_{C0} en un capacitor determina el voltaje que tiene en sus terminales el ca-

pacitor C en el tiempo ($t = 0$) y se expresa tal como aparece en la ecuación (10.14). La condición inicial de voltaje en un capacitor puede ser 0 V , un valor positivo o un valor negativo y se anota con su respectiva magnitud y polaridad en el capacitor C que se está analizando o que se pretende analizar.

$$v_C(0) = V_{C0} \quad (10.14)$$

Matemáticamente la condición inicial de corriente I_0 en un inductor se determina como la corriente que circula a través de inductor L en el tiempo ($t = 0$) y se expresa tal como aparece en la ecuación (10.15). La condición inicial de corriente en un inductor puede ser 0 A , un valor positivo o un valor negativo y se anota con su respectiva magnitud y dirección en el inductor L que se está analizando o que se pretende analizar.

$$i_L(0) = I_0 \quad (10.15)$$

ACCIONAMIENTO DEL CIRCUITO RC

A partir de la Figura 10.23 se obtiene la solución del circuito RC para poder calcular el voltaje V_C para ($t > 0$). Hay que considerar que al momento de accionar el interruptor S_W en el instante $t = 0$, el capacitor cuenta con la condición inicial (C.I.) de voltaje expresada en la ecuación (10.14) y con la polaridad indicada en la Figura 10.23.

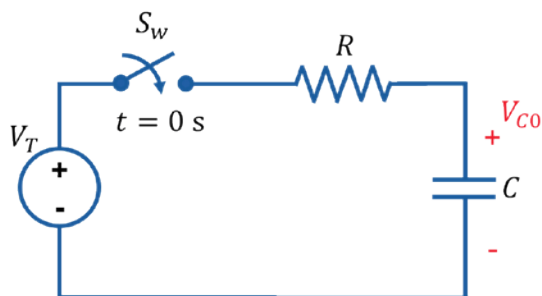


Figura 10.23. Circuito RC para calcular la solución del voltaje v_C para $t > 0$.

Al cerrar el interruptor en el tiempo $t = 0$ resulta el circuito de la Figura 10.24.

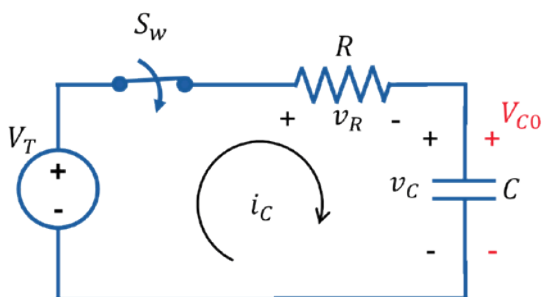


Figura 10.24 Circuito RC una vez que el interruptor S_W ha sido accionado en el tiempo $t = 0$.

Obsérvese que resulta un circuito RC en serie, por lo tanto, la corriente i_C que circula en el circuito es la misma también para la resistencia R y para la fuente de alimentación V_T . Aplicamos la ley de voltajes de Kirchhoff a los elementos del circuito y nos resulta la ecuación (10.16).

$$-V_T + v_R + v_C = 0 \quad (10.16)$$

Reacomodamos la ecuación pasando el voltaje de alimentación al segundo miembro.

$$v_R + v_C = V_T \quad (10.17)$$

Reescribimos el voltaje de la resistencia R de la ecuación (10.17) en términos de la corriente i_C resultando (10.18).

$$Ri_C + v_C = V_T \quad (10.18)$$

Sustituimos la ecuación (10.9) en la ecuación (10.18) y resulta la ecuación (10.19), que es una ecuación diferencial, lineal de primer orden, de primer grado y no homogénea. En esta ecuación diferencial, la variable para la cual se debe resolver es para el voltaje v_C del capacitor.

$$R \left(C \frac{d(v_C)}{dt} \right) + v_C = V_T$$

$$RC \frac{d(v_C)}{dt} + v_C = V_T \quad (10.19)$$

Para resolver la ecuación (10.19) se puede aplicar cualquiera de los métodos estudiados en el curso de “Ecuaciones Diferenciales” pero, en este caso y por su simplicidad de aplicación, se resuelve empleando el método de “Variables separables”.

Separamos las variables para dejar la variable v_C en el primer miembro y la variable del tiempo t en el segundo, resultando la ecuación (10.20).

$$RC \frac{d(v_C)}{dt} = V_T - v_C$$

$$\frac{d(v_C)}{dt} = \frac{V_T - v_C}{RC}$$

$$\frac{d(v_C)}{V_T - v_C} = \frac{1}{RC} dt \quad (10.20)$$

Integramos miembro a miembro la ecuación (10.20) y se hacen las transformaciones algebraicas necesarias para poder despejar la variable v_C , resultando la ecuación (10.22).

$$\int \frac{d(v_C)}{V_T - v_C} = \frac{1}{RC} \int dt$$

Para poder aplicar la fórmula $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + k$, completamos la integral del primer miembro, la integral del segundo miembro es inmediata $\int du = u + k$.

$$\frac{1}{-1} \int \frac{-d(v_C)}{V_T - v_C} = \frac{1}{RC} \int dt$$

$$-\ln|V_T - v_C| + k_1 = \frac{1}{RC} t + k_2$$

$$-\ln|V_T - v_C| + k_1 = \frac{t}{RC} + k_2$$

Simplificamos las constantes k_1 y k_2 en una sola constante $k_3 = k_2 - k_1$.

$$-\ln|V_T - v_C| = \frac{t}{RC} + k_3$$

Despejamos la variable v_C .

$$\ln|V_T - v_C| = -\frac{t}{RC} - k_3$$

$$\ln|V_T - v_C| = \left(-\frac{t}{RC} - k_3\right) (1)$$

Recordamos que el logaritmo de la misma base resulta en la unidad.

$$\ln|e| = 1$$

Por lo tanto, es válido sustituir la unidad por $\ln|e|$ resultando:

$$\ln|V_T - v_C| = \left(-\frac{t}{RC} - k_3\right) (\ln|e|)$$

Aplicamos las propiedades de los logaritmos para cambiar el producto de $\left(-\frac{t}{RC} - k_3\right)$ por una potencia y resulta:

$$\ln|V_T - v_C| = \ln \left| e^{\left(-\frac{t}{RC} - k_3\right)} \right|$$

Eliminamos los logaritmos en ambos miembros de la ecuación.

$$V_T - v_C = e^{\left(-\frac{t}{RC} - k_3\right)}$$

Pasamos V_T al segundo miembro y dejamos positiva v_C .

$$v_C = V_T - e^{\left(-\frac{t}{RC} - k_3\right)}$$

Aplicamos las propiedades de los exponentes para separar el exponente $\left(\frac{-t}{RC} - k_3\right)$.

$$v_C = V_T - \left(e^{\frac{-t}{RC}}\right) \cdot (e^{-k_3})$$

Pero (e^{-k_3}) es una constante elevada a otra, por lo tanto, resultará en una nueva constante k_4 expresada de la ecuación (10.21).

$$k_4 = e^{-k_3} \quad (10.21)$$

La sustituimos y resulta la ecuación (10.22).

$$v_C = V_T - \left(e^{\frac{-t}{RC}}\right) \cdot k_4$$

$$v_C = V_T - k_4 \cdot e^{\frac{-t}{RC}} \quad (10.22)$$

La variable v_C ha quedado despejada, sólo falta determinar cuánto vale la constante k_4 .

Para poder calcular esta constante, es necesario utilizar la condición inicial (C.I.) del capacitor, es decir, la ecuación (10.14).

$$v_C(0) = V_{C0}$$

En esta ecuación se establece como condición inicial (C.I.) que, para el tiempo $t = 0$, el voltaje v_C en el capacitor C tendrá un valor de V_{C0} . Por lo tanto, sustituimos este valor de voltaje y de tiempo en la ecuación (10.22) y simplificamos para obtener la ecuación (10.23).

$$v_C(0) = V_T - k_4 \cdot e^{\frac{-0}{RC}}$$

$$V_{C0} = V_T - k_4 \cdot e^{\frac{-0}{RC}}$$

$$V_{C0} = V_T - k_4 \cdot (1)$$

$$\therefore k_4 = V_T - V_{C0} \quad (10.23)$$

Sustituimos la ecuación (10.23) en la ecuación (10.22) y resulta la ecuación (10.24), que es la solución general del circuito RC en serie con condición inicial (C.I.) que se muestra en la Figura 10.24.

$$v_C = V_T - k_4 \cdot e^{\frac{-t}{RC}}$$

$$v_C = V_T - (V_T - V_{C0}) \cdot e^{\frac{-t}{RC}} \quad (10.24)$$

Es muy común encontrar la ecuación (10.24) expresada en términos de la constante de tiempo τ (tau) que sirve para saber en cuánto tiempo se alcanza el régimen permanente en el circuito RC en serie después de activar el *switch* S_W .

El valor de la constante de tiempo τ (tau) se iguala con el valor de tiempo t que haga que el exponente de la función exponencial e en la ecuación (10.24) tenga un valor igual a -1 .

En la ecuación (10.25) se muestra cómo calcular el valor de t para igualarlo con la constante de tiempo τ (tau) del circuito RC en serie.

$$\frac{-t}{RC} = -1 \quad (10.25)$$

$$t = RC$$
$$\therefore \tau = RC \quad (10.26)$$

De tal manera que es muy común encontrar la ecuación (10.24) expresada en términos de la constante de tiempo τ (tau) tal como aparece en la ecuación (10.27).

$$v_C = V_T - (V_T - V_{C0}) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (10.27)$$

Las ecuaciones (10.24) y (10.27) son correctas, sólo dependerá del gusto de cada quien para usar una u otra. En este documento, utilizaremos de forma indistinta cualquiera de las dos ecuaciones para representar la solución. Lo que es importante es saber determinar el valor τ (tau) ya que este valor estará relacionado directamente con el régimen transitorio y el régimen permanente o estable de un circuito RC en serie.

ANÁLISIS Y SOLUCIÓN DE CIRCUITOS RC

Una vez que se ha obtenido la solución de la ecuación del circuito RC en serie, se resuelven varios ejemplos para utilizarla.

Antes de comenzar a resolver cualquier ejemplo, es importante mencionar que:

- a) La ecuación (10.27) es correcta, pero sólo brinda la solución para encontrar el voltaje v_C de un capacitor conectado en serie con una resistencia y una fuente de alimentación. Si el circuito tiene otra forma, entonces se debe transformar hasta que tenga el acomodo adecuado para poder aplicar la ecuación (10.27).
- b) Antes de resolver cualquier circuito RC en serie, es indispensable conocer cuánto vale la condición inicial de voltaje V_{C0} : si el problema no lo dice y si no hay elementos o condiciones que indiquen lo contrario, se asumirá que esta condición vale $V_{C0} = 0$ V.
- c) El valor de la constante de tiempo τ depende de los valores de resistencia y capacitor, por lo tanto, será distinta para cada problema que se resuelva.

Ejemplo 10-6. A partir del circuito que se presenta en la Figura 10.25 en el que se cierra el *switch* S_W en $t = 0$ s, obtener:

- La ecuación del voltaje v_C válida para ($t > 0$).
- El valor de la constante de tiempo τ .
- La gráfica del voltaje v_C considerando los tiempos 0τ , 1τ , 2τ , 3τ , 4τ , 5τ , 6τ , 7τ , 8τ , 9τ y 10τ .
- Calcular el porcentaje del voltaje v_C alcanzado en el capacitor respecto del voltaje V_T para cada valor de tiempo especificado en el inciso c).

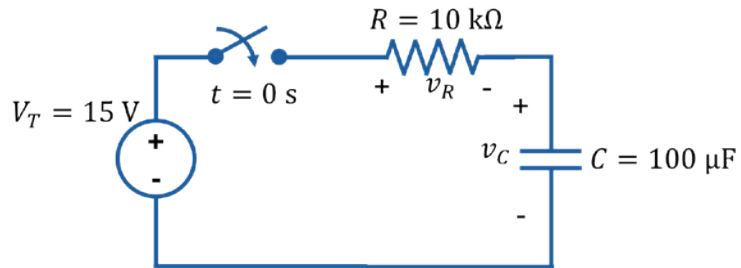


Figura 10.25. Circuito antes de accionar el switch S_W para calcular el voltaje v_C del capacitor.

Respuesta.

En la Figura 10.26 se muestra cómo queda el circuito después de cerrar el interruptor. De igual manera, se establece como condición inicial (C.I.) de voltaje en el capacitor un valor de $V_{C0} = 0$ V. Lo anterior debido a que el problema no menciona que el capacitor tuviera un voltaje precargado o que estuviera conectado a alguna otra red que le proporcionara algún valor antes de conectarse en este circuito.

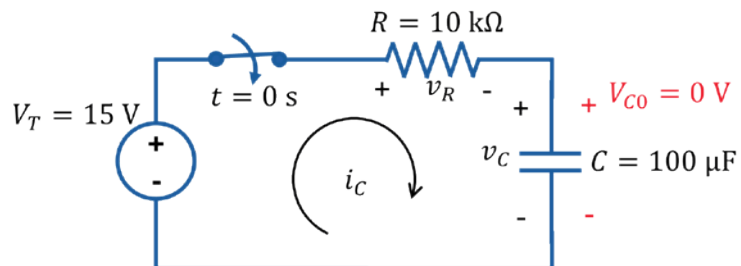


Figura 10.26. Circuito después de accionar el switch S_W para calcular el voltaje v_C del capacitor.

- a) A partir de la Figura 10.26 sustituimos los valores en la ecuación (10.27) y simplificamos para obtener la ecuación del voltaje v_C después de cerrar el *switch*.

$$v_C = 15 \text{ V} - (15 \text{ V} - 0 \text{ V}) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$v_C = 15 \text{ V} - 15 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ V}$$

$$v_C = 15 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \text{ V} \quad (10.28)$$

- b) El valor de la constante de tiempo se calcula con la ecuación (10.26) resultando.

$$\tau = RC$$

$$\tau = (10 \text{ k}\Omega)(100 \text{ }\mu\text{F})$$

$$\tau = 1 \text{ s}$$

Nota: el análisis dimensional se deja como inquietud para el estudiante.

- c) Para construir la gráfica del voltaje v_C , se sustituyen los valores de tiempo en la ecuación (10.28) y con los resultados se construye la Tabla 10.3. Ya que la constante de tiempo τ resultó igual a 1s, entonces los valores de tiempo que se pide calcular coinciden con el valor de la constante de tiempo τ .

$$v_C(0 \text{ s}) = 15 \left(1 - e^{-\frac{(0 \text{ s})}{1 \text{ s}}} \right) \text{ V} = 0 \text{ V}$$

$$v_C(1 \text{ s}) = 15 \left(1 - e^{-\frac{(1 \text{ s})}{1 \text{ s}}} \right) \text{ V} = 9.482 \text{ V}$$

$$v_C(2 \text{ s}) = 15 \left(1 - e^{-\frac{(2 \text{ s})}{1 \text{ s}}} \right) \text{ V} = 12.970 \text{ V}$$

$$\vdots$$

$$v_C(10 \text{ s}) = 15 \left(1 - e^{-\frac{(10 \text{ s})}{1 \text{ s}}} \right) \text{ V} = 14.999 \text{ V}$$

Tabla 10.3. Valores de voltaje de salida del capacitor para distintos valores de la constante de tiempo τ

| Constante de tiempo | t [s] | V_C [V] |
|---------------------|---------|-----------|
| 0τ | 0 | 0.000 |
| 1τ | 1 | 9.482 |
| 2τ | 2 | 12.970 |
| 3τ | 3 | 14.253 |
| 4τ | 4 | 14.725 |
| 5τ | 5 | 14.899 |
| 6τ | 6 | 14.963 |
| 7τ | 7 | 14.986 |
| 8τ | 8 | 14.995 |
| 9τ | 9 | 14.998 |
| 10τ | 10 | 14.999 |

La gráfica del voltaje v_C con respecto del tiempo se muestra en la Figura 10.27. En esta gráfica se pueden comprobar varias cosas, la primera es que el voltaje del capacitor v_C inicia desde 0 V confirmando que el comportamiento del capacitor para $t = 0$ s es como el de un corto circuito. Segundo, que después de mucho tiempo, el voltaje alcanza un estado permanente llegando el del capacitor al valor del voltaje que tiene la fuente de alimentación, que en este caso es de $V_T = 15$ V. A partir de ese momento el capacitor se comporta como si se tratara de un circuito abierto, por esa razón se tiene el voltaje de capacitor v_C igual al voltaje de la fuente de alimentación. En general, se distinguen dos zonas para el comportamiento del voltaje v_C , una es el régimen transitorio y la otra es el régimen permanente, sólo falta establecer dónde comienza y termina cada una de ellas.

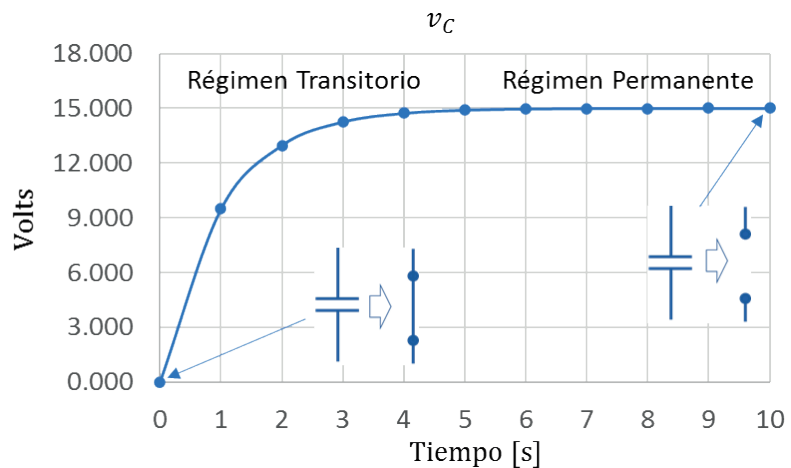


Figura 10.27. Gráfica del voltaje en el capacitor v_C para los distintos valores de tiempo (construida en Microsoft Excel).

- d) El porcentaje del voltaje v_C que alcanza el capacitor respecto del voltaje V_T se calcula dividiendo cada voltaje v_C calculado entre V_T y se expresa en porcentaje, tal como se muestra en la Tabla 10.4.

Tabla 10.4. Porcentaje que alcanza el voltaje del capacitor v_C respecto del voltaje de alimentación V_T

| Constante de tiempo | t [s] | $\frac{v_C}{V_T}$ [%] |
|---------------------|---------|-----------------------|
| 0τ | 0 | 0 |
| 1τ | 1 | 63 |
| 2τ | 2 | 86 |
| 3τ | 3 | 95 |
| 4τ | 4 | 98 |
| 5τ | 5 | 99 |
| 6τ | 6 | 100 |
| 7τ | 7 | 100 |
| 8τ | 8 | 100 |
| 9τ | 9 | 100 |
| 10τ | 10 | 100 |

Es muy importante observar la Figura 10.27 y los datos de la Tabla 10.4 ya que en ambas se aprecia que, a partir de un determinado tiempo, el voltaje del capacitor v_C ya no cambia significativamente respecto del voltaje de alimentación V_T .

En la Figura 10.27 se podría decir que el voltaje v_C alcanza el régimen permanente a partir de 5τ ó 6τ , mientras que en la Tabla 10.4 se confirma que el valor del voltaje de salida alcanza el 99 % del voltaje de entrada para 5τ y para el resto de los valores en el tiempo; el voltaje está prácticamente siempre en el 100 %.

Por lo tanto, se considerará que la estabilidad o el régimen permanente se conseguirá en un circuito RC cuando se alcance un tiempo equivalente a 5τ .

Ejemplo 10-7. Utilizando el circuito de la Figura 10.28, obtener la ecuación del voltaje en el capacitor v_C cuando:

- La condición inicial de voltaje es $V_{C0} = 0$ V.
- La condición inicial de voltaje es $V_{C0} = -5$ V.
- La condición inicial de voltaje es $V_{C0} = 7$ V.
- Dibujar en una sola gráfica los tres voltajes v_C obtenidos para un tiempo de 10τ .

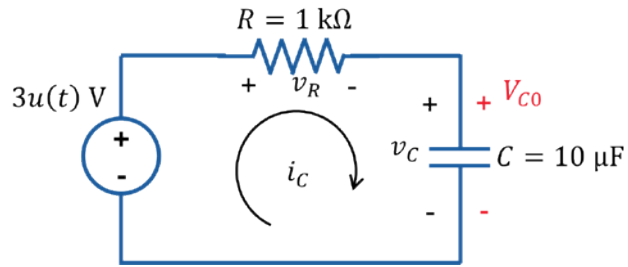


Figura 10.28. Circuito para calcular el voltaje v_C con tres condiciones iniciales V_{C0} distintas.

Respuesta.

Recordemos que la función escalón unitario hace las veces de interruptor integrado junto a la fuente de alimentación, por lo tanto, el circuito se puede interpretar exactamente igual que en el ejemplo anterior cuando se cerraba el interruptor en el tiempo $t = 0$ s y la fuente se conectaba.

- a) Para calcular la ecuación del voltaje v_C cuando $V_{C0} = 0$ V sustituimos esta condición inicial en la ecuación (10.24) y así obtenemos la ecuación (10.29).

$$\begin{aligned}
 v_C &= V_T - (V_T - V_{C0}) \cdot e^{\frac{-t}{RC}} \\
 v_C &= V_T - (V_T - 0 \text{ V}) \cdot e^{\frac{-t}{RC}} \\
 v_C &= V_T - V_T \cdot e^{\frac{-t}{RC}} \\
 v_C &= V_T \left(1 - e^{\frac{-t}{RC}} \right) \tag{10.29}
 \end{aligned}$$

Ya con la ecuación (10.29) se sustituyen los valores de resistencia e inductor de la Figura 10.28 resultando la ecuación (10.30).

$$\begin{aligned}
 v_{C1} &= 3 \left(1 - e^{\frac{-t}{(1 \text{ k}\Omega)(10 \text{ }\mu\text{F})}} \right) \text{ V} \\
 v_{C1} &= 3 \left(1 - e^{\frac{-t}{0.01 \text{ s}}} \right) \text{ V} \\
 v_{C1} &= 3(1 - e^{-100t}) \text{ V} \tag{10.30}
 \end{aligned}$$

- b) Para calcular la ecuación del voltaje v_C cuando $V_{C0} = -5$ V sustituimos los datos de la Figura 10.28 en la ecuación (10.24).

$$v_C = V_T - (V_T - V_{C0}) \cdot e^{\frac{-t}{RC}}$$

$$v_{C2} = 3 \text{ V} - (3 \text{ V} - (-5 \text{ V})) \cdot e^{\frac{-t}{(1 \text{ k}\Omega)(10 \text{ }\mu\text{F})}}$$

$$v_{C2} = 3 \text{ V} - (8 \text{ V}) \cdot e^{\frac{-t}{0.01}} \text{ V}$$

$$v_{C2} = 3 \text{ V} - 8 \cdot e^{-100t} \text{ V} \quad (10.31)$$

- c) Para calcular la ecuación del voltaje v_C cuando $V_{C0} = 7$ V sustituimos los datos de la Figura 10.28 en la ecuación (10.24).

$$v_C = V_T - (V_T - V_{C0}) \cdot e^{\frac{-t}{RC}}$$

$$v_{C3} = 3 \text{ V} - (3 \text{ V} - (7 \text{ V})) \cdot e^{\frac{-t}{(1 \text{ k}\Omega)(10 \text{ }\mu\text{F})}}$$

$$v_{C3} = 3 \text{ V} - (-4 \text{ V}) \cdot e^{\frac{-t}{0.01}} \text{ V}$$

$$v_{C3} = 3 \text{ V} + 4 \cdot e^{-100t} \text{ V} \quad (10.32)$$

- d) El valor de la constante de tiempo τ se calcula con la ecuación (10.26), resultando:

$$\tau = RC$$

$$\tau = (1 \text{ k}\Omega)(10 \text{ }\mu\text{F})$$

$$\tau = 0.01 \text{ s}$$

Con la constante de tiempo $\tau = 0.001$ s y con las ecuaciones (10.29), (10.31) y (10.32), que corresponden al voltaje en el capacitor para las distintas condiciones iniciales, se construye la Tabla 10.5 en la que se calculan los valores de voltaje desde 0 s y hasta 0.1 s que corresponde a 10τ .

Tabla 10.5. Valores de voltaje para las distintas condiciones iniciales de voltaje V_{C0} en el capacitor

| Constante de tiempo | t [s] | V_{C1} [V] | V_{C2} [V] | V_{C3} [V] |
|---------------------|---------|--------------|--------------|--------------|
| 0τ | 0 | 0.000 | -5.000 | 7.000 |
| 1τ | 0.01 | 1.896 | 0.057 | 4.472 |
| 2τ | 0.02 | 2.594 | 1.917 | 3.541 |
| 3τ | 0.03 | 2.851 | 2.602 | 3.199 |
| 4τ | 0.04 | 2.945 | 2.853 | 3.073 |
| 5τ | 0.05 | 2.980 | 2.946 | 3.027 |
| 6τ | 0.06 | 2.993 | 2.980 | 3.010 |
| 7τ | 0.07 | 2.997 | 2.993 | 3.004 |
| 8τ | 0.08 | 2.999 | 2.997 | 3.001 |
| 9τ | 0.09 | 3.000 | 2.999 | 3.000 |
| 10τ | 0.1 | 3.000 | 3.000 | 3.000 |

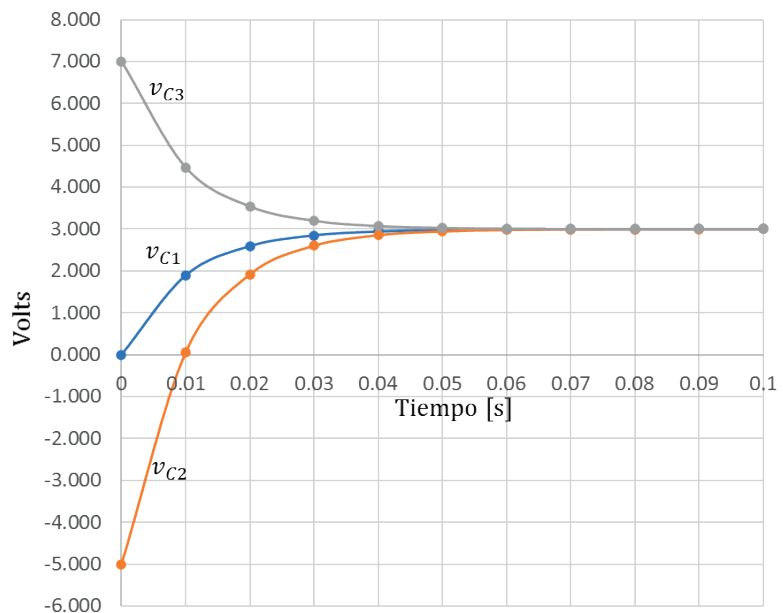


Figura 10.29. Gráfica del voltaje en el capacitor v_C para cada una de las condiciones iniciales V_{C0} .

Obsérvese de la Tabla 10.5 y de la Figura 10.29 que no importa de qué valor comience la condición inicial de voltaje en el capacitor, siempre terminará en 3 V. De igual manera, para las tres condiciones iniciales de voltaje en el capacitor, el tiempo en el que se alcanza el régimen permanente para los tres voltajes es también de 5τ , siendo en este caso en un tiempo de 0.05 s.

Ejemplo 10-8. El circuito de la Figura 10.30 se encuentra en reposo desde hace mucho tiempo. Después, en el tiempo $t = 0$ s, el interruptor S_w pasa a la posición ① para conectar la fuente de alimentación con las resistencias y el capacitor, pero sólo permanece en esa posición durante un tiempo de $(2\tau_1)$ s, cuando después el interruptor pasa a la posición ② para volver a desconectar la fuente de alimentación del circuito y ahí se queda hasta que el circuito alcanza su régimen permanente $(5\tau_1)$ s). Obtener:

- El voltaje V_{C0} antes de cerrar el interruptor en $t = 0$ s.
- La ecuación del voltaje v_{C1} en el capacitor válida para $0 < t < 2\tau_1$ s.
- El voltaje V_{C02} justo antes de abrir el interruptor en $t = 2\tau_1$ s.
- La ecuación del voltaje v_{C2} , válida para $t > 2\tau_1$ s, después de haber desconectado el interruptor del circuito y pasar a la posición ②.
- La gráfica del voltaje v_C en el capacitor desde antes de accionar el interruptor, para todas sus posiciones, y hasta que alcance el régimen permanente $(5\tau_2)$ s en la posición ②.

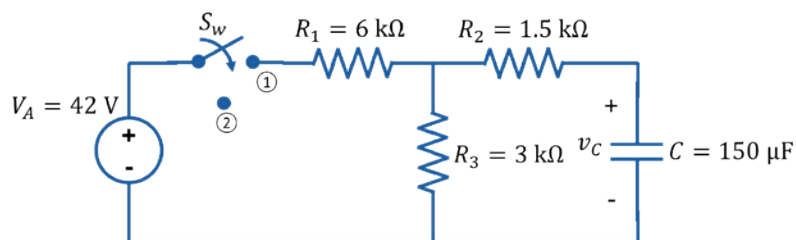


Figura 10.30. Circuito para calcular el voltaje v_C con varias resistencias, conectando y desconectando la fuente de alimentación.

Respuesta.

- Ya que el circuito se encuentra en reposo desde hace mucho tiempo, y dado que no está conectada ninguna fuente en el capacitor, significa que la condición inicial de voltaje V_{C0} tiene un voltaje de 0 V en el instante $t = 0$ s cuando se cierra el interruptor.
- En el instante $t = 0$ s, se cierra el interruptor y resulta el circuito de la Figura 10.31. Sin embargo, no se puede obtener directamente la ecuación del voltaje v_{C1} debido a que el circuito no corresponde con la forma adecuada de donde se obtuvo tal información. El circuito de la Figura 10.31 se debe transformar en un circuito con la estructura de la la Figura 10.23. Por lo tanto, es necesario obtener el circuito equivalente de Thévenin visto por las terminales del capacitor C .

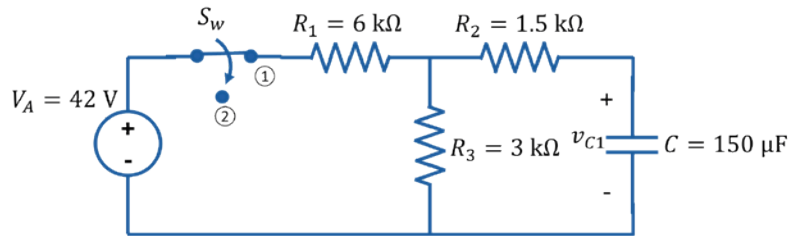


Figura 10.31. Circuito equivalente después de cerrar el interruptor en $t = 0$ s.

Retiramos el capacitor C y en la Figura 10.32 se muestra el circuito para calcular V_{Th} y R_{Th} .

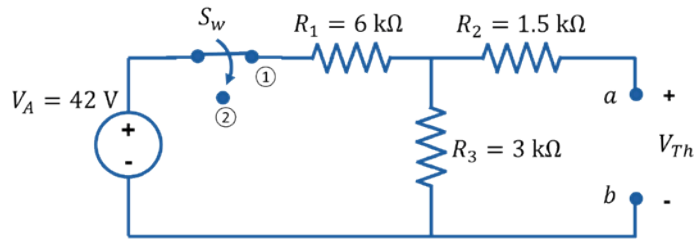


Figura 10.32. Circuito para calcular el circuito equivalente de Thévenin visto por las terminales a y b .

El voltaje de Thévenin resulta:

$$V_{Th} = V_A \frac{R_3}{R_1 + R_3}$$

$$V_{Th} = (42 \text{ V}) \frac{3 \text{ k}\Omega}{6 \text{ k}\Omega + 3 \text{ k}\Omega}$$

$$V_{Th} = 14 \text{ V} \quad (10.33)$$

La resistencia de Thévenin resulta:

$$R_{Th} = R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}$$

$$R_{Th} = 1.5 \text{ k}\Omega + \frac{(6 \text{ k}\Omega)(3 \text{ k}\Omega)}{6 \text{ k}\Omega + 3 \text{ k}\Omega}$$

$$R_{Th} = 3.5 \text{ k}\Omega \quad (10.34)$$

Construimos el circuito equivalente de Thévenin como se muestra en la Figura 10.33.

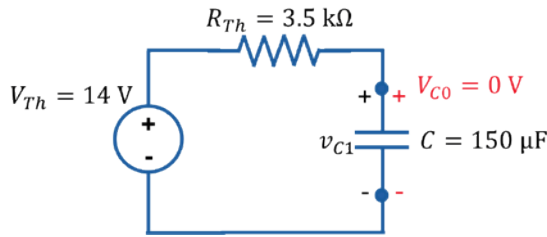


Figura 10.33. Circuito equivalente de Thévenin.

Ahora sí, el circuito tiene la misma forma que el circuito de la Figura 10.23, por lo tanto, ya es posible poder calcular el voltaje v_{C1} en las terminales del capacitor.

Para calcular la ecuación del voltaje v_{C1} sustituimos los datos de la Figura 10.33 en la ecuación (10.24), sólo que cambiamos el voltaje V_T por el voltaje de Thévenin V_{Th} , y la resistencia R por la resistencia de Thévenin R_{Th} , tal como queda expresado en la ecuación (10.35).

$$v_C = V_{Th} - (V_{Th} - V_{C0}) \cdot e^{\frac{-t}{R_{Th}C}} \quad (10.35)$$

Sustituimos los valores de la Figura 10.33 en la ecuación (10.35) y resulta:

$$\begin{aligned} v_{C1} &= 14 \text{ V} - (14 \text{ V} - 0 \text{ V}) \cdot e^{\frac{-t}{(3.5 \text{ k}\Omega)(150 \mu\text{F})}} \\ v_{C1} &= 14 \text{ V} - 14 \cdot e^{\frac{-t}{0.525 \text{ V}}} \\ v_{C1} &= 14(1 - e^{-1.904t}) \text{ V} \end{aligned} \quad (10.36)$$

Así podemos calcular la constante de tiempo τ_1 , a la cual le colocamos el subíndice 1 porque es la constante de tiempo que se utiliza mientras el interruptor se encuentra conectado en la posición ①. Con la ecuación (10.26) se calcula el valor de la constante de tiempo τ_1 , resultando:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= R_{Th}C \\ \tau_1 &= (3.5 \text{ k}\Omega)(150 \mu\text{F}) \\ \tau_1 &= 0.525 \text{ s} \end{aligned}$$

De acuerdo con el valor calculado de la constante de tiempo τ_1 , el circuito alcanzaría el estado estable o de régimen permanente en un tiempo de $5\tau_1$, es decir en 2.625 s. Sin embargo, el voltaje en el capacitor no alcanzará el estado estable o de régimen permanente debido a que sólo permanecerá conectado en la posición ① durante $2\tau_1$. Este tiempo queda expresado en la ecuación (10.37) como t_1 y, en este caso, es equivalente a 1.05 s.

$$t_1 = 2\tau_1 \quad (10.37)$$

En estas condiciones, el voltaje que alcanza el capacitor v_{C1} para 1.05 s se calcula con la ecuación (10.36), resultando:

$$v_{C1} = 14(1 - e^{-1.904t}) \text{ V}$$

$$v_{C1}(1.05 \text{ s}) = 14(1 - e^{-1.904(1.05)}) \text{ V}$$

$$V_{C02} = v_{C1}(1.05 \text{ s}) = 12.105 \text{ V} \quad (10.38)$$

El voltaje alcanzado con la ecuación (10.36) durante 1.05 s será la nueva condición inicial (C.I.) de voltaje V_{C02} con la que comenzará el capacitor en el nuevo circuito equivalente cuando el interruptor pasa a la posición ②.

- a) Cuando el interruptor pasa a la posición ②, la fuente de alimentación se desconecta del circuito y entonces resulta el circuito que se muestra en la Figura 10.34. En él, la fuente de alimentación V_T y la resistencia R_1 (elementos en gris) ya no influyen en el voltaje v_{C2} del capacitor.

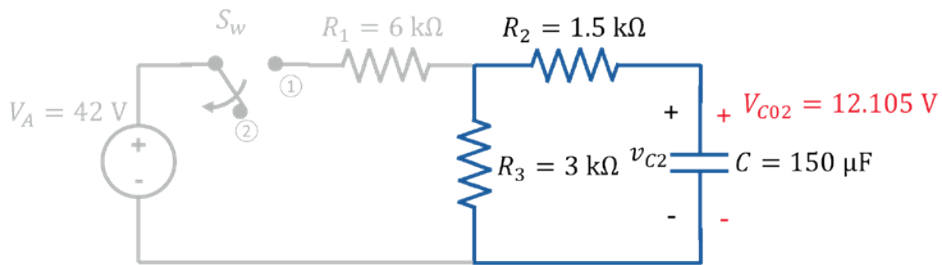


Figura 10.34. Circuito equivalente después que el interruptor pasa a la posición ②.

Sólo queda conectado en serie el capacitor C con las resistencias R_2 y R_3 que se agrupan en una sola resistencia equivalente R_{eq} , la cual se calcula con la ecuación (10.39), resultando 4.5 kΩ.

$$R_{eq} = R_2 + R_3 \quad (10.39)$$

El capacitor, que tiene una cantidad finita de energía almacenada (en forma de "Campo Eléctrico"), se descargará a través de la resistencia equivalente R_{eq} . El circuito que resulta con el capacitor C , la resistencia equivalente R_{eq} y sin ninguna fuente de alimentación, se muestra en la Figura 10.35.

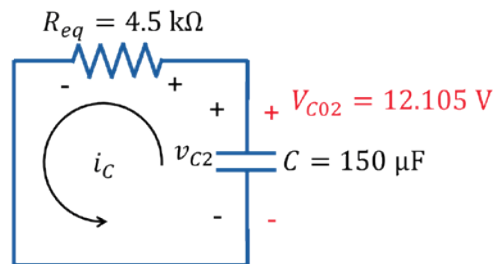


Figura 10.35. Circuito equivalente sin ninguna fuente de alimentación conectada.

Se utiliza la ecuación (10.24) para resolver el problema, sólo que, al no haber fuente de alimentación V_T , ésta tendrá como valor 0 V, por lo tanto, se sustituye $V_T = 0$ V en la ecuación y resulta la ecuación (10.40).

$$\begin{aligned}
 v_C &= V_T - (V_T - V_{C0}) \cdot e^{\frac{-t}{RC}} \\
 v_C &= 0 \text{ V} - (0 \text{ V} - V_{C0}) \cdot e^{\frac{-t}{RC}} \\
 v_C &= -(-V_{C0}) \cdot e^{\frac{-t}{RC}} \\
 v_C &= V_{C0} \cdot e^{\frac{-t}{RC}} \quad (10.40)
 \end{aligned}$$

Se observa en la ecuación (10.40) que el voltaje del capacitor v_{C2} sólo depende de la condición inicial del voltaje en el capacitor, de la resistencia equivalente R_{eq} y del valor de la capacitancia C en el capacitor.

Por lo tanto, al sustituir los datos de la Figura 10.35 en la ecuación (10.40), se obtiene la ecuación (10.41) que define el voltaje v_{C2} cuando el interruptor pasa a la posición ②. Nótese que en la ecuación (10.40) se intercambia la resistencia R por la resistencia R_{eq} y V_{C0} por V_{C02} .

$$\begin{aligned}
 v_{C2} &= V_{C02} \cdot e^{\frac{-t}{R_{eq}C}} \\
 v_{C2} &= 12.105 \cdot e^{\frac{-t}{(4.5 \text{ k}\Omega)(150 \text{ }\mu\text{F})}} \text{ V} \\
 v_{C2} &= 12.105 \cdot e^{\frac{-t}{0.675}} \text{ V} \\
 v_{C2} &= 12.105 \cdot e^{-1.481t} \text{ V} \quad (10.41)
 \end{aligned}$$

Con la ecuación (10.26) se calcula el valor de la nueva constante de tiempo τ_2 , resultando:

$$\begin{aligned}
 \tau_2 &= R_{eq}C \\
 \tau_2 &= (4.5 \text{ k}\Omega)(150 \text{ }\mu\text{F}) \\
 \tau_2 &= 0.675 \text{ s}
 \end{aligned}$$

Ésta es la constante de tiempo con la cual se descargará el capacitor hasta llegar a 0 V en un lapso equivalente a $5\tau_2$. Este tiempo queda expresado en la ecuación (10.42) como t_2 , que en este caso corresponde a 3.375 s a partir del instante en el que el interruptor se conecta en la posición ②.

$$t_2 = 5\tau_2 \quad (10.42)$$

Por lo tanto, el tiempo total, desde que se conecta el interruptor en la posición ① y luego pasa a la posición ② para descargar al capacitor, es la suma de los tiempos t_1 y t_2 tal como se expresa en la

ecuación (10.43) resultando, para este problema en particular, en un tiempo total de 4.425 s para que el voltaje del capacitor llegue al estado estable o régimen permanente.

$$t_{tot} = t_1 + t_2 \quad (10.43)$$

Es muy importante comprender que las ecuaciones (10.36) y (10.41) se obtuvieron como si ambas transiciones en el interruptor hubieran ocurrido en el tiempo $t = 0$ s, cuando en realidad la segunda transición, para calcular el voltaje v_{C2} , ocurre después de un tiempo de $2\tau_1$. Además, cada una de las ecuaciones utiliza escalas de tiempo basadas en τ_1 y τ_2 , respectivamente.

Por lo tanto, al momento de calcular los respectivos valores de voltaje a partir de las ecuaciones (10.36) y (10.41) los resultados que se obtienen se encuentran en la Tabla 10.6 y Tabla 10.7 respectivamente.

Tabla 10.6. Valores calculados para la gráfica de v_{C1}

| Constante de tiempo | t [s] | v_{C1} [V] |
|---------------------|---------|--------------|
| $0\tau_1$ | 0.000 | 0.000 |
| $0.5\tau_1$ | 0.263 | 5.509 |
| τ_1 | 0.525 | 8.850 |
| $1.5\tau_1$ | 0.788 | 10.876 |
| $2\tau_1$ | 1.050 | 12.105 |

Las gráficas respectivas se muestran en la Figura 10.36 y la Figura 10.37.

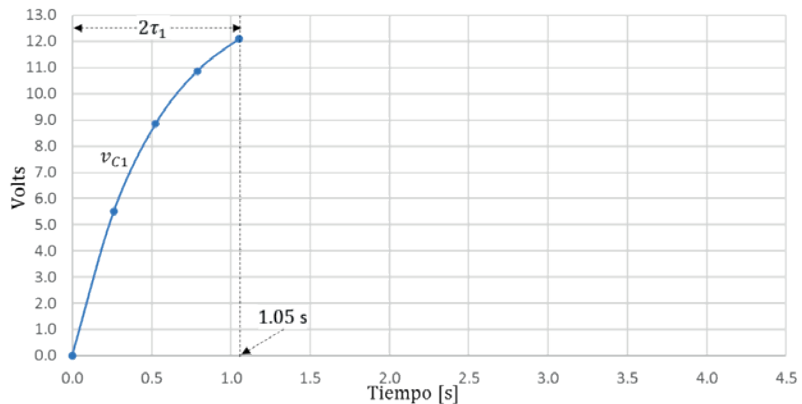


Figura 10.36. Gráfica de v_{C1} mientras el interruptor se encuentra conectado en la posición \odot .

Tabla 10.7. Valores calculados para la gráfica de v_{C2} .

| Constante de tiempo | t [s] | v_{C2} [V] |
|---------------------|---------|--------------|
| $0\tau_2$ | 0.000 | 12.105 |
| $0.5\tau_2$ | 0.338 | 7.342 |
| τ_2 | 0.675 | 4.453 |
| $1.5\tau_2$ | 1.013 | 2.701 |
| $2\tau_2$ | 1.350 | 1.638 |
| $2.5\tau_2$ | 1.688 | 0.994 |
| $3\tau_2$ | 2.025 | 0.603 |
| $3.5\tau_2$ | 2.363 | 0.366 |
| $4\tau_2$ | 2.700 | 0.222 |
| $4.5\tau_2$ | 3.038 | 0.134 |
| $5\tau_2$ | 3.375 | 0.082 |

Obsérvese que el voltaje final de la Tabla 10.6 que corresponde para $2\tau_1$ es el voltaje inicial de la Tabla 10.7 para $0\tau_2$. Por lo tanto, si se desean colocar ambas gráficas en la misma escala de tiempo, es necesario sumar a cada uno de los valores de tiempo de la Tabla 10.7 un valor de $2\tau_1$ (1.05 s), manteniendo los mismos valores de lo voltaje de v_{C2} , tal como se aprecia en la Tabla 10.8.

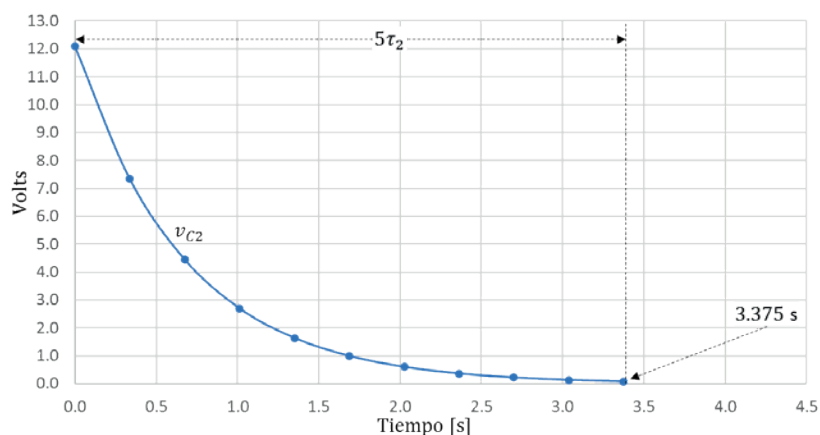


Figura 10.37. Gráfica de v_{C2} mientras el interruptor se encuentra conectado en la posición \odot .

Tabla 10.8. Unión de los valores para v_{C1} y para v_{C2} en una sola tabla para conseguir una sola gráfica

| Constante de tiempo | t [s] | v_{C1} [V] | v_{C2} [V] |
|-----------------------|---------|--------------|--------------|
| $0\tau_1$ | 0.000 | 0.000 | - |
| $0.5\tau_1$ | 0.263 | 5.509 | - |
| τ_1 | 0.525 | 8.850 | - |
| $1.5\tau_1$ | 0.788 | 10.876 | - |
| $2\tau_1$ | 1.050 | 12.105 | 12.105 |
| $2\tau_1 + 0.5\tau_2$ | 1.388 | - | 7.342 |
| $2\tau_1 + \tau_2$ | 1.725 | - | 4.453 |
| $2\tau_1 + 1.5\tau_2$ | 2.063 | - | 2.701 |
| $2\tau_1 + 2\tau_2$ | 2.400 | - | 1.638 |
| $2\tau_1 + 2.5\tau_2$ | 2.738 | - | 0.994 |
| $2\tau_1 + 3\tau_2$ | 3.075 | - | 0.603 |
| $2\tau_1 + 3.5\tau_2$ | 3.413 | - | 0.366 |
| $2\tau_1 + 4\tau_2$ | 3.750 | - | 0.222 |
| $2\tau_1 + 4.5\tau_2$ | 4.088 | - | 0.134 |
| $2\tau_1 + 5\tau_2$ | 4.425 | - | 0.082 |

En la Figura 10.38 se muestra la gráfica completa del voltaje en el capacitor para la posición ① y la posición ② del interruptor.

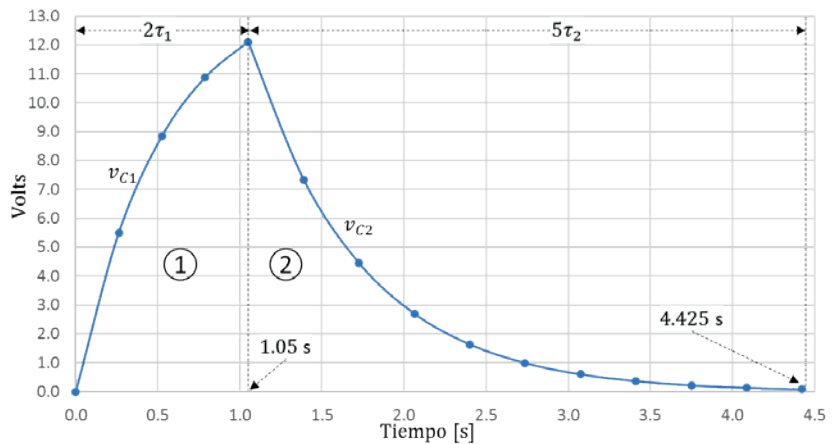


Figura 10.38. Gráfica completa del voltaje v_C en el capacitor para la posición ① y ② del interruptor.

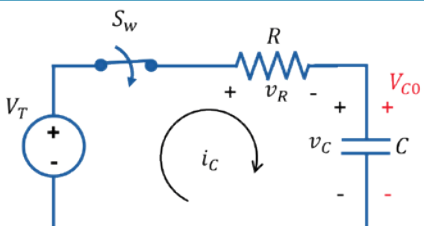
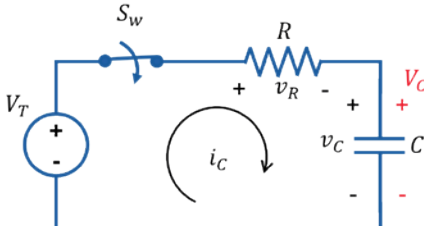
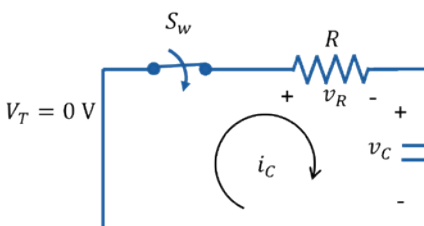
En la gráfica de la Figura 10.38 se observa que, mientras el interruptor se encuentra conectado en la posición ①, el voltaje v_C inicia desde 0 V en $t = 0$ s para después alcanzar 12.105 V cuando se cumple el tiempo que corresponde a $2\tau_1$ (1.05 s). Después, el voltaje final de la posición ① corresponde con el voltaje inicial de la posición ② y es a partir de este valor de voltaje que comienza a descargarse el capacitor hasta llegar a 0 V, en un tiempo equivalen-

te a $5\tau_2$ (3.375 s) que, sumado con el tiempo de $2\tau_1$, resulta en un total de (4.425 s).

RESUMEN DE ECUACIONES PARA EL CIRCUITO RC

La ecuación (10.24) es la solución general para resolver cualquier circuito RC formado por una fuente de voltaje con una resistencia y un capacitor conectados en serie. Se pueden tener ecuaciones particulares para v_C si en el circuito se tiene o no condición inicial de voltaje V_{C0} o si la fuente de alimentación es nula, $V_T = 0$ V. En la Tabla 10.9 se muestra un resumen de las ecuaciones que se pueden obtener a partir de la ecuación (10.24) y dependiendo de la presencia o no de V_T y V_{C0} . Del mismo modo, se incluyen las ecuaciones para poder calcular la corriente I_C en el capacitor para cada uno de los casos.

Tabla 10.9. Resumen de ecuaciones para calcular el voltaje del condensador en distintas condiciones

| Circuito RC | Ecuaciones para v_C e I_C |
|---|---|
| $\tau = RC$ | |
|  | $v_C = V_T - (V_T - V_{C0}) \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$ $i_C = \frac{(V_T - V_{C0})}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$ |
|  | $v_C = V_T \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$ $i_C = \frac{V_T}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$ |
|  | $v_C = V_{C0} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$ $i_C = \frac{-V_{C0}}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$ |

ACCIONAMIENTO DEL CIRCUITO RL

A partir de la Figura 10.39 se obtiene la solución general del circuito RL para poder calcular la corriente i_L para ($t > 0$). Se debe considerar que al momento de accionar el interruptor S_W en el instante $t = 0$, el inductor cuenta con la condición inicial (C.I.) de

corriente expresada en la ecuación (10.15) y con la dirección indicada en la Figura 10.23.

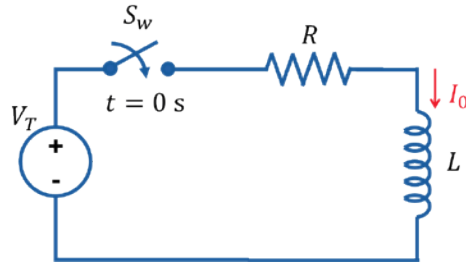


Figura 10.39. Circuito RL para calcular la solución de la corriente i_L para $t > 0$.

Al cerrar el interruptor en el tiempo $t = 0$ resulta el circuito de la Figura 10.40.

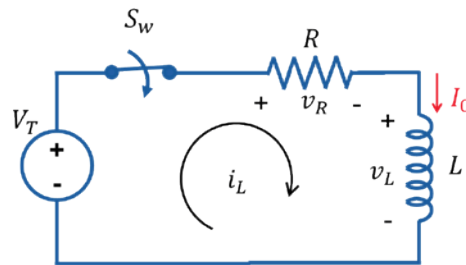


Figura 10.40. Circuito RL una vez que el interruptor S_w ha sido accionado en el tiempo $t = 0$.

Obsérvese que resulta un circuito RL en serie, por lo tanto, la corriente i_L que circula en el circuito es la misma también para la resistencia R y para la fuente de alimentación V_T . Aplicamos la ley de voltajes de Kirchhoff a los elementos del circuito y nos resulta la ecuación (10.44).

$$-V_T + v_R + v_L = 0 \quad (10.44)$$

Reacomodamos la ecuación pasando el voltaje de alimentación al segundo miembro.

$$v_R + v_L = V_T \quad (10.45)$$

Reescribimos el voltaje de la resistencia R de la ecuación (10.45) en términos de la corriente i_L resultando la ecuación (10.46).

$$Ri_L + v_L = V_T \quad (10.46)$$

Sustituimos la ecuación (10.6) en la ecuación (10.46) y resulta:

$$Ri_L + L \frac{d(i_L)}{dt} = V_T$$

Dividimos ambos miembros de la ecuación entre R para obtener la ecuación (10.47), que es una ecuación diferencial, lineal de primer orden, de primer grado y no homogénea. En esta ecuación

diferencial, la variable para la cual se debe resolver es para la corriente i_L del inductor.

$$\begin{aligned}\frac{R\mathbf{i}_L + L \frac{d(\mathbf{i}_L)}{dt}}{R} &= \frac{V_T}{R} \\ \frac{L}{R} \cdot \frac{d(\mathbf{i}_L)}{dt} + \mathbf{i}_L &= \frac{V_T}{R}\end{aligned}\quad (10.47)$$

Para resolver la ecuación (10.47) se puede aplicar cualquiera de los métodos estudiados en el curso de “Ecuaciones Diferenciales”, pero, en este caso y por su simplicidad de aplicación, se resuelve empleando el método de “Variables separables”.

Separamos las variables para dejar la variable v_L en el primer miembro y la variable del tiempo t en el segundo, resultando la ecuación (10.48).

$$\begin{aligned}\frac{L}{R} \cdot \frac{d(\mathbf{i}_L)}{dt} &= \frac{V_T}{R} - \mathbf{i}_L \\ \frac{d(\mathbf{i}_L)}{dt} &= \frac{R}{L} \left(\frac{V_T}{R} - \mathbf{i}_L \right) \\ d(\mathbf{i}_L) &= \frac{R}{L} \left(\frac{V_T}{R} - \mathbf{i}_L \right) dt \\ \frac{d(\mathbf{i}_L)}{\left(\frac{V_T}{R} - \mathbf{i}_L \right)} &= \frac{R}{L} dt\end{aligned}\quad (10.48)$$

Integramos miembro a miembro la ecuación (10.48) y se hacen las transformaciones algebraicas necesarias para poder despejar la variable i_L resultando la ecuación (10.52).

$$\int \frac{d(\mathbf{i}_L)}{\left(\frac{V_T}{R} - \mathbf{i}_L \right)} = \frac{R}{L} \int dt$$

Para poder aplicar la fórmula $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + k$, completamos la integral del primer miembro; la integral del segundo miembro es inmediata $\int du = u + k$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{-1} \int \frac{-d(\mathbf{i}_L)}{\left(\frac{V_T}{R} - \mathbf{i}_L \right)} &= \frac{R}{L} \int dt \\ -\ln \left| \frac{V_T}{R} - \mathbf{i}_L \right| + k_1 &= \frac{R}{L} t + k_2 \\ -\ln \left| \frac{V_T}{R} - \mathbf{i}_L \right| + k_1 &= \frac{R}{L} t + k_2\end{aligned}$$

Simplificamos las constantes k_1 y k_2 en una sola constante $k_3 = k_2 - k_1$.

$$-\ln \left| \frac{V_T}{R} - i_L \right| = \frac{R}{L}t + k_3$$

Despejamos la variable i_L .

$$\begin{aligned} \ln \left| \frac{V_T}{R} - i_L \right| &= -\frac{R}{L}t - k_3 \\ \ln \left| \frac{V_T}{R} - i_L \right| &= \left(-\frac{R}{L}t - k_3 \right) \quad (1) \end{aligned}$$

Recordamos que el logaritmo de la misma base resulta en la unidad.

$$\ln|e| = 1$$

Por lo tanto, es válido sustituir la unidad por $\ln|e|$, resultando:

$$\ln \left| \frac{V_T}{R} - i_L \right| = \left(-\frac{R}{L}t - k_3 \right) (\ln|e|)$$

Aplicamos las propiedades de los logaritmos para cambiar el producto de $\left(-\frac{R}{L}t - k_3 \right)$ por una potencia y resulta:

$$\ln \left| \frac{V_T}{R} - i_L \right| = \ln \left| e^{\left(-\frac{R}{L}t - k_3 \right)} \right|$$

Eliminamos los logaritmos en ambos miembros de la ecuación.

$$\frac{V_T}{R} - i_L = e^{\left(-\frac{R}{L}t - k_3 \right)}$$

Pasamos V_T/R al segundo miembro y dejamos positiva i_L .

$$i_L = \frac{V_T}{R} - e^{\left(-\frac{R}{L}t - k_3 \right)}$$

Aplicamos las propiedades de los exponentes para separar el exponente $\left(-\frac{R}{L}t - k_3 \right)$.

$$i_L = \frac{V_T}{R} - \left(e^{-\frac{R}{L}t} \right) \cdot (e^{-k_3})$$

Pero (e^{-k_3}) es una constante elevada a otra, por lo tanto, resultará en una nueva constante k_4 expresada de la ecuación (10.49).

$$k_4 = e^{-k_3} \quad (10.49)$$

La sustituimos y resulta la ecuación (10.50).

$$i_L = \frac{V_T}{R} - \left(e^{-\frac{R}{L}t} \right) \cdot k_4$$

$$i_L = \frac{V_T}{R} - k_4 \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \quad (10.50)$$

La variable i_L ha quedado despejada, sólo falta determinar cuánto vale la constante k_4 .

Para poder calcular esta constante, es necesario utilizar la condición inicial (C.I.) del inductor, es decir, la ecuación (10.15).

$$i_L(0) = I_0$$

En esta ecuación se establece como condición inicial (C.I.) que, para el tiempo $t = 0$, la corriente i_L en el inductor L tendrá un valor de I_0 . Por lo tanto, sustituimos este valor de corriente y de tiempo en la ecuación (10.50) y simplificamos para obtener la ecuación (10.51).

$$i_L(0) = \frac{V_T}{R} - k_4 \cdot e^{-\frac{R}{L}(0)}$$

$$I_0 = \frac{V_T}{R} - k_4 \cdot (1)$$

$$\therefore k_4 = \frac{V_T}{R} - I_0 \quad (10.51)$$

Sustituimos la ecuación (10.51) en la ecuación (10.50) y resulta la ecuación (10.52), que es la solución general del circuito RL en serie con condición inicial (C.I.) que se muestra en la Figura 10.40.

$$i_L = \frac{V_T}{R} - k_4 \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$i_L = \frac{V_T}{R} - \left(\frac{V_T}{R} - I_0 \right) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \quad (10.52)$$

Es muy común encontrar la ecuación (10.52) expresada en términos de la constante de tiempo τ (tau) que sirve para saber en cuánto tiempo se alcanza el régimen permanente en el circuito RL en serie después de activar el *switch* S_W .

El valor de la constante de tiempo τ (tau) se iguala con el valor de tiempo t que haga que el exponente de la función exponencial e en la ecuación (10.52) tenga un valor igual a -1 .

En la ecuación (10.53) se muestra cómo calcular el valor de t para igualarlo con la constante de tiempo τ (tau) del circuito RL en serie.

$$-\frac{R}{L}t = -1 \quad (10.53)$$

$$t = \frac{L}{R}$$

$$\therefore \tau = \frac{L}{R} \quad (10.54)$$

De tal manera que es muy común encontrar la ecuación (10.52) expresada en términos de la constante de tiempo τ (tau), tal como aparece en la ecuación (10.55).

$$i_L = \frac{V_T}{R} - \left(\frac{V_T}{R} - I_0 \right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (10.55)$$

La ecuación (10.52) y (10.55) son correctas, sólo dependerá del gusto de cada quien para usar una u otra. Lo importante es saber determinar el valor τ (tau), ya que este valor estará relacionado directamente con el régimen transitorio y el régimen permanente o estable de un circuito RL en serie.

ANÁLISIS Y SOLUCIÓN DE CIRCUITOS RL

Una vez que se ha obtenido la solución de la ecuación del circuito RL en serie, se resuelven varios ejemplos para utilizarla.

Antes de comenzar a resolver cualquiera de ellos, es importante mencionar que:

- La ecuación (10.52) es correcta, pero sólo brinda la solución para encontrar la corriente i_L de un inductor conectado en serie con una resistencia y una fuente de alimentación. Si el circuito tiene una forma distinta, entonces se debe transformar hasta que tenga la forma adecuada para poder aplicar la ecuación (10.52).
- Antes de resolver cualquier circuito RL en serie, es indispensable conocer cuánto vale la condición inicial de corriente I_0 , si el problema no lo dice y si no hay elementos o condiciones que indiquen lo contrario, se asumirá que ésta vale $I_0 = 0$ A.
- El valor de la constante de tiempo τ depende de los valores de resistencia e inductor, por lo tanto, puede ser distinta para cada problema que se resuelva.

Ejemplo 10-9. A partir del circuito que se presenta en la Figura 10.41, en el que se cierra el *switch* S_W en $t = 0$ s, obtener:

- a) La ecuación de la corriente i_L válida para $(t > 0)$.
- b) El valor de la constante de tiempo τ .
- c) La ecuación del voltaje en el inductor v_L .
- d) La gráfica de la corriente i_L y de voltaje v_L , desde que se acciona el interruptor y hasta que transcurre un tiempo de 5τ .

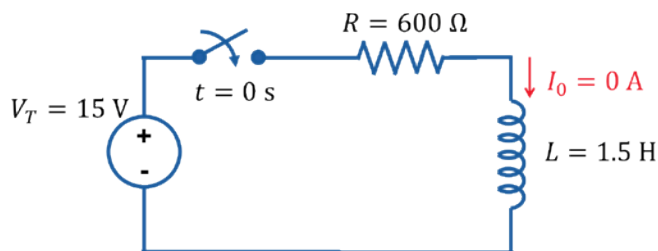


Figura 10.41. Circuito antes de accionar el switch S_W para calcular la corriente i_L y el voltaje v_L .

Respuesta.

En la Figura 10.42 se muestra cómo queda el circuito después de cerrar el interruptor. De igual manera, se establece en el ejemplo que la condición inicial (C.I.) de corriente en el inductor es $I_0 = 0$ A.

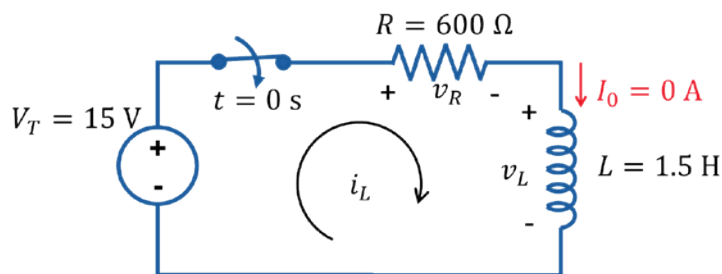


Figura 10.42. Circuito después de accionar el switch S_W para calcular la corriente i_L y el voltaje v_L .

- a) A partir de la Figura 10.42 sustituimos los valores en la ecuación (10.52) y simplificamos para obtener la ecuación de la corriente i_L después de cerrar el interruptor.

$$i_L = \frac{V_T}{R} - \left(\frac{V_T}{R} - I_0 \right) \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$i_L = \frac{V_T}{R} - \left(\frac{V_T}{R} - 0 \text{ A} \right) \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$i_L = \frac{V_T}{R} - \frac{V_T}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$i_L = \frac{V_T}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \quad (10.56)$$

$$i_L = \frac{15 \text{ V}}{600 \Omega} \left(1 - e^{-\frac{600 \Omega}{1.5 \text{ H}}t} \right)$$

$$i_L = 0.025(1 - e^{-400t}) \text{ A} \quad (10.57)$$

- b) El valor de la constante de tiempo se calcula con la ecuación (10.54), resultando:

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{1.5 \text{ H}}{600 \Omega}$$

$$\tau = 2.5 \text{ ms}$$

Nota: el análisis de dimensiones se deja como inquietud para el estudiante.

- c) Para obtener la ecuación del voltaje en el inductor v_L podemos utilizar la ecuación (10.6), la cual se deriva la ecuación (10.57) y se multiplica por la inductancia L .

$$v_L = L \frac{d(i_L)}{dt}$$

$$v_L = (1.5 \text{ H}) \frac{d}{dt} [(0.025 - 0.025 \cdot e^{-400t}) \text{ A}]$$

$$v_L = (1.5)[0 - (0.025)(-400)e^{-400t}] \text{ V}$$

$$v_L = 15 e^{-400t} \text{ V} \quad (10.58)$$

Otra forma de obtener la ecuación del voltaje en el inductor v_L es con la ley de voltajes de Kirchhoff, aplicada al circuito de la Figura 10.42. Se despeja el voltaje v_L y, calculando la ecuación del voltaje en la resistencia v_R junto con el voltaje de la fuente de alimentación V_T , se obtiene el voltaje del inductor.

$$-V_T + v_R + v_L = 0$$

Despejando el voltaje v_L se tiene:

$$v_L = V_T - v_R$$

Sustituimos el voltaje v_R por su respectivo producto $i_L R$.

$$v_L = V_T - i_L R \quad (10.59)$$

Sustituimos la corriente i_L de la ecuación (10.56) y en la ecuación (10.59), y resulta la ecuación (10.60).

$$v_L = V_T - \left[\frac{V_T}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \right] R$$

$$v_L = V_T - V_T \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

$$v_L = V_T - V_T + V_T \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$v_L = V_T \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \quad (10.60)$$

Sustituimos los valores de la Figura 10.42 en la ecuación (10.60) y llegamos al mismo resultado que se obtuvo en la ecuación (10.58).

$$v_L = V_T \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$v_L = 15 \cdot e^{-\frac{600 \Omega}{1.5 \text{ H}}t} \text{ V}$$

$$v_L = 15 e^{-400t} \text{ V} \quad (10.61)$$

- d) Para construir la gráfica de corriente i_L y de voltaje v_L primero se obtienen los valores con los que se construye la Tabla 10.10. Estos valores se calculan con la ecuación (10.57) y con la ecuación (10.58) para valores de tiempo que lleguen hasta 5τ , es decir, hasta 12.5 ms. En la Figura 10.43 se muestra la gráfica de la corriente en el inductor desde $t = 0$ s, cuando se cierra el interruptor. En la gráfica que se confirma que la corriente comienza desde 0 A y llega hasta 25 mA, lo cual confirma que el inductor se comporta como un circuito abierto para $t = 0$ s y como un corto circuito cuando se encuentra en régimen permanente, una vez que transcurren 5τ .

Tabla 10.10. Valores de corriente y de voltaje en el inductor para distintos grados de la constante de tiempo τ

| Constante de tiempo | t [ms] | i_L [mA] | v_L [V] |
|---------------------|----------|------------|-----------|
| 0τ | 0.00 | 0.000 | 15.000 |
| 0.5τ | 1.25 | 9.837 | 9.098 |
| 1τ | 2.50 | 15.803 | 5.518 |
| 1.5τ | 3.75 | 19.422 | 3.347 |
| 2τ | 5.00 | 21.617 | 2.030 |
| 2.5τ | 6.25 | 22.948 | 1.231 |
| 3τ | 7.50 | 23.755 | 0.747 |
| 3.5τ | 8.75 | 24.245 | 0.453 |
| 4τ | 10.00 | 24.542 | 0.275 |
| 4.5τ | 11.25 | 24.722 | 0.167 |
| 5τ | 12.50 | 24.832 | 0.101 |

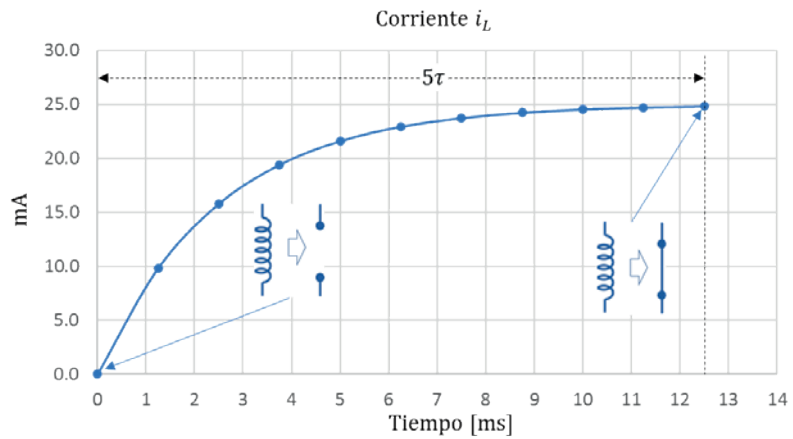


Figura 10.43. Gráfica de corriente i_L del inductor para distintos valores de tiempo τ .

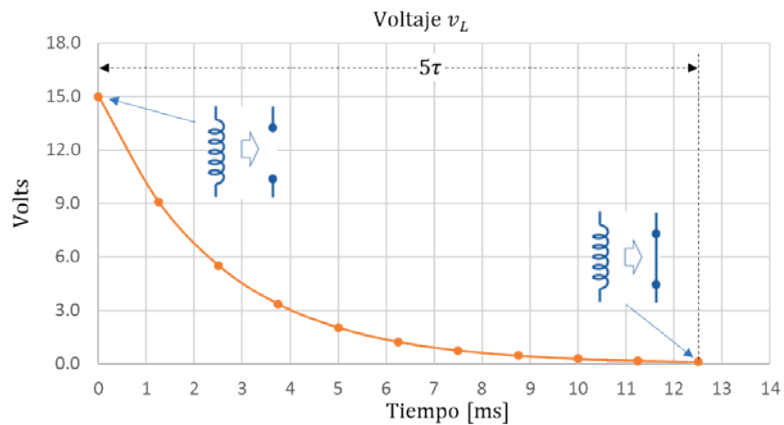


Figura 10.44. Gráfica del voltaje v_L en el inductor para distintos valores de tiempo τ .

La gráfica del voltaje v_L con respecto del tiempo se muestra en la Figura 10.44. En esta gráfica también se pueden comprobar varias cosas, la primera es que el voltaje del inductor v_L inicia desde 15 V, confirmando que el comportamiento del inductor para $t = 0$ s (cuando no tiene ninguna condición inicial) es como la de un circuito abierto, por aparecer el voltaje de la fuente entre las terminales del inductor. Segundo, que después de un tiempo de 5τ , el inductor se comporta como un corto circuito y por lo tanto el voltaje entre sus terminales es de $v_L = 0$ V. Tercero, que al ser una respuesta también del tipo exponencial, las señales de voltaje y corriente llegan al régimen o estado estable en un tiempo equivalente a 5τ .

Ejemplo 10-10. El circuito de la Figura 10.45 lleva conectado así desde ayer por la mañana y hoy por la tarde se abrió el interruptor ($t = 0$ s), obtener:

- La condición inicial de corriente $i_L(0) = I_0$ cuando se abrió el interruptor.
- La ecuación de i_L y de v_L después de que se abre el interruptor ($t > 0$).
- La gráfica de i_L y de v_L desde que se accionó el interruptor y hasta que alcanzaron el régimen permanente.

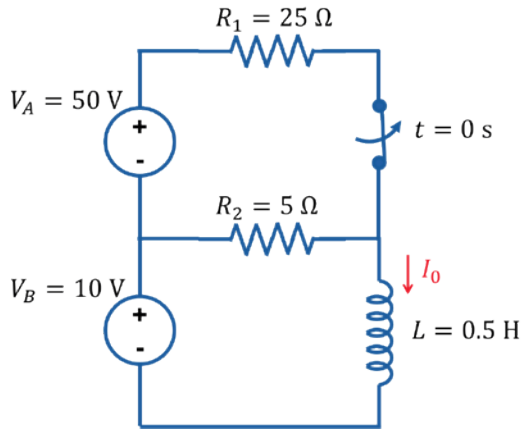


Figura 10.45. Circuito que llevaba conectado así desde ayer por la mañana.

Respuesta.

- a) Como el circuito llevaba conectado así desde ayer, el inductor ya se comportaba como un corto circuito, por lo tanto, la corriente $i_L(0) = I_0$ es la del conductor que sustituye al inductor, como se muestra en la Figura 10.46.

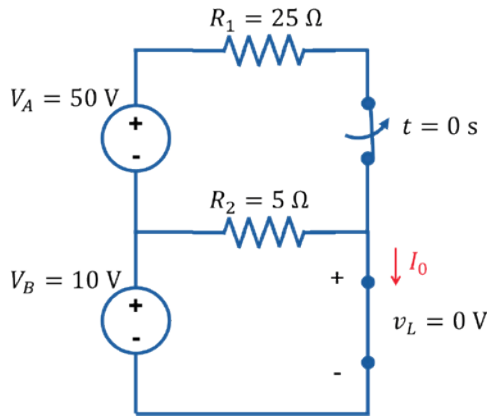


Figura 10.46. Comportamiento del inductor antes de abrir el interruptor.

Para calcular la corriente $i_L(0) = I_0$ a partir de la Figura 10.46 se puede aplicar cualquiera de los métodos ya estudiados. En este caso utilizaremos el principio de superposición y se dejará al alumno que compruebe el resultado con cualquiera de los otros métodos ya estudiados. En la ecuación (10.62) se presenta el cálculo de la corriente I_0 .

$$I_0 = \frac{V_A}{R_1} + \frac{V_B}{(R_1 \parallel R_2)}$$

$$I_0 = \frac{50 \text{ V}}{25 \Omega} + \frac{10 \text{ V}}{\left[\frac{(25 \Omega)(5 \Omega)}{25 \Omega + 5 \Omega} \right]}$$

$$I_0 = 2 \text{ A} + 2.4 \text{ A}$$

$$I_0 = 4.4 \text{ A} \quad (10.62)$$

- b) El circuito de la Figura 10.47 es el que resulta después de que se abre el interruptor. En este circuito se observa que tanto la fuente de voltaje V_A , así como la resistencia R_1 (elementos en gris) ya no influyen en la respuesta del circuito, ya que quedan desconectados al abrir el interruptor. Por lo tanto, la corriente i_L para ($t > 0$) se determina únicamente con la fuente de voltaje V_B y con la resistencia R_2 .

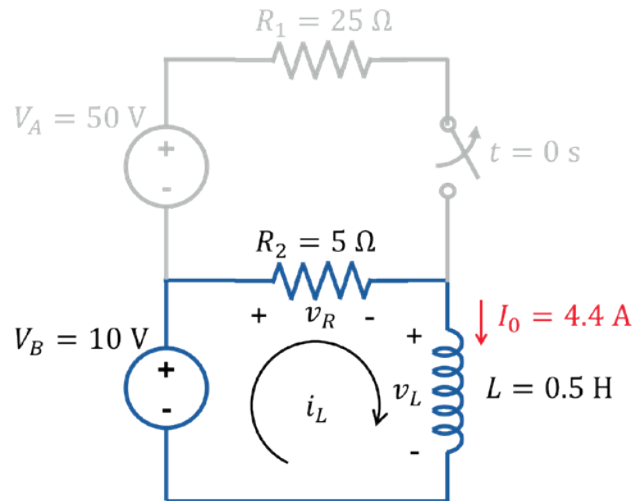


Figura 10.47. Circuito que resulta después de abrir el interruptor para calcular la corriente i_L .

Para calcular la corriente del inductor i_L para ($t > 0$) se sustituyen los valores de la Figura 10.47 en la ecuación (10.52), resultando la ecuación (10.63).

$$i_L = \frac{V_T}{R} - \left(\frac{V_T}{R} - I_0 \right) \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$i_L = \frac{V_B}{R_2} - \left(\frac{V_B}{R_2} - I_0 \right) \cdot e^{-\frac{R_2}{L}t} \quad (10.63)$$

Sustituyendo los valores resulta:

$$\begin{aligned} i_L &= \frac{10 \text{ V}}{5 \Omega} - \left(\frac{10 \text{ V}}{5 \Omega} - 4.4 \text{ A} \right) \cdot e^{-\frac{5 \Omega}{0.5 \text{ H}} t} \\ i_L &= 2 \text{ A} - (2 \text{ A} - 4.4 \text{ A}) \cdot e^{-10 t} \\ i_L &= 2 \text{ A} - (-2.4 \text{ A}) \cdot e^{-10 t} \\ i_L &= 2 \text{ A} + 2.4 \cdot e^{-10 t} \text{ A} \end{aligned} \quad (10.64)$$

Utilizamos la ecuación (10.59) para calcular el voltaje v_L en el inductor.

$$v_L = V_T - i_L R$$

Sustituimos la corriente i_L , que se obtuvo en la ecuación (10.63), en la ecuación (10.59) y resulta la ecuación (10.65).

$$\begin{aligned} v_L &= V_T - \left[\frac{V_T}{R} - \left(\frac{V_T}{R} - I_0 \right) \cdot e^{-\frac{R}{L} t} \right] R \\ v_L &= V_T - V_T + R \left(\frac{V_T}{R} - I_0 \right) \cdot e^{-\frac{R}{L} t} \\ v_L &= R \left(\frac{V_T}{R} - I_0 \right) \cdot e^{-\frac{R}{L} t} \\ v_L &= (V_T - I_0 R) \cdot e^{-\frac{R}{L} t} \end{aligned} \quad (10.65)$$

Sustituimos las variables y los valores de la Figura 10.47 en la ecuación (10.65) y resulta la ecuación (10.66).

$$\begin{aligned} v_L &= (V_T - I_0 R) \cdot e^{-\frac{R}{L} t} \\ v_L &= (V_B - I_0 R_2) \cdot e^{-\frac{R_2}{L} t} \\ v_L &= (10 \text{ V} - (4.4 \text{ A})(5 \Omega)) \cdot e^{-\frac{5 \Omega}{0.5 \text{ H}} t} \\ v_L &= (10 \text{ V} - 22 \text{ V}) \cdot e^{-\frac{5 \Omega}{0.5 \text{ H}} t} \\ v_L &= -12 \cdot e^{-\frac{5 \Omega}{0.5 \text{ H}} t} \text{ V} \end{aligned} \quad (10.66)$$

- a) Para construir la gráfica de la corriente y del voltaje, es necesario conocer cuánto vale la constante de tiempo τ , la cual determinamos con la ecuación (10.54), resultando:

$$\tau = \frac{L}{R_2} = \frac{0.5 \text{ H}}{5 \Omega}$$

$$\tau = 0.1 \text{ s}$$

Por lo tanto, la corriente alcanza la estabilidad o el régimen permanente después de que transcurre un tiempo de $t = 5\tau = 0.5$ s. En la Tabla 10.11 se muestran los valores de la corriente i_L y del voltaje v_L , calculados para distintos valores de tiempo, hasta que se alcanza la estabilidad.

Tabla 10.11. Valores de corriente i_L y de voltaje v_L para 5τ

| Constante de tiempo | t [s] | i_L [A] | v_L [V] |
|---------------------|---------|-----------|-----------|
| 0τ | 0.00 | 4.400 | -12.000 |
| 0.5τ | 0.05 | 3.456 | -7.278 |
| 1τ | 0.10 | 2.883 | -4.415 |
| 1.5τ | 0.15 | 2.536 | -2.678 |
| 2τ | 0.20 | 2.325 | -1.624 |
| 2.5τ | 0.25 | 2.197 | -0.985 |
| 3τ | 0.30 | 2.119 | -0.597 |
| 3.5τ | 0.35 | 2.072 | -0.362 |
| 4τ | 0.40 | 2.044 | -0.220 |
| 4.5τ | 0.45 | 2.027 | -0.133 |
| 5τ | 0.50 | 2.016 | -0.081 |

En la Figura 10.48 se muestra la gráfica de la corriente i_L respecto del tiempo. Obsérvese que comienza en el valor de la condición inicial con un valor de 4.4 A y se estabiliza después de 0.5 s en un valor de 2 A.

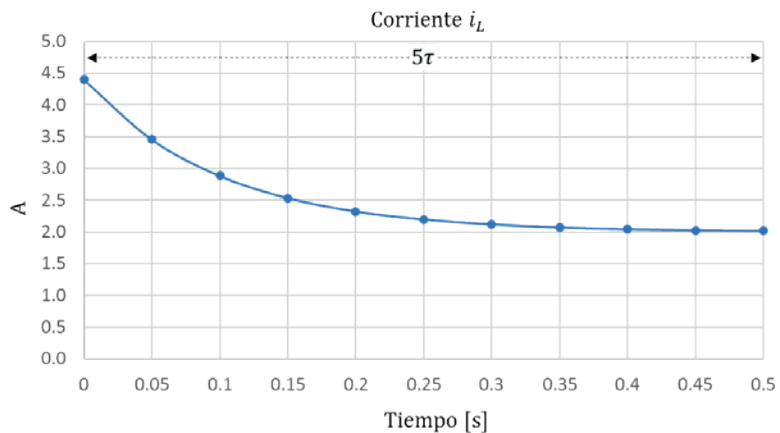


Figura 10.48. Transición de la corriente cuando pasa de un valor a otro y se vuelve a estabilizar.

En la Figura 10.49 se muestra la gráfica del voltaje v_L respecto del tiempo. En esta gráfica se observa que, una vez que ocurre la transición y las condiciones del circuito cambian, el voltaje del inductor que valía 0 V antes de abrir el interruptor modifica su valor instantáneamente a uno negativo de -12 V que depende de la condición inicial de corriente, así como de la inductancia y la re-

sistencia R_2 . Una vez que transcurre el tiempo $5\tau = 0.5$ s, el voltaje del inductor v_L vuelve a llegar a 0 V, comportándose nuevamente como si se tratase simplemente de un conductor en corto circuito.

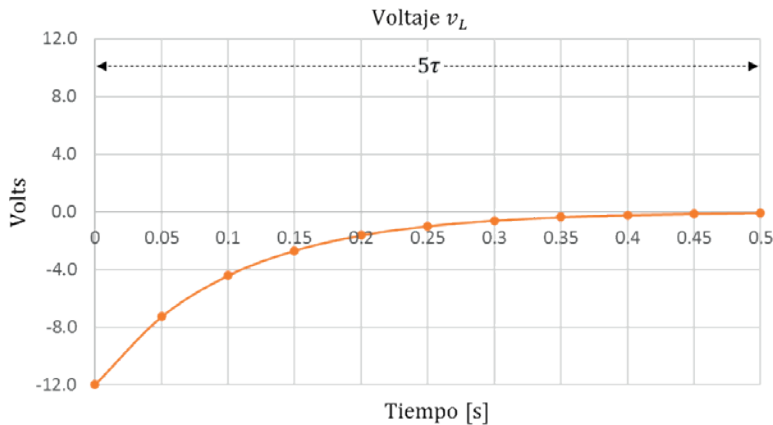


Figura 10.49. Comportamiento transitorio del voltaje en el inductor cuando pasa de un valor de corriente a otro.

Ejemplo 10-11. El circuito de la Figura 10.50 llevaba conectado así por mucho tiempo cuando el interruptor se cerró en ($t = 0$ s), obtener:

- a) La ecuación de i_L e i_X válidas para $t > 0$ s.
- b) La gráfica de i_L e i_X después de que se cierra el interruptor en $t = 0$ s.

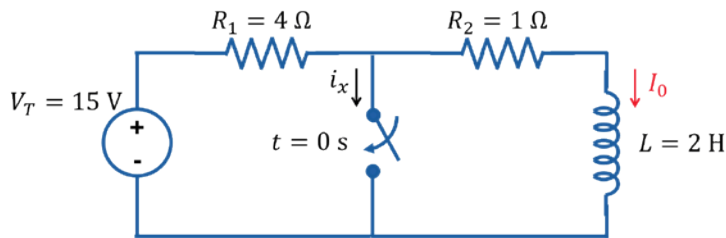


Figura 10.50. Circuito RL funcionando en régimen permanente desde hace mucho tiempo.

Respuesta.

- a) El circuito lleva mucho tiempo conectado como aparece en la Figura 10.50, por lo tanto, antes de que el interruptor dé cierre, el inductor se puede sustituir por un corto circuito, tal como se muestra en la Figura 10.51. Esto ocasiona que la corriente que se debe utilizar para la condición inicial I_0 se pueda calcular con la ley de Ohm en la ecuación (10.67).

$$I_0 = \frac{V_T}{R_1 + R_2}$$

$$I_0 = \frac{15 \text{ V}}{4 \Omega + 1 \Omega} = 3 \text{ A} \quad (10.67)$$

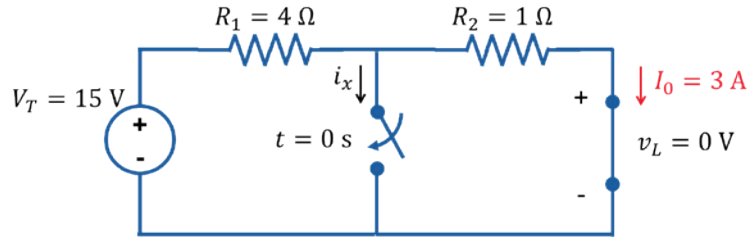


Figura 10.51. Comportamiento del inductor como corto circuito antes de cerrar el interruptor para poder calcular la condición inicial I_0 .

Una vez que se cierra el interruptor en $t = 0$, el circuito se modifica para quedar como se muestra en la Figura 10.52.

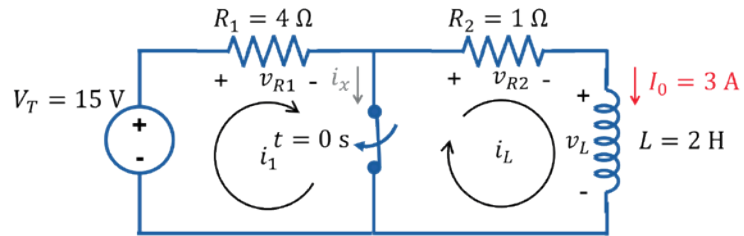


Figura 10.52. Circuito después de que el interruptor se ha cerrado en $t = 0$.

En este circuito, el interruptor desconecta a la resistencia R_2 y al inductor L para que ya no sigan recibiendo energía de la fuente de alimentación. Esto ocasiona que la corriente i_L del inductor se descargue a través de la resistencia R_2 hasta que desaparezca por completo. Al mismo tiempo, una corriente constante i_1 circulará entre la fuente de alimentación V_T y la resistencia R_1 , tal como se aprecia en la Figura 10.53. De este modo, la corriente i_x , que circula a través del interruptor, es la diferencia entre la corriente constante i_1 que produce la fuente V_T y la resistencia R_1 , y la corriente de descarga del inductor, tal como se indica en la ecuación (10.68).

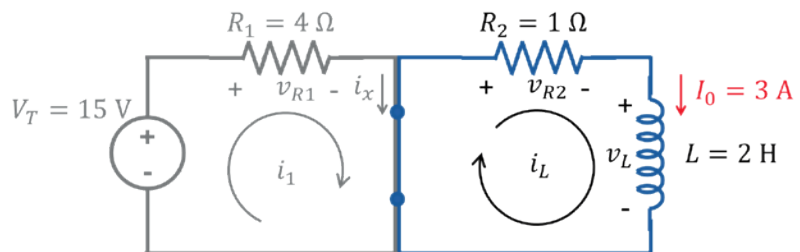


Figura 10.53. Circuito en el que se aprecian las dos corrientes que conforman i_x .

$$i_x = i_1 - i_L \quad (10.68)$$

La corriente i_1 se puede calcular directamente con la ley de Ohm aplicada a la fuente V_T y a la resistencia R_1 , resultando la ecuación (10.69).

$$i_1 = \frac{V_T}{R_1} = \frac{15 \text{ V}}{4 \Omega}$$

$$i_1 = 3.75 \text{ A} \quad (10.69)$$

El interruptor eliminó la fuente de alimentación que tenía el circuito para la resistencia R_2 y para el inductor L , por lo tanto, tiene un valor de 0 V al momento de calcular la corriente i_L , después de cerrar el interruptor.

En la ecuación (10.52) sustituimos $V_T = 0 \text{ V}$ para calcular la corriente a través del inductor y nos resulta la ecuación (10.70).

$$i_L = \frac{V_T}{R} - \left(\frac{V_T}{R} - I_0 \right) \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$i_L = \frac{0 \text{ V}}{R} - \left(\frac{0 \text{ V}}{R} - I_0 \right) \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$i_L = -(-I_0) \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$i_L = I_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \quad (10.70)$$

Al sustituir los valores del inductor y la resistencia nos resulta la ecuación (10.71).

$$i_L = I_0 \cdot e^{-\frac{R_2}{L}t}$$

$$i_L = 3 \cdot e^{-\frac{1 \Omega}{2 \text{ H}}t} \text{ A}$$

$$i_L = 3 \cdot e^{-0.5t} \text{ A} \quad (10.71)$$

Por lo tanto, para calcular la corriente i_x utilizamos la ecuación (10.68), sustituimos la ecuación (10.69) y la ecuación (10.71), y nos resulta la ecuación (10.72).

$$i_x = i_1 - i_L$$

$$i_x = 3.75 \text{ A} - 3 \cdot e^{-0.5t} \text{ A} \quad (10.72)$$

- a) Para construir la gráfica de las corrientes, es necesario conocer cuánto vale la constante de tiempo τ , la cual se determina con la ecuación (10.54), resultando:

$$\tau = \frac{L}{R_2} = \frac{2 \text{ H}}{1 \Omega}$$

$$\tau = 2 \text{ s}$$

Por lo tanto, la corriente alcanza la estabilidad o el régimen permanente después de transcurrir un tiempo de $t = 5\tau = 10$ s. En la Tabla 10.12 se muestran los valores de la corriente i_L y de la corriente i_X calculados para distintos valores de tiempo hasta que se alcanzan la estabilidad.

Tabla 10.12. Valores de corriente i_L e i_X para 5τ

| Constante de tiempo | t [s] | i_L [A] | i_X [A] |
|---------------------|---------|-----------|-----------|
| 0τ | 0.0 | 3.000 | 0.750 |
| 0.5τ | 1.0 | 1.820 | 1.930 |
| 1τ | 2.0 | 1.104 | 2.646 |
| 1.5τ | 3.0 | 0.669 | 3.081 |
| 2τ | 4.0 | 0.406 | 3.344 |
| 2.5τ | 5.0 | 0.246 | 3.504 |
| 3τ | 6.0 | 0.149 | 3.601 |
| 3.5τ | 7.0 | 0.091 | 3.659 |
| 4τ | 8.0 | 0.055 | 3.695 |
| 4.5τ | 9.0 | 0.033 | 3.717 |
| 5τ | 10.0 | 0.020 | 3.730 |

En la Figura 10.54 se muestra la gráfica de la corriente i_L respecto del tiempo. Obsérvese que comienza en el valor de la condición inicial con 3 A y se estabiliza después de 10 s en un valor de prácticamente 0 A. En la Figura 10.55 se muestra la corriente i_X en la que se observa que la corriente comienza en un valor de 0.75 A hasta que alcanza el valor de corriente de 3.75 A después de que desaparece la corriente del inductor i_L .

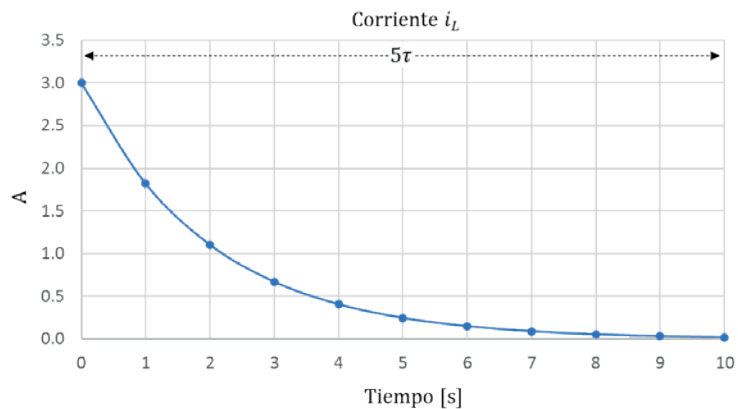


Figura 10.54. Corriente i_L en el inductor después de cerrar el interruptor.

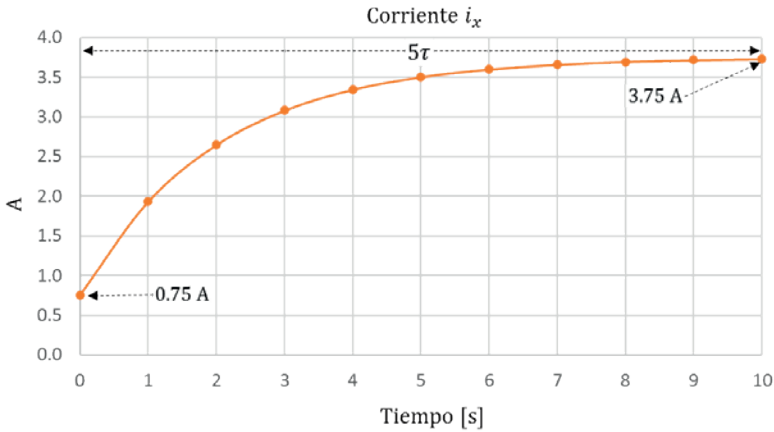
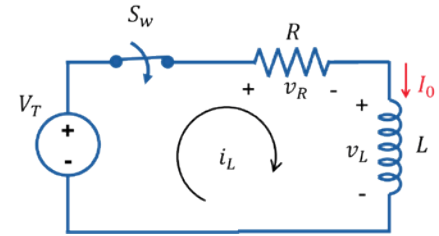
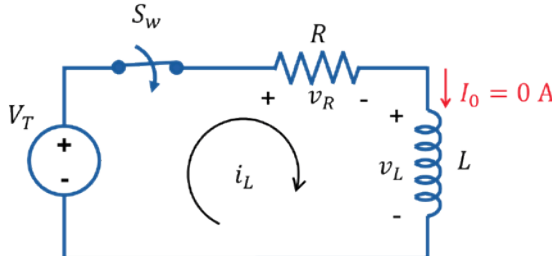
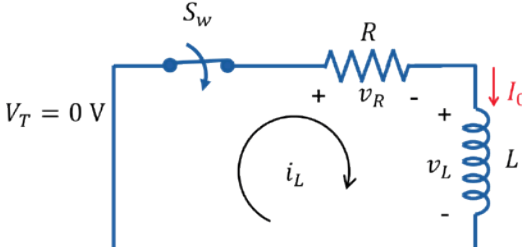


Figura 10.55. Corriente i_x en el interruptor después de cerrarlo.

RESUMEN DE ECUACIONES PARA EL CIRCUITO RL

La ecuación (10.52) es la solución general para resolver cualquier circuito RL formado por una fuente de voltaje con una resistencia y un inductor conectados en serie. Se pueden tener ecuaciones particulares para i_L si en el circuito se posee o no una condición inicial de corriente I_0 , o si la fuente de alimentación es nula $V_T = 0$ V. En la Tabla 10.13 se muestra un resumen de las ecuaciones que se pueden obtener a partir de la ecuación (10.52) y dependiendo de la presencia o no de V_T e I_0 . Del mismo modo, se incluyen las ecuaciones para poder calcular el voltaje v_L en el inductor para cada uno de los casos.

Tabla 10.13. Resumen de ecuaciones para calcular el voltaje del condensador en distintas condiciones

| Circuito RL | Ecuaciones para i_L y v_L |
|---|---|
|  | $\tau = \frac{L}{R}$ $i_L = \frac{V_T}{R} - \left(\frac{V_T}{R} - I_0 \right) \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$ $v_L = (V_T - I_0 R) \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$ |
|  | $i_L = \frac{V_T}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$ $v_L = V_T \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$ |
|  | $i_L = I_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$ $v_L = -I_0 R \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$ |

RESUMEN Y CONCLUSIÓN

Se presentó el análisis de los circuitos de primer orden RL y RC , se aplicó el método de variables separables para resolver las ecuaciones diferenciales resultantes y obtener la ecuación de corriente i_L y del voltaje v_C respectivamente. Para cada tipo de problemas se resolvieron ejercicios en los que se proporcionaba el valor de la condición inicial de corriente I_0 o de voltaje V_{C0} y en los que estas condiciones se calculaban a partir de la operación del circuito. También se resolvieron ejercicios en los que se tenía que simplificar el circuito para transformarlo y llevarlo a la forma de un circuito serie de fuente de alimentación, resistencia y capacitor o inductor. Al momento de resolver los ejemplos, se utilizaron otros de los métodos de análisis de los circuitos para poder calcular las corrientes o los voltajes necesarios. Para cada tipo de circuito se obtuvieron las respectivas constantes de tiempo τ y en ambos tipos de circuito se

determinó que ser alcanzable el comportamiento en régimen permanente cuando transcurría un tiempo igual a 5τ . Se construyeron las gráficas de corriente y de voltaje en varios de los ejercicios para observar el comportamiento de tales aspectos en los elementos del circuito. Al final de cada uno de los tipos de análisis, se presentó un resumen de las ecuaciones con las que se puede calcular la corriente y/o el voltaje, tanto del inductor como del capacitor.

PROBLEMAS PROPUESTOS

A continuación, se proponen una serie de problemas para resolver utilizando el análisis de circuitos RL y RC .

Prob. 10.1. En el circuito de la Figura 10.56, considerar $V_T = 5\text{ V}$, $R = 50\text{ k}\Omega$ y $C = 10\text{ }\mu\text{F}$. Determinar (a) la constante de tiempo τ del circuito, la ecuación del voltaje v_C para $t > 0\text{ s}$ con (b) $V_{C0} = 0\text{ V}$, (c) $V_{C0} = 10\text{ V}$ y (d) $V_{C0} = -10\text{ V}$.

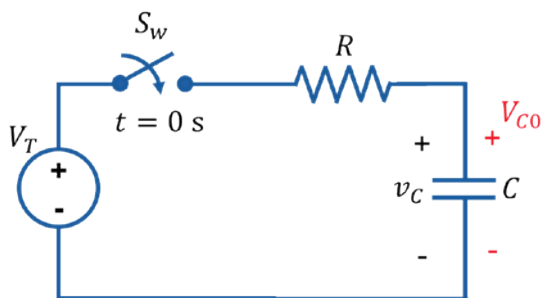


Figura 10.56.

(Sol. $\tau = 0.5\text{ s}$, $v_C = 5(1 - e^{-2t})\text{ V}$, $v_C = 5(1 + e^{-2t})\text{ V}$, $v_C = 5\text{ V} - 15e^{-2t}\text{ V}$).

Prob. 10.2 En el circuito de la Figura 10.57, el interruptor de cierra en $t = 0\text{ s}$, si el capacitor no está cargado, determinar la ecuación del voltaje v_C válida para $t > 0\text{ s}$.

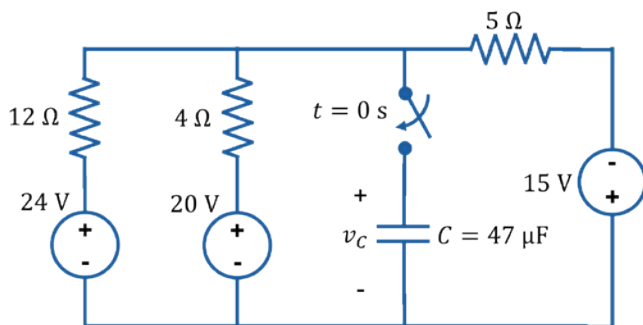


Figura 10.57.

(Sol. $v_C = -0.6(1 - e^{-17.730t})\text{ V}$).

Prob. 10.3. El circuito de la Figura 10.58 lleva mucho tiempo conectado, (a) calcular el valor de V_{C0} antes de abrir el interruptor en $t = 0$ s, y (b) obtener la ecuación del voltaje v_C válida para $t > 0$ s.

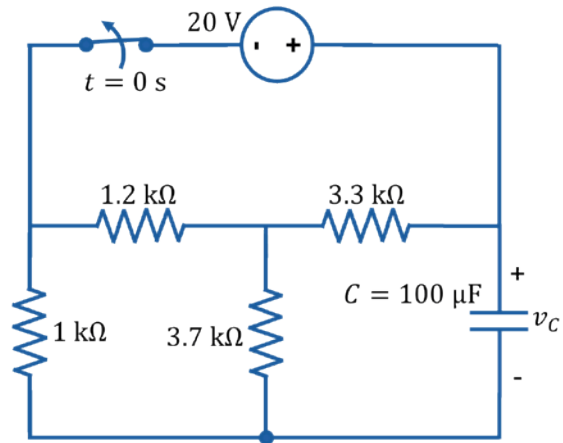


Figura 10.58.

(Sol. $V_{C0} = 19.04$ V, $V_C = 19.04 \cdot e^{-2.136t}$ V).

Prob. 10.4. En el circuito de la Figura 10.59 considerar $V_T = 12$ V, $R = 10$ Ω y $L = 2.2$ mH. Determinar (a) la constante de tiempo τ del circuito, la ecuación de la corriente i_L para $t > 0$ s con (b) $I_0 = 0$ A, e (c) $I_0 = 0.5$ A.

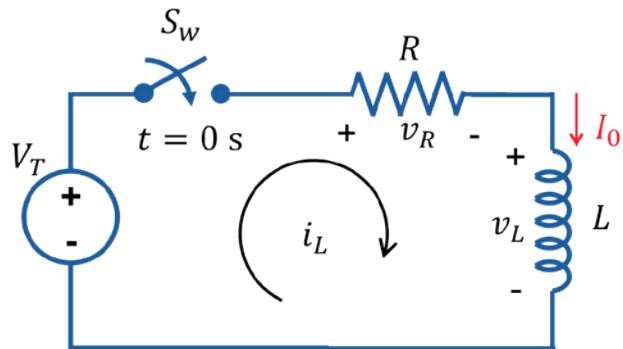


Figura 10.59.

(Sol. $\tau = 220$ μ s, $i_L = 1.2 \cdot (1 - e^{-4545.45t})$ A, $i_L = 1.2$ A $v_C - 0.7 \cdot e^{-2t}$ A).

Prob. 10.5. En el circuito de la Figura 10.60 determinar la ecuación de la corriente i_L para $t > 0$ s.

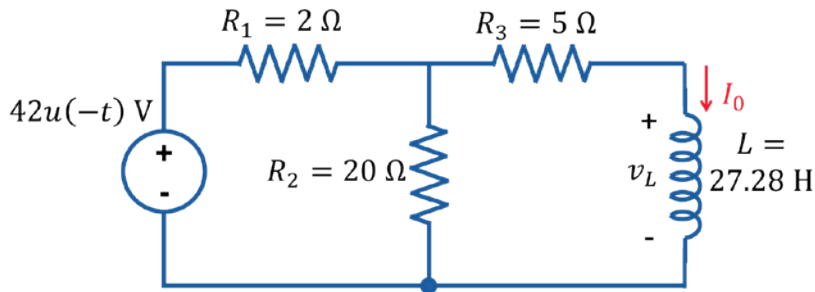


Figura 10.60.

(Sol. $i_L = 5.6 \cdot e^{-0.25t}$ A).

Prob. 10.6. El circuito de la Figura 10.61 llevaba mucho tiempo conectado cuando en $t = 0$ s el interruptor se abrió. Calcular la ecuación del voltaje v_C y de la corriente i_L válidas para $t > 0$ s.

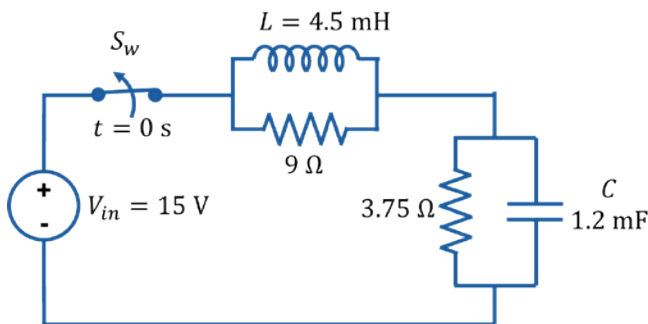


Figura 10.61.

(Sol. $v_C = 15 \cdot e^{-222.22t}$ V, $i_L = 4 \cdot e^{-2000t}$ A).

REFERENCIAS DEL CAPÍTULO

- Figuroa M., G. (2015). *Ecuaciones diferenciales. Transformada de Laplace*. Revista digital Matemática, Educación e Internet. <https://bitly.ws/33EKh>
- Hernández Gaviño, R. (2010). *Introducción a los sistemas de control. Conceptos, aplicación y simulación con MATLAB*. (1.ª edición). México: Pearson Educación

**INTRODUCCIÓN
AL TRANSISTOR BJT**

11

INTRODUCCIÓN

En Ingeniería Electrónica, uno de los dispositivos analógicos más utilizados en circuitos eléctricos es el Transistor de Unión Bipolar o BJT (*Bipolar Junction Transistor*) (Boyelstad & Nashelsky, 2009). Este dispositivo se utiliza en forma discreta para construir o elaborar circuitos electrónicos de control y de potencia; es la base para la construcción de circuitos mucho más complejos como amplificadores operacionales (OpAmp), circuitos de radio, etc. (Floyd, 2008). El estudio de los transistores BJT es tan extenso que se pueden escribir libros completos o estudiarse por separado en cursos universitarios completos. Sin embargo, una forma sencilla de introducir al estudiante al estudio de este dispositivo es considerándolo, en una de sus formas más simplificadas de operación, como fuente de corriente controlada por corriente. En la Figura 11.1 se muestra el símbolo general del transistor BJT (Hayt *et al.*, 2007). En esta figura se aprecia que el transistor es un dispositivo de tres terminales identificadas como base *B*, colector *C* y emisor *E*.

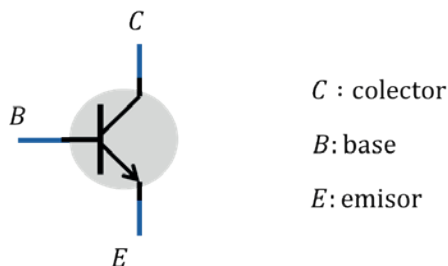


Figura 11.1. Símbolo del Transistor BJT con sus tres terminales.

TRANSISTOR BJT

Como ya se mencionó, un transistor BJT es un dispositivo electrónico de control que consta de tres terminales llamadas, base (*B*), colector (*C*) y emisor (*E*). Dependiendo de la dirección en la que circula la corriente a través de sus terminales, el transistor se puede clasificar en dos tipos distintos, transistor *NPN* o *PNP* (Boylestad & Nashelsky, 2009). En la Figura 11.2 se muestra el símbolo del transistor BJT con las direcciones de las corrientes en sus termina-

les. A las corrientes se les nombra de acuerdo con la terminal en la que se encuentran, es decir, a I_B se le llama corriente de base, a I_C se le llama corriente de colector y a I_E se le llama corriente de emisor.

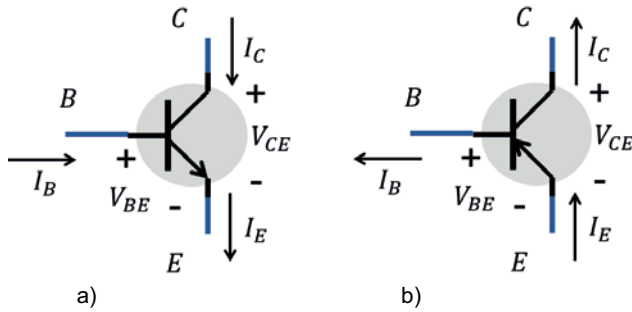


Figura 11.2. Dirección de las corrientes en transistor a) *NPN* b) *PNP*.

En la Figura 11.2 también se muestran los voltajes que forman parte del análisis del transistor, en este caso el voltaje base emisor V_{BE} y el voltaje colector emisor V_{CE} . Obsérvese que, si el transistor se analiza como un nodo en el que interactúan las tres corrientes I_B , I_C e I_E , tal como se muestra en la Figura 11.3 a) y b), entonces la ley de corrientes de Kirchhoff resulta igual para el transistor *NPN* y *PNP*.

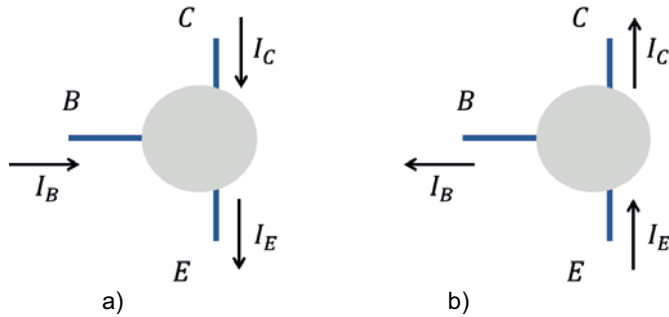


Figura 11.3. Transistor BJT considerado como un simple nodo a) *NPN* b) *PNP*.

La ecuación (11.1) expresa cómo se relacionan entre sí las tres corrientes del transistor BJT.

$$I_E = I_B + I_C \quad (11.1)$$

De esta manera, se observa que, para los dos tipos de transistores BJT, siempre se cumple con que la suma de la corriente de la base I_B más la corriente de colector I_C nos da como resultado la corriente del emisor I_E .

FUNCIONAMIENTO DEL TRANSISTOR BJT

En general, un transistor es un dispositivo de control; en este caso, lo que se controla es la corriente del colector I_C a partir de la corriente de la base I_B . Estas dos corrientes se encuentran relacionadas entre sí por medio de la ganancia beta β del transistor con la ecuación (11.2).

$$I_C = \beta I_B \quad (11.2)$$

Donde:

I_C : corriente del colector.

I_B : corriente de la base.

β : ganancia del transistor ($20 < \beta < 300$).

De la ecuación (11.2) se observa que, si la corriente de la base I_B es de 0 A, entonces la corriente del colector I_C también será de 0 A. Esto significa que el comportamiento del transistor entre las terminales del colector C y del emisor E es como el de un circuito abierto o como una resistencia muy alta (teóricamente infinita). Cuando esto sucede, se dice entonces que el transistor se encuentra en “**corte**”, es decir, no deja pasar corriente alguna entre las terminales de colector C y del emisor E puesto que el transistor actuará como el de un interruptor ideal abierto.

Por otro lado, si la corriente en la base I_B aumenta lo suficiente, entonces el comportamiento entre las terminales del colector C y del emisor E será como el de un corto circuito o como el de una resistencia de un valor muy bajo (teóricamente de 0Ω). Cuando esto sucede, se dice entonces que el transistor se encuentra en “**saturación**” ya que estará circulando el máximo valor posible de corriente de acuerdo con el valor de la fuente de alimentación V_{CC} y con el valor de las resistencias por las cuales esté circulando la corriente I_C .

Cuando el transistor no opera en corte o en saturación entonces se dice que se encuentra en una región “**activa**”, donde la resistencia entre colector C y emisor E será tal que haga que circule una corriente entre 0 A y el valor máximo de corriente posible.

Si nos damos cuenta, al transistor se le podría tratar como si fuera una resistencia variable entre el colector C y el emisor E , que se controla por la corriente de base I_B . Es por esta razón que se le llama “*transistor*”, ya que actúa como un “*transfer resistor*”, es decir, una resistencia de transferencia entre las terminales de colector C y emisor E que varía de acuerdo con el valor de la corriente de la base I_B (“Transistor”, 2021).

EL TRANSISTOR BJT COMO FUENTE DE CORRIENTE CONTROLADA POR CORRIENTE

De acuerdo con su modo operación, al transistor BJT también se le puede tratar como una fuente de corriente controlada por corriente. En este caso, la corriente de control es la corriente de la base I_B y la corriente controlada es la del colector I_C . Estas dos corrientes se relacionan entre sí por medio de una constante o ganancia adimensional llamada beta β y que es un dato que depende de las características de fabricación del transistor. Esta ganancia puede oscilar su valor desde unas pocas decenas hasta unos cuantos cientos tal como queda expresado en los datos de la ecuación (11.2).

En la Figura 11.4 se muestra esquemáticamente cómo quedan relacionadas las corrientes I_B e I_C en el transistor junto con la ganancia β .

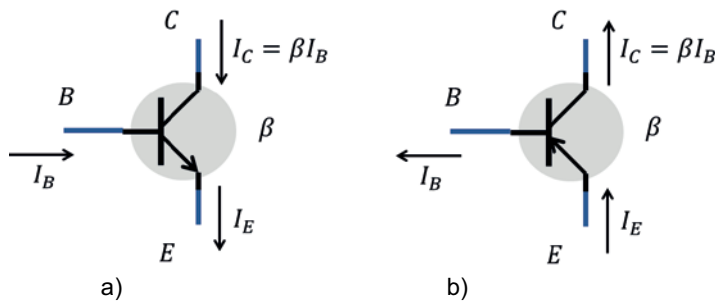


Figura 11.4. Relación entre la corriente de base I_B y la corriente de colector I_C del Transistor BJT a) *NPN* b) *PNP*.

Lo anterior significa que un transistor BJT puede ser sustituido por una fuente de corriente I_C controlada por otra corriente I_B cuyo circuito equivalente se muestra en la Figura 11.5. Es muy importante comprender que el voltaje que aparece entre la base y el emisor es una caída de tensión constante de $V_{BE} = 0.7 \text{ V}$ para el transistor *NPN* y una caída de tensión constante de $V_{BE} = -0.7 \text{ V}$ para el transistor *PNP*.

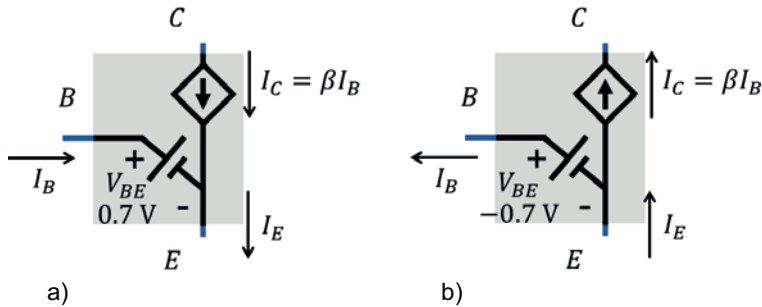


Figura 11.5. Transistor BJT como fuente de corriente controlada por corriente para a) *NPN* b) *PNP*.

Adicionalmente, y para facilitar algunos de los cálculos, la ecuación (11.2) se sustituye en la ecuación (11.1) y resulta la ecuación (11.3), que es una expresión para calcular la corriente del emisor I_E y que sólo depende de la ganancia β y de la corriente de base I_B .

$$\begin{aligned}
 I_E &= I_B + I_C \\
 I_E &= I_B + \beta I_B \\
 I_E &= I_B \cdot (\beta + 1) \quad (11.3)
 \end{aligned}$$

ANÁLISIS DE CIRCUITOS CON TRANSISTOR BJT

Con la sustitución del modelo equivalente de fuente de corriente controlada por corriente, y con las ecuaciones obtenidas, es posible resolver circuitos eléctricos en los que aparezca el transistor BJT para sus configuraciones básicas. A continuación, se resuelven dos de las configuraciones más comunes que se pueden encontrar para los transistores BJT.

Ejemplo 11-1. En la Figura 11.6 se muestra el circuito de polarización fija del transistor BJT. Considerando una ganancia $\beta = 180$ y la información que se presenta en el circuito, calcular la corriente de la base I_B , la corriente de colector I_C , la corriente de emisor I_E , el voltaje de la resistencia de colector V_{RC} y el voltaje entre colector y emisor V_{CE} .

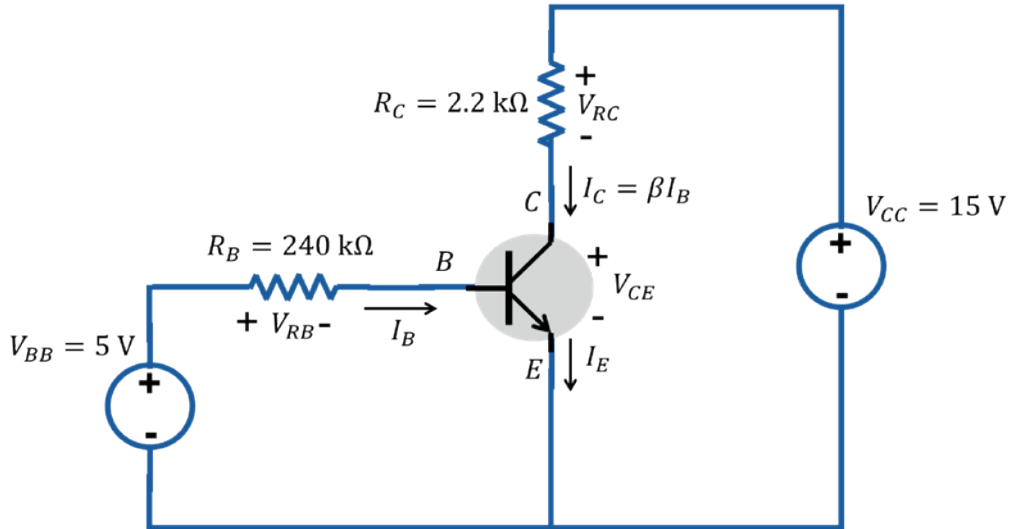


Figura 11.6. Circuito de Polarización fija del transistor BJT.

Solución.

En general, para resolver un circuito en el que se involucra al transistor BJT es necesario calcular primero el valor de la corriente de base I_B . Una vez que se conoce este valor, normalmente se puede calcular el resto de los parámetros del circuito. Por lo tanto, hay que hacer lo posible para determinar, en primer lugar, el valor de la corriente I_B . Sustituimos el transistor BJT utilizando el modelo de fuente de corriente controlada por corriente de la Figura 11.5a y nos resulta el circuito que se muestra en la Figura 11.7.

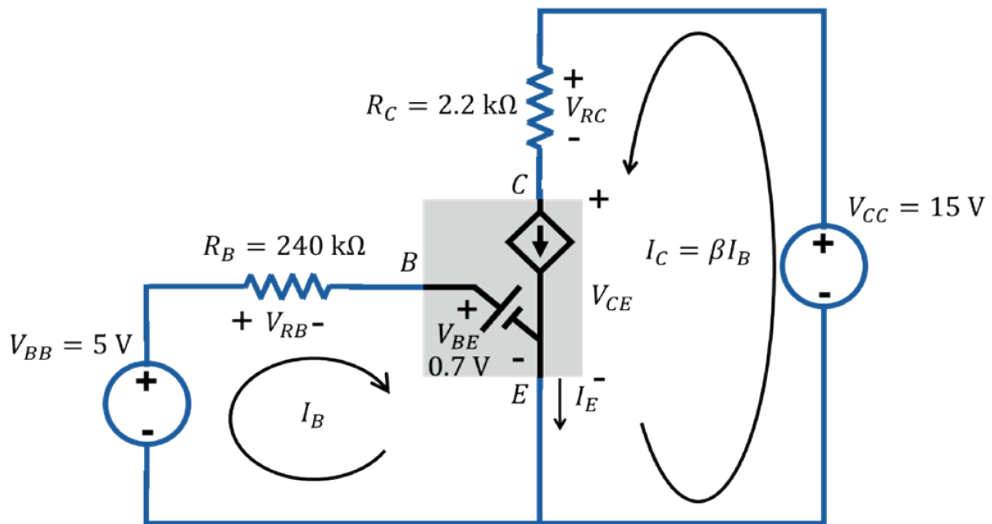


Figura 11.7. Circuito con el modelo de fuente de corriente controlada por corriente para el transistor BJT.

Después de sustituir el modelo de fuente de corriente controlada por corriente para el transistor BJT, en el circuito resultan dos mallas, una para la corriente I_B y otra para la corriente I_C .

En la Figura 11.7 se aprecia que lo único que comparten las dos mallas es el conductor por el cual circula la corriente del emisor I_E , por lo tanto, el cálculo de I_B se puede hacer de forma directa aplicando una ley de voltajes de Kirchhoff en la malla de I_B para poderla despejar.

Aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff en la malla de I_B resulta la ecuación (11.4).

$$-V_{BB} + I_B R_B + V_{BE} = 0 \text{ V} \quad (11.4)$$

Despejamos la corriente I_B y resulta la ecuación (11.5).

$$I_B = \frac{V_{BB} - V_{BE}}{R_B} \quad (11.5)$$

Con la ecuación (11.5) calculamos el valor de la corriente de base, resultando:

$$I_B = \frac{V_{BB} - V_{BE}}{R_B} = \frac{5 \text{ V} - 0.7 \text{ V}}{240 \text{ k}\Omega}$$

$$I_B = 17.91 \text{ }\mu\text{A}$$

Con la ecuación (11.2) y el valor de la corriente de base I_B se calcula directamente el valor de la corriente de colector I_C , resultando:

$$I_C = \beta I_B$$

$$I_C = (180)(17.91 \text{ }\mu\text{A})$$

$$I_C = 3.22 \text{ mA}$$

Calculamos la corriente de emisor I_E con la ecuación (11.3), resultando:

$$I_E = I_B \cdot (\beta + 1)$$

$$I_E = (17.91 \text{ }\mu\text{A}) \cdot (180 + 1)$$

$$I_E = 3.24 \text{ mA}$$

Para calcular el voltaje en la resistencia del colector V_{RC} utilizamos la ley de Ohm y multiplicamos la corriente del colector I_C por la resistencia del colector R_C , resultando la ecuación (11.6).

$$V_{RC} = I_C R_C \quad (11.6)$$

Sustituimos los valores del circuito de la Figura 11.7 en la ecuación (11.6) y resulta:

$$V_{RC} = I_C R_C$$

$$V_{RC} = (3.22 \text{ mA})(2.2 \text{ k}\Omega)$$

$$V_{RC} = 7.13 \text{ V}$$

Para calcular el voltaje entre colector y emisor aplicamos una ley de voltajes de Kirchhoff en la malla de I_C , resultando:

$$-V_{CC} + V_{RC} + V_{CE} = 0 \text{ V} \quad (11.7)$$

Despejamos el voltaje V_{CE} y resulta la ecuación (11.8).

$$V_{CE} = V_{CC} - V_{RC} \quad (11.8)$$

Con la ecuación (11.8) calculamos el valor del voltaje colector emisor V_{CE} , resultando:

$$V_{CE} = V_{CC} - V_{RC}$$

$$V_{CE} = 15 \text{ V} - 7.13 \text{ V}$$

$$V_{CE} = 7.87 \text{ V}$$

Ejemplo 11-2. En la Figura 11.8 se muestra el circuito de polarización fija con resistencia en emisor del transistor BJT. Considerando una ganancia $\beta = 180$ y la información que se presenta en el circuito, calcular I_B , I_C , I_E , V_{RC} , V_{RE} y V_{CE} .

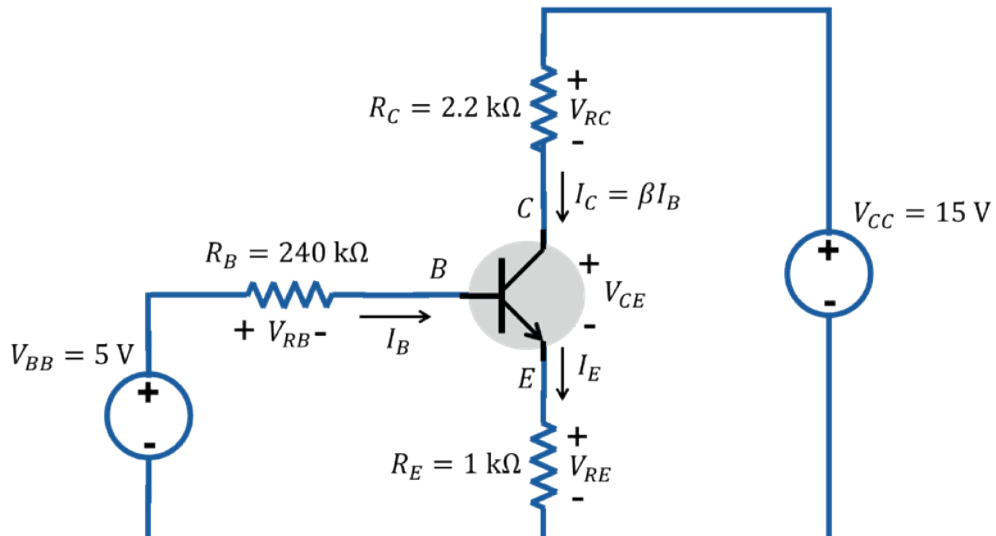


Figura 11.8. Circuito de Polarización fija y resistencia en emisor del transistor BJT.

Solución.

Al igual que en el ejemplo anterior, lo primero que se debe calcular es la corriente de la base I_B . Sustituimos el transistor BJT utilizando el modelo de fuente de corriente controlada por corriente de la Figura 11.5a y nos resulta el circuito que se muestra en la Figura 11.9.

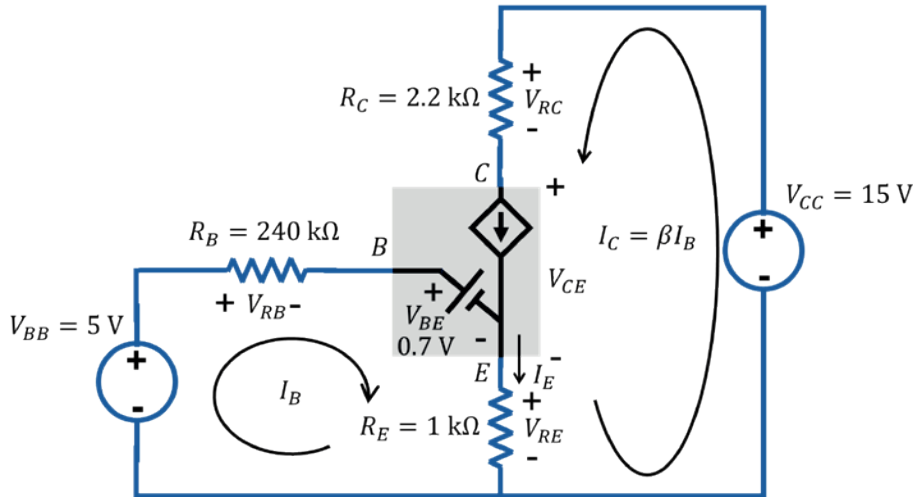


Figura 11.9. Circuito con el modelo de fuente de corriente controlada por corriente para el transistor BJT.

Después de sustituir el modelo de fuente de corriente controlada por corriente para el transistor BJT, en el circuito resultan dos mallas, una para la corriente I_B y otra para la corriente I_C .

En la Figura 11.9 se aprecia que lo único que comparten las dos mallas es la resistencia R_E por la cual circula la corriente del emisor I_E . Por lo tanto, para calcular la corriente I_B se aplica una ley de voltajes de Kirchhoff en la malla de I_B y, utilizando la expresión que relaciona a la corriente I_C y a la corriente I_B con la ganancia β , se combina y despeja la corriente I_B .

Aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff en la malla de I_B resulta la ecuación (11.9).

$$-V_{BB} + I_B R_B + V_{BE} + I_E R_E = 0 \text{ V} \quad (11.9)$$

En la ecuación anterior se tienen dos incógnitas, I_B e I_E ; sustituimos la ecuación (11.13), que relaciona a la corriente I_B con la corriente I_E en la ecuación (11.9), y despejamos la corriente I_B , resultando la ecuación (11.10).

$$\begin{aligned}
& -V_{BB} + I_B R_B + V_{BE} + I_E R_E = 0 \text{ V} \\
& -V_{BB} + I_B R_B + V_{BE} + [I_B \cdot (\beta + 1)] R_E = 0 \text{ V} \\
& I_B R_B + [I_B \cdot (\beta + 1)] R_E = V_{BB} - V_{BE} \\
& I_B [R_B + (\beta + 1) R_E] = V_{BB} - V_{BE} \\
& I_B = \frac{V_{BB} - V_{BE}}{R_B + (\beta + 1) R_E} \tag{11.10}
\end{aligned}$$

Con la ecuación (11.10) calculamos el valor de la corriente de base, resultando:

$$\begin{aligned}
I_B &= \frac{V_{BB} - V_{BE}}{R_B + (\beta + 1) R_E} = \frac{5 \text{ V} - 0.7 \text{ V}}{240 \text{ k}\Omega + (180 + 1)(1 \text{ k}\Omega)} \\
I_B &= 10.21 \mu\text{A}
\end{aligned}$$

Con la ecuación (11.2) y el valor de la corriente de base I_B se calcula directamente el valor de la corriente de colector I_C , resultando:

$$\begin{aligned}
I_C &= \beta I_B \\
I_C &= (180)(10.21 \mu\text{A}) \\
I_C &= 1.83 \text{ mA}
\end{aligned}$$

Calculamos la corriente de emisor I_E con la ecuación (11.3), resultando:

$$\begin{aligned}
I_E &= I_B \cdot (\beta + 1) \\
I_E &= (10.21 \mu\text{A}) \cdot (180 + 1) \\
I_E &= 1.84 \text{ mA}
\end{aligned}$$

Para calcular el voltaje en la resistencia del colector V_{RC} utilizamos la ecuación (11.6). Sustituimos los valores del circuito de la Figura 11.9 en la ecuación (11.6) y resulta:

$$\begin{aligned}
V_{RC} &= I_C R_C \\
V_{RC} &= (1.83 \text{ mA})(2.2 \text{ k}\Omega) \\
V_{RC} &= 4.04 \text{ V}
\end{aligned}$$

Para calcular el voltaje en la resistencia del emisor V_{RE} utilizamos la ley de Ohm y multiplicamos la corriente del emisor I_E por la resistencia del emisor R_E , resultando la ecuación (11.11).

$$V_{RE} = I_E R_E \tag{11.11}$$

Sustituimos los valores del circuito de la Figura 11.9 en la ecuación (11.11) y resulta:

$$V_{RE} = I_E R_E$$

$$V_{RE} = (1.84 \text{ mA})(1 \text{ k}\Omega)$$

$$V_{RE} = 1.84 \text{ V}$$

Para calcular el voltaje entre colector y emisor aplicamos una ley de voltajes de Kirchhoff en la malla de I_C , resultando:

$$-V_{CC} + V_{RC} + V_{CE} + V_{RE} = 0 \text{ V} \quad (11.12)$$

Despejamos el voltaje V_{CE} y resulta la ecuación (11.13).

$$V_{CE} = V_{CC} - V_{RC} - V_{RE} \quad (11.13)$$

Con la ecuación (11.13) calculamos el valor del voltaje colector emisor V_{CE} , resultando:

$$V_{CE} = V_{CC} - V_{RC} - V_{RE}$$

$$V_{CE} = 15 \text{ V} - 4.04 \text{ V} - 1.84 \text{ V}$$

$$V_{CE} = 9.12 \text{ V}$$

Ejemplo 11-3. En la Figura 11.8 se muestra el circuito de polarización fija con resistencia en emisor del transistor BJT. Considerando una ganancia $\beta = 100$ y la información que se presenta en el circuito, calcular I_B , I_C , I_E , V_{RC} , V_{RE} y V_{CE} .

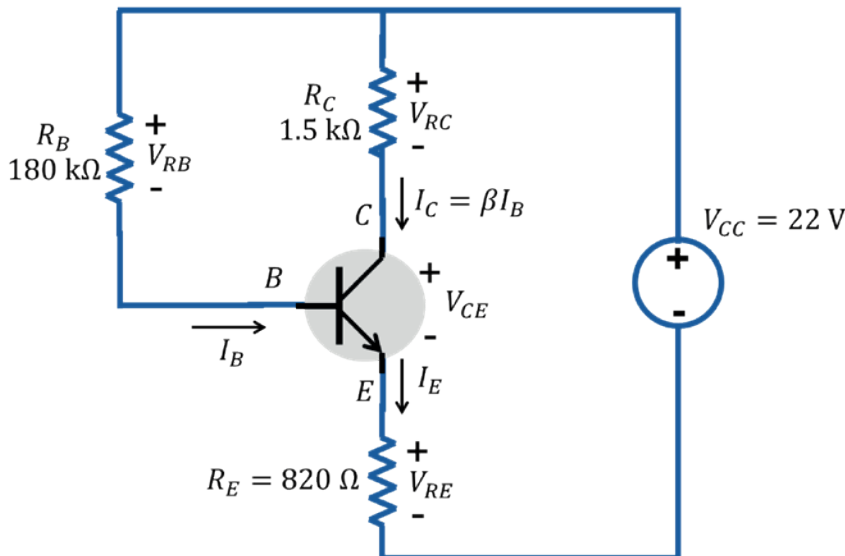


Figura 11.10. Circuito de Polarización fija y resistencia en emisor del transistor BJT.

Solución.

Aparentemente se trata de un circuito diferente a los que acabamos de resolver, sin embargo, si se analiza con detenimiento, se puede considerar que se trata básicamente del mismo circuito que en el **Ejemplo 11-2** sólo que la fuente de alimentación V_{CC} está entregando la energía a las dos mallas del circuito. Esto se entiende mucho mejor si redibujamos el circuito como aparece en la Figura 11.11.

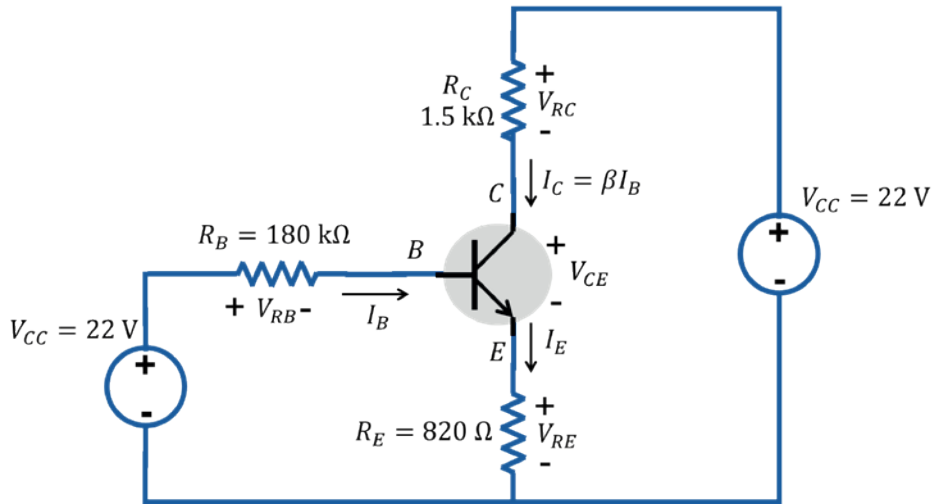


Figura 11.11. Circuito redibujado para considerar a la fuente V_{CC} como la alimentación de las dos mallas que se forman del transistor BJT.

Obsérvese que lo único que se debe hacer es sustituir la fuente de alimentación V_{BB} por la fuente de alimentación V_{CC} en la ecuación (11.10), resultando la ecuación (11.14). El resto de las ecuaciones permanecen idénticas a las utilizadas en el **Ejemplo 11-2**.

$$I_B = \frac{V_{CC} - V_{BE}}{R_B + (\beta + 1)R_E} \quad (11.14)$$

Por lo tanto, al igual que en el ejemplo anterior, lo primero que se debe calcular es la corriente de la base I_B . Sustituimos el transistor BJT utilizando el modelo de fuente de corriente controlada por corriente de la Figura 11.5a y nos resulta el circuito que se muestra en la Figura 11.12.

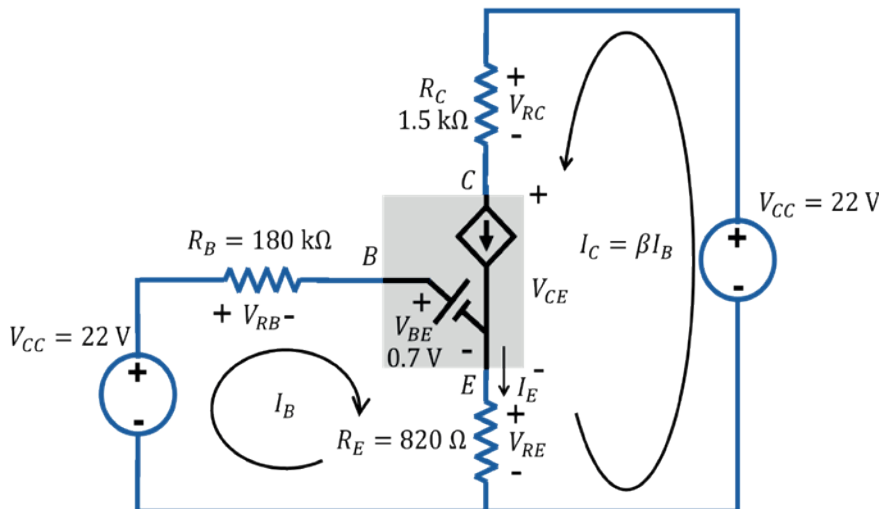


Figura 11.12. Circuito con el modelo de fuente de corriente controlada por corriente para el transistor BJT.

Con la ecuación (11.14) calculamos el valor de la corriente de base, resultando:

$$I_B = \frac{V_{CC} - V_{BE}}{R_B + (\beta + 1)R_E} = \frac{22 \text{ V} - 0.7 \text{ V}}{180 \text{ k}\Omega + (100 + 1)(820 \Omega)}$$

$$I_B = 81.04 \mu\text{A}$$

Con la ecuación (11.2) y el valor de la corriente de base I_B se calcula directamente el valor de la corriente de colector I_C , resultando:

$$I_C = \beta I_B$$

$$I_C = (100)(81.04 \mu\text{A})$$

$$I_C = 8.1 \text{ mA}$$

Calculamos la corriente de emisor I_E con la ecuación (11.3), resultando:

$$I_E = I_B \cdot (\beta + 1)$$

$$I_E = (81.04 \mu\text{A}) \cdot (100 + 1)$$

$$I_E = 8.18 \text{ mA}$$

Para calcular el voltaje en la resistencia del colector V_{RC} utilizamos la ecuación (11.6). Sustituimos los valores del circuito de la Figura 11.12 en la ecuación (11.6) y resulta:

$$V_{RC} = I_C R_C$$

$$V_{RC} = (8.1 \text{ mA})(1.5 \text{ k}\Omega)$$

$$V_{RC} = 12.15 \text{ V}$$

Para calcular el voltaje en la resistencia del emisor V_{RE} utilizamos la ecuación (11.11). Sustituimos los valores del circuito de la Figura 11.12 en la ecuación (11.11) y resulta:

$$\begin{aligned}V_{RE} &= I_E R_E \\V_{RE} &= (8.18 \text{ mA})(820 \Omega) \\V_{RE} &= 6.71 \text{ V}\end{aligned}$$

Con la ecuación (11.13) calculamos el valor del voltaje colector emisor V_{CE} , resultando:

$$\begin{aligned}V_{CE} &= V_{CC} - V_{RC} - V_{RE} \\V_{CE} &= 22 \text{ V} - 12.15 \text{ V} - 6.71 \text{ V} \\V_{CE} &= 3.14 \text{ V}\end{aligned}$$

RESUMEN Y CONCLUSIÓN

Se presentó al transistor BJT como un dispositivo de tres terminales capaz de realizar tareas de control y amplificación de señales eléctricas. Se presentaron los dos tipos de transistores BJT que se pueden encontrar, siendo el *NPN* y el *PNP*. Se presentaron las fórmulas que rigen el comportamiento del transistor y su relación con la ganancia β . Se substituyó el transistor por su modelo equivalente de fuente de corriente controlada por corriente para ser utilizado en la solución de ejemplos. Se analizaron ejemplos para calcular todos los parámetros posibles del transistor.

PROBLEMAS PROPUESTOS

A continuación, se proponen una serie de problemas para resolver utilizando el análisis con transistores BJT.

Prob. 11.1. En el circuito de la Figura 11.6, calcular cuánto debe valer la resistencia R_B para conseguir que el voltaje colector emisor sea de $V_{CE} = 0.1$ V.

(Sol. 114.3 k Ω).

Prob. 11.2. En el circuito de la Figura 11.13, calcular: I_B , I_C , I_E , V_{RC} , V_{RE} y V_{CE} .

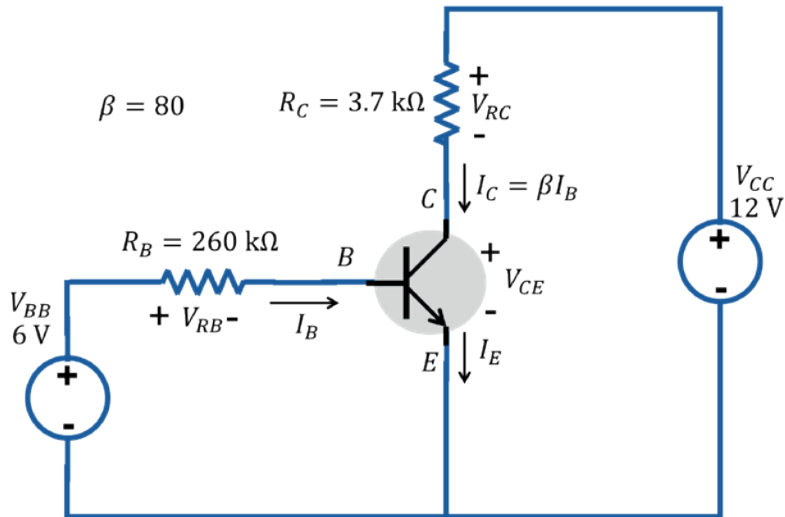


Figura 11.13.

(Sol. 20.38 μA , 1.63 mA, 1.65 mA, 6.03 V, 0 V, 5.97 V).

Prob. 11.3. El circuito de la Figura 11.14 calcular: I_B , I_C , I_E , V_{RC} , V_{RE} y V_{CE} .

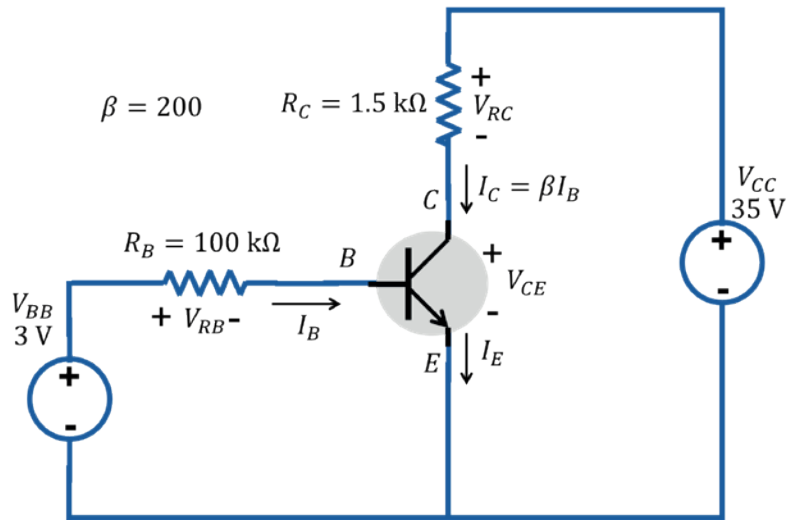


Figura 11.14.

(Sol. $23 \mu\text{A}$, 4.6 mA , 4.62 mA , 6.90 V , 0 V , 28.1 V).

Prob. 11.4. En el circuito de la Figura 11.15 calcular: I_B , I_C , I_E , V_{RC} , V_{RE} y V_{CE} .

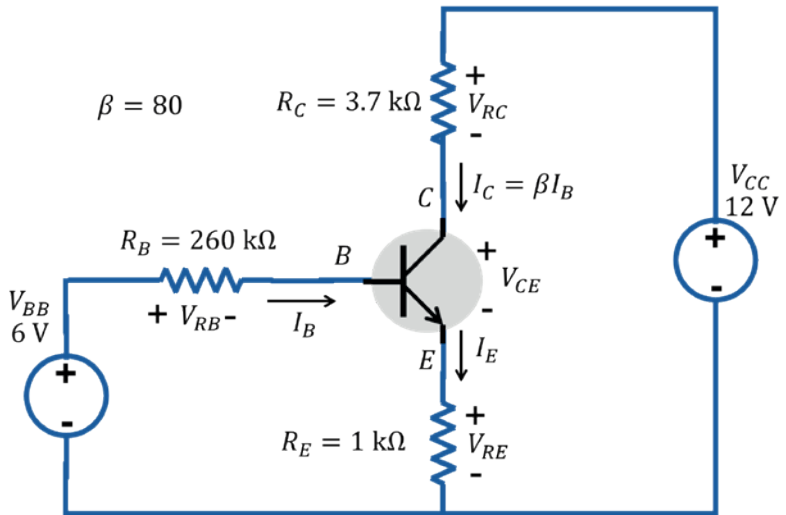


Figura 11.15.

(Sol. $15.54 \mu\text{A}$, 1.24 mA , 1.25 mA , 4.6 V , 1.26 V , 6.14 V).

Prob. 11.5. En el circuito de la Figura 11.16 calcular: I_B , I_C , I_E , V_{RC} , V_{RE} y V_{CE} .

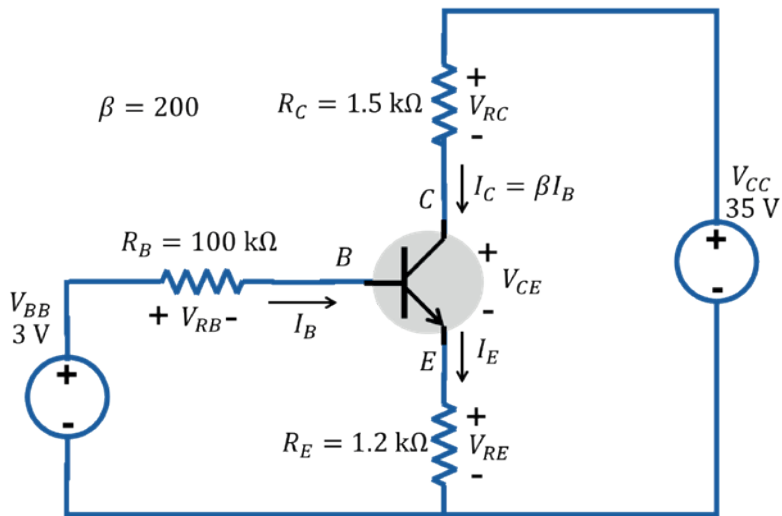


Figura 11.16.

(Sol. $6.74 \mu\text{A}$, 1.34 mA , 1.35 mA , 2.02 V , 1.63 V , 31.35 V).

Prob. 11.6. El circuito de la Figura 11.17, calcular: I_B , I_C , I_E , V_{RC} , V_{RE} y V_{CE} .

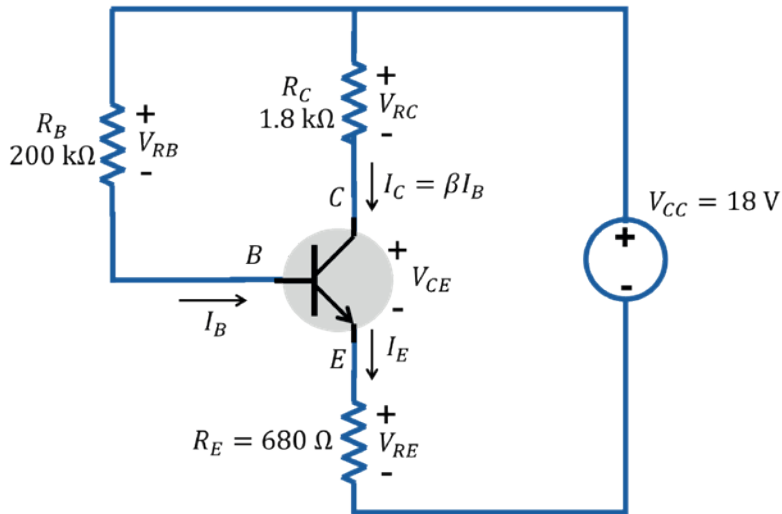


Figura 11.17.

(Sol. $68.74 \mu\text{A}$, 5.15 mA , 5.22 mA , 9.28 V , 3.55 V , 13.75 , 5.17 V).

REFERENCIAS DEL CAPÍTULO

- Boylestad, R. & Nashelsky, L. (2009). *Electrónica: Teoría de circuitos y dispositivos electrónicos*. (R. Navarro Salas, Trans; F. Rodríguez Rodríguez, revisión técnica; L. M. Cruz Castillo & B. Gutiérrez Hernández, Eds., 10.^a edición). México: Prentice Hall, Pearson Educación.
- Floyd L. T. (2008). *Dispositivos electrónicos* (8.^a edición). México: Pearson Educación.
- Hayt, W. H. Jr., Kemmerly, J. E. & Durbin, S. M. (2018). *Análisis de circuitos en ingeniería* (7.^a edición). México: McGraw-Hill.
- Transistor (2021). Wikipedia, *La enciclopedia libre*. Recuperado de <https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Transistor&oldid=155655616>

**ANÁLISIS DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS
DE CORRIENTE DIRECTA**

Primera edición 2023

El cuidado de la edición estuvo a cargo del Departamento Editorial
de la Dirección General de Difusión y Vinculación
de la Universidad Autónoma de Aguascalientes.